BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF AMALGAMASI DUA SISI PADA LINGKARAN SERAGAM

(Skripsi)

Oleh

TRI WULANDARI
1417031119

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

ABSTRACT

LOCATING-CHROMATIC NUMBER OF AMALGAMATION OF TWO EDGES OF UNIFORM CYCLES

By

TRI WULANDARI

Let G be a graph with ordered pairs set $(V(G), E(G))$, where $V(G)$ is a set of vertices with $V(G) \neq 0$ and $E(G)$ is a set of edges. Let c a coloring of G with $c(u) \neq c(v)$ for adjacent u and v in G and $\Pi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ is a set of vertices which consists of color classes from $V(G)$. Color code $c_\Pi(v)$ from v is the ordered k-tuple $(d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_k))$, where $d(v, C_i) = \min\{d(v, x) | x \in C_i\}$ for $1 \leq i \leq k$. If every vertices of G have distinct color code, then c is called locating-coloring of G.The amount of minimum color needed in locating coloring of G is called a locating-chromatic number of G, locating-chromatic number of G is denoted by $\mathcal{X}_L(G)$. C_n^2 is two-edge amagamation graph of C_n, $n \geq 3$. If there are s pieces C_n^2, denoted by (sC_n^2). The result of this research is the locating-chromatic number of amalgamation of two edge on uniform cycle graph (sC_n^2) is: $\chi_L(sC_3^2)$= 3 for $s \geq 2$, $\chi_L(sC_4^2)$= $s + 3$ for $s \geq 2$, $\chi_L(sC_n^2)$= $l + 4$ for $n > 3$ odd where $(l + 2)^2 - (l + 1) \leq s \leq (l + 2)^2 + (l + 2$, and $n > 4$ even where $(l + 1)^2 + l \leq s \leq (l + 2)^2 + l$ with $l \geq 1$.

Key word: graph, chromatic location, locating-chromatic number, amalgamation graph.

ABSTRAK

BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF AMALGAMASI DUA SISI PADA LINGKARAN SERAGAM

Oleh

TRI WULANDARI

Graf G merupakan himpunan pasangan terurut dari $(V(G), E(G))$, dengan $V(G)$ menyatakan himpunan titik dari G dengan $V(G) \neq 0$ dan $E(G)$ menyatakan banyaknya himpunan sisi. Misalkan c suatu pewarnaan sejati di G dengan $c(u) \neq c(v)$ untuk u dan v yang bertetangga di G dan $\Pi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ adalah himpunan yang terdiri dari kelas-kelas warna dari $V(G)$. Kode warna $c_\Pi(v)$ dari v adalah k-pasang terurut $(d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_k))$ dengan $d(v, C_i) = \min\{d(v, x) | x \in C_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik di G mempunyai kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi dari G. Banyaknya warna minimum yang digunakan dalam pewarnaan lokasi disebut bilangan kromatik lokasi dari G, yang dinotasikan dengan $\chi_L(G)$. Graf C_n^2 adalah graf amalgamasi dua sisi dari $C_n, n \geq 3$. Jika terdapat amalgamasi dari s graf C_n^2, maka dinotasikan dengan (sC_n^2). Hasil dari penelitian ini adalah bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi dua sisi pada lingkaran seragam (sC_n^2) adalah : $\chi_L(sC_3^2)= 3$ untuk $s \geq 2$; $\chi_L(sC_4^2)= s + 3$ untuk $s \geq 2$; $\chi_L(sC_n^2)= l + 4$ untuk $n > 3$ ganjil untuk $(l + 2)^2 - (l + 1) \leq s \leq (l + 2)^2 + (l + 2$, dan $n > 4$ genap dimana $(l + 1)^2 + l \leq s \leq (l + 2)^2 + l$ dengan $l \geq 1$.

Kata kunci: graf, kromatik lokasi, bilangan kromatik lokasi, graf amalgamasi.

BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF AMALGAMASI DUA SISI PADA LINGKARAN SERAGAM

Oleh

Tri Wulandari

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA SAINS

pada

Jurusan Matemarika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

Judul Skripsi : **BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF AMALGAMASI DUA SISI PADA LINGKARAN SERAGAM**

Nama Mahasiswa : ***Tri Wulandari***

NPM : 1417031119

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.
NIP. 19760411 200012 2 001

Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.
NIP. 19620704 198803 1 002

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP. 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Asmiati, S.Si.,M.Si.** ....

Sekretaris : **Drs. Tiryono Ruby, M.Sc.,Ph.D.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Dra. Dorrah Aziz, M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Drs. Suratman, M.Sc.
NIP 19640604 199003 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **13 Februari 2019**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama	: **Tri Wulandari**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1417031119**
Judul	: **BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF AMALGAMASI DUA SISI PADA LINGKARAN SERAGAM**
Jurusan	: **Matematika**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan semuatulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah karya penulisan ilmiah Universitas Lampung.

Bandar Lampung, 13 Februari 2019

Penulis,

Tri Wulandari

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Tri Wulandari, anak ketiga dari tiga bersaudara yang dilahirkan di Bandar Lampung pada tanggal 7 Juni 1996 oleh pasangan Bapak Satiman dan Ibu Priyatni.

Penulis menempuh pendidikan di Sekolah Dasar (SD) di SD Negeri 1 Sidodadi pada tahun 2002 -2008; SMP Negeri 10 Bandar Lampung pada tahun 2008 -2011; SMK Negeri 4 Bandar Lampung pada tahun 2011-2014. Pada tahun 2014 penulis terdaftar sebagai mahasiswi S1 Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui Jalur SBMPTN tes tertulis.

Pada tahun 2017 penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Kantor Badan Kepegawaian Daerah Kota Bandar Lampung, dan pada tahun yang sama penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Mandalasari Kecamatan Sragi, Kabupaten Lampung Selatan, Provinsi Lampung.

PERSEMBAHAN

Dengan mengucap puji dan syukur kehadirat Allah SWT kupersembahkan karya kecil dan sederhana ini untuk :

Ayah dan Ibu tercinta serta keluarga yang selalu mendoakan, memberi kasih sayang, dan telah memotivasi penulis agar bisa menjadi seseorang yang bisa dibanggakan.

Dosen Pembimbing dan Penguji yang sangat berjasa dan selalu memberikan motivasi, semangat, dan nasehat kepada penulis.

Sahabat-sahabat tersayang. Terimakasih atas kebersamaan, keceriaan, canda, dan tawa serta doa dan semangat yang telah diberikan.

Almamater Universitas Lampung.

KATA INSPIRASI

“Cobalah untuk tidak menjadi seseorang yang sukses, tapi mencoba menjadi seseorang yang bernilai.”

(Albert Einstein)

“Niscaya Allah akan mengangkat (derajat) orang-orang yang beriman diantaramu dan orang-orang yang diberi ilmu beberapa derajat.”

(Q.S. Al-Mujadilah : 11)

“Ketidak tahuan adalah kutukan Tuhan sedang kan pengetahuan merupakan sayap yang akan membawamu terbang menuju surga.”

(William Shakespeare)

SANWACANA

Puji syukur penulis panjatkan atas kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah – Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsiyang berjudul “Bilangan Kromatik Lokasi Graf Amalgamasi Dua Sisi pada Lingkaran Seragam”. Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari dukungan dan kerjasama berbagai pihak yang telah memberikan bimbingan, kritik, dan saran yang bermanfaat bagi penulis. Oleh sebeb itu, penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Ibu Notiragayu M.Si. selaku Dosen Pembimbing Akademik yang dengan sabar telah membimbing penulis.
2. Ibu Dr. Asmiati, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing yang telah dengan sabar membimbing, menyemangati, dan memotivasi penulis.
3. Bapak Drs. Tiryono Ruby, M.Sc.,Ph.D. selaku Dosen Pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, kritik, dan saran yang membangun.
4. Ibu Dra. Dorrah Aziz, M.Si. selaku Dosen Pembahas atas kesediaannya dalam menguji, dan telah dengan sabar memberikan kritik dan saran.
5. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph. D. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung.

6. Bapak Prof. Dr. Sutopo Hadi, S.Si., M.Sc. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung.
7. Seluruh Dosen dan Karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung.
8. Kedua orang tua penulis, kakak serta saudara tersayang yang tak henti – hentinya mendo'akan yang terbaik, memberikan kasih sayang, sehingga memotivasi penulis untuk selalu memberikan yang terbaik.
9. Yeti Rahmawati, Atika Faradilla dan seluruh rekan–rekan matematika angkatan 2014 atas canda dan tawa yang telah membuat hidup penulis lebih berwarna.
10. Almamater tercinta Universitas Lampung.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih terdapat banyak kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran demi perbaikan skripsi ini. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis khusunya dan bagi pembaca pada umumnya. Terimakasih.

Bandar Lampung, 13 Februari 2019

Penulis

Tri Wulandari

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

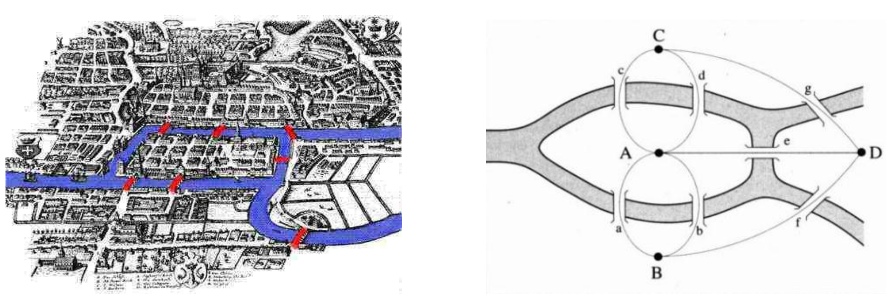
Gambar

Halaman

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Konsep dasar teoi graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 melalui tulisannya yang berjudul *Solution Problematis Ad Geometriam Situs Pertinentis.* Di dalam tulisannya tersebut, Leonhard Euler mengupayakan pemecahan masalah jembatan *Konisberg* yang sangat terkenal di Eropa yakni "apakah mungkin melalui ke tujuh buah jembatan itu masing – masing tepat satu kali, dan kembali lagi ke tempat semula"?. Permasalahan tersebut direpresentasikan dalam bentuk graf dengan daratan dinyatakan sebagai titik atau *vertex* dan jembatan sebagai sisi atau *edge.*



Gambar 1. Jembatan *Konigsberg* dan representasi graf Jembatan *Konigsberg*

Sejak itulah minat terhadap teori graf berkembang pesat. Diantara pembahasan teori graf yang hingga kini masih menjadi sebuah topik yang sangat menarik untuk di kaji adalah pembahasan mengenai pewarnaan graf . Bilangan kromatik lokasi pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand, dkk., pada tahun 2002, dengan mengembangkan dua konsep dalam graf yaitu pewarnaan titik dan dimensi partisi pada graf. Pada penelitiannya Chartrand, dkk., (2002) telah berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi beberapa kelas graf, diantaranya pada graf siklus atau graf lingkaran diperoleh $\chi_L(C_n) = 3$ untuk n ganjil dan $\chi_L(C_n) = 4$ untuk n genap.

Asmiati, dkk., (2011) telah berhasil mendapatkan bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi bintang. Selanjutnya Asmiati (2014) telah berhasil mendapatkan bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi bintang tak homogen. Selain itu Asmiati, dkk., (2017) juga telah berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi graf petersen $(P_{n,1})$ diperoleh $X_L(P_{n,1}) = 4$ untuk n ganjil dan $X_L(P_{n,1}) = 5$ untuk n genap.

1.2 TujuanPenelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi dua sisi pada lingkaran seragam.

1.3 ManfaatPenelitian

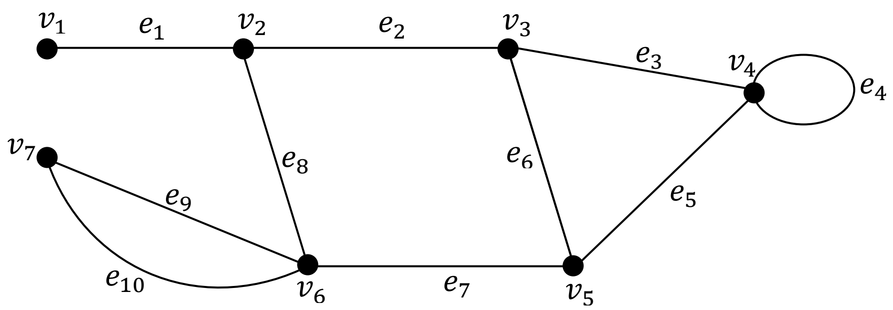
Adapun manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Mengembangkan wawasan tentang teori graf terutama tentang bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi dua sisi pada lingkaran seragam.
2. Sebagai bahan referensi penelitian lanjutan mengenai bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi khususnya graf amalgamasi lingkaran.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Teori Graf

Beberapa konsep dasar yang digunakan dalam penelitian ini diambil dari Deo (1989). Graf G adalah himpunan terurut $(V(G), E(G))$, dengan $V(G)$ menyatakan himpunan titik dari G dengan $V(G) \neq 0$ dan $E(G)$ menyatakan himpunan sisi yakni pasangan tak terurut dari $V(G)$. Banyaknya himpunan titik $V(G)$ disebut dengan orde dari graf G. Jika titik v_1 dan v_2 dihubungkan oleh sisi e maka titik v_1 dan v_2 dikatakan menempel pada sisi e begitu juga dengan sisi e menempel pada titik v_1 dan v_2, sehingga titik v_1 dan v_2 saling bertetangga. Lingkungan dari suatu titik v dinotasikan dengan $N(v)$ adalah himpunan titik-titik yang bertetangga dengan v.



Gambar 2. Graf dengan 7 titik dan 10 sisi

Pada Gambar 2, graf tersebut memiliki himpunan titik

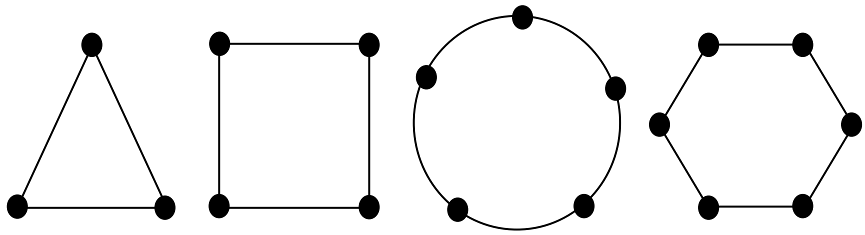
$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ dan himpunan sisi

$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$. Titik yang bertetangga dengan titik v_6 adalah titik v_2, v_5, dan v_7, sedangkan sisi yang menempel dengan titik v_6 adalah e_7, e_8, e_9, dan e_{10}. Derajat dari suatu titik v pada graf G adalah banyaknya sisi yang menempel pada titik v yang dinotasikan dengan $d(v)$, pada Gambar 2 $d(v_1) = 1$, $d(v_2) = 3$, $d(v_3) = 5$, $d(v_4) = 4$, $d(v_5) = 3$, $d(v_6) = 4$, $d(v_7) = 2$. Daun adalah titik yang berderajat satu, pada Gambar 2 yang dikatakan sebagai daun adalah titik v_1. Sisi paralel adalah beberapa sisi yang memiliki dua titik ujung yang sama, *loop* adalah sisi yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. Sisi-sisi paralel pada Gambar 2 adalah e_9 dan e_{10} sedangkan e_4 merupakan *loop*. Graf yang tidak memiliki *loop* dan sisi paralel disebut graf sederhana, pada gambar 2 bukan merupakan graf sederhana karena memiliki sisi paralel dan *loop*.

Lintasan adalah jalan yang melewati titik yang berbeda-beda pada suatu graf dimana titik-titik yang dilewati tepat sekali. Contoh lintasan pada Gambar 2 adalah $v_1 - e_1 - v_2 - v_3 - e_3 - v_4 - e_5 - v_5 - e_7 - e_6 - e_9 - v_7$. Sirkuit adalah lintasan yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama yang sering disebut juga dengan lintasan tertutup. Sirkuit dibedakan menjadi dua macam, yaitu sirkuit genap dan ganjil. Sirkuit genap adalah sirkuit yang memuat banyaknya titik berjumlah genap, sedangkan sirkuit ganjil adalah sirkuit yang memuat banyaknya titik berjumlah ganjil. Contoh sirkuit pada Gambar 2 adalah $v_2 - e_2 - v_3 - e_6 - v_5 - e_7 - v_6 - e_8 - e_2$ yang juga merupakan sirkuit ganjil, sedangkan $v_3 - e_4 - v_4 - e_5 - v_5 - e_6 - v_3$ merupakan sirkuit genap.

2.2 Graf Lingkaran

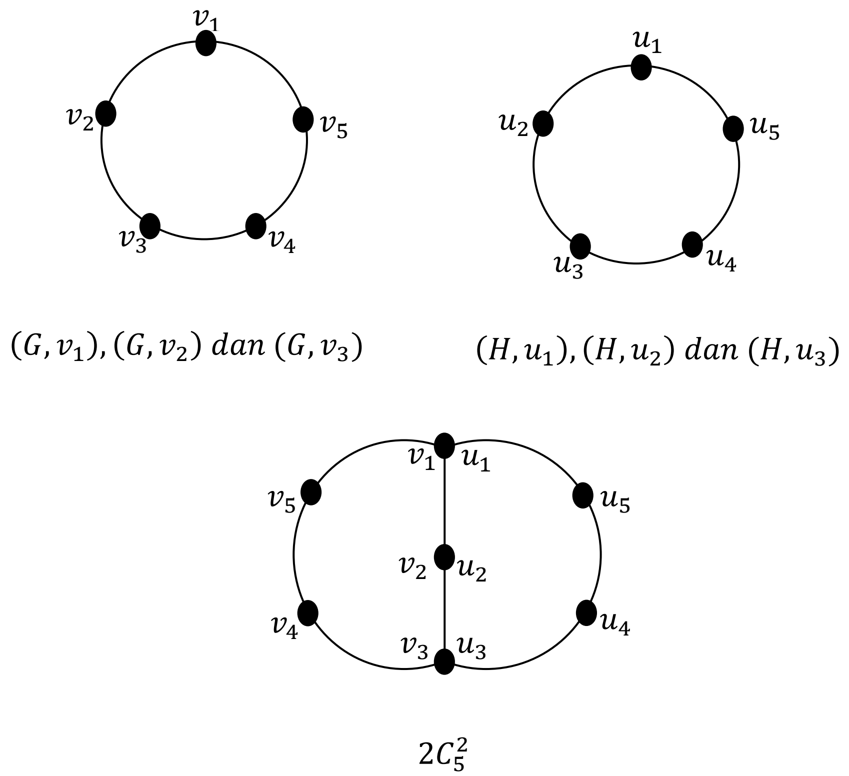
Graf lingkaran merupakan graf teratur yang masing-masing titiknya berderajat 2. Graf lingkaran di notasikan dengan C_n dengan n menyatakan banyaknya titik dari graf tersebut. Berikut ini merupakan contoh graf lingkaran.



Gambar 3. Contoh graf lingkaran C_3, C_4, C_5 dan C_6

2.3 Graf Amalgamasi

Beberapa cara dapat digunakan untuk memperoleh graf yang baru dari graf yang ada. Salah satu cara tersebut diantaranya dengan melakukan penggabungan, dimana penggabungan tersebut disebut dengan amalgamasi. Misalkan G dan H adalah dua graf berbeda, dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots\ , v_n\}$ dan $V(H) = \{u_1, u,$ $\ldots, u_n\}$. Amalgamasi sisi G dan H dibentuk dari gabungan kedua graf tersebut dengan meleburkan sisi. Sehingga diperoleh graf baru (sC_n) dari amalgamasi tersebut, dimana notasi "s" menyatakan banyaknya lingkaran. Karena graf lingkaran memiliki bentuk yang simetris, maka pemilihan sisi dapat dilakukan secara sebarang. Berikut adalah contoh graf amalgamasi lingkaran dua sisi ($sC_{m,n}$) (Ardiyansah, 2013).



Gambar 4. Contoh graf amalgamasi dua sisi $2C_5^2$

2.4 Bilangan Kromatik Lokasi

Bilangan kromatik lokasi graf pertama kali dikaji oleh Chartrand, dkk., pada tahun (2002), yang merupakan pengembangan dari konsep dimensi partisi dan pewarnaan graf. Misalkan c suatu pewarnaan sejati di G dengan $c(u) \neq c(v)$ untuk u dan v yang bertetangga di G. Misalkan C_i adalah himpunan titik-titik yang diberi warna i, yang selanjutnya disebut kelas warna, maka $\Pi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ adalah himpunan yang terdiri dari kelas-kelas warna dari $V(G)$. Kode warna $c_\Pi(v)$ dari v adalah k-pasang terurut $(d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_k))$ dengan $d(v, C_i) = \min\{d(v, x) | x \in C_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$, jika setiap titik di G mempunyai kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi dari G, banyaknya warna minimum yang digunakan pada pewarnaan lokasi disebut bilangan kromatik lokasi dari G, yang dinotasikan dengan $\chi_L(G)$. Berikut ini diberikan teorema dasar tentang bilangan kromatik lokasi yang telah dibuktikan oleh Chartrand dkk., 2002.

Teorema 2.1 (Chartrand dkk., 2002)

Misalkan c adalah pewarnaan lokasi pada graf G. Jika u dan v adalah dua titik yang berbeda di G sedemikian sehingga $d(u, w) = d(v, w)$ untuk semua $w \in V(G) - \{u, v\}$, maka $c(u) = c(v)$. Secara khusus, jika u dan v titik-titik yang tidak bertetangga di G sedemikian sehingga $N(u) = N(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$.

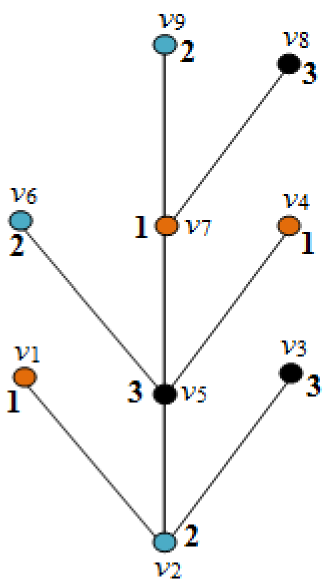
Bukti: Misalkan c adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung G dan misalkan $\Pi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ adalah partisi dari titik-titik G ke dalam kelas warna C_i. Untuk suatu titik $u, v \in V(G)$, andaikan $c(u) = c(v)$ sedemikian sehingga titik u dan v berada dalam kelas warna yang sama, misal C_i dari Π. Akibatnya, $d(u, C_i) = d(v, C_i) = 0$. Karena $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$ maka $d(u, C_j) = d(v, C_j)$ untuk setiap $j \neq i$, $1 \leq j \leq k$. Akibatnya, $c_\Pi(u) = c_\Pi(v)$ sehingga c bukan pewarnaan lokasi. Jadi terbukti bahwa jika u

dan v titik-titik yang tidak bertetangga di G sedemikian sehingga $N(u) = N(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$. ∎

Akibat 2.1 (Chartrand dkk., 2002)

Jika G adalah graf terhubung dengan suatu titik yang bertetangga dengan k daun, maka $\chi_L(G) \geq k + 1$.

Bukti: Misalkan v adalah suatu titik yang bertetangga dengan k daun, yaitu $x_1, x_2, \dots, x_k$ di G. Berdasarkan teorema 2.1, setiap pewarnaan lokasi dari G mempunyai warna yang berbeda untuk setiap $x_i, i = 1,2, \dots, k$. Karena v bertetangga dengan semua x_i, maka v harus mempunyai warna yang berbeda dengan semua daun x_i. Akibatnya, $X_L(G) \geq k + 1$. ∎



Gambar 5. Pewarnaan lokas minimum pada graf G

Diberikan graf G seperti pada Gambar 5 akan ditentukan terlebih dahulu batas bawah bilangan kromatik lokasi pada graf G. Karena terdapat titik v_2 dan v_5 yang memiliki 2 daun, maka berdasarkan Akibat 2.1, $X_L(G) \geq 3$.

Selanjutnya, akan ditentukan batas atas bilangan kromatik lokasi gari graf G. Titik-titik pada $V(G)$ dipartisi sebagai berikut : $C_1 = \{v_1, v_4, v_7\}$; $C_2 = \{v_2, v_6, v_9\}$; $C_3 = \{v_3, v_5, v_8\}$. Kode warnanya yaitu $C_\Pi(v_1) = \{0,1,2\}$; $C_\Pi(v_2) = \{1,0,1\}$; $C_\Pi(v_3) = \{2,1,0\}$; $C_\Pi(v_4) = \{0,2,1\}$; $C_\Pi(v_5) = \{1,1,0\}$; $C_\Pi(v_6) = \{2,0,1\}$; $C_\Pi(v_7) = \{0,1,1\}$; $C_\Pi(v_8) = \{1,2,0\}$; $C_\Pi(v_9) = \{1,0,2\}$. Karena kode warna semua titik di $V(G)$ berbeda, maka pewarnaan tersebut merupakan pewarnaan lokasi dengan $\chi_L(G) \geq 3$.

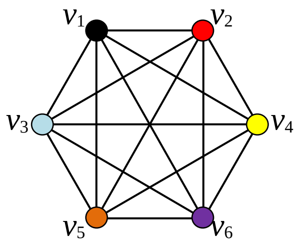
2.5 Bilangan Kromatik Lokasi Graf Lengkap

Berikut ini akan ditunjukkan bilangan kromatik lokasi graf lengkap serta contohnya.

Teorema 2.2 (Chartrand dkk., 2002)

Bilangan kromatik lokasi graf lengkap (K_n) adalah n untuk $n \geq 2$.

Bukti: Karena setiap titik pada graf lengkap saling bertetangga maka setiap titik diberi warna yang berbeda, jadi $\chi_L(K_n) = n$ untuk $n \geq 2$.



Gambar 6. Contoh graf lengkap (K_6) dengan bilangan kromatik lokasi 6.

2.6 Bilangan Kromatik Lokasi Graf Lingkaran

Akan dibuktikan bilangan kromatik lokasi graf lingkaran untuk n titik ganjil dan n titik genap beserta contohnya.

Teorema 2.3 (Chartrand dkk; 2002)

Pada graf lingkaran C_n untuk n titik, $\chi_L(C_\mathrm{n}) = 3$ jika n adalah bilangan ganjil dan $\chi_L(C_\mathrm{n}) = 4$ jika n adalah bilangan genap.

Bukti:

Kasus 1

$n \geq 3$ adalah ganjil. Misal $C_n : v_1, v_2, \ldots, v_n$,. Ditetapkan warna 1 untuk v_1, warna 2 untuk v_i jika i adalah genap, dan warna 3 untuk v_i jika $i \geq 3$ dan i ganjil. Berdasarkan Akibat 2.1, perlu ditunjukkan bahwa ini adalah pewarnaan lokasi untuk membuktikan bahwa $\chi_L(C_n) = 3$. Pertimbangkan dua Subkasus berikut.

Subkasus 1.1

$n = 4k + 1$, dengan $k \geq 1$. Untuk $1 \leq i \leq k$, $c_\Pi(v_{2i}) = (2i - 1, 0, 1)$ dan untuk $k + 1 \leq i \leq 2k$, $c_\Pi(v_{2i}) = (2\text{k} + 2 - 2i, 0, 1)$. Juga, untuk $1 \leq i \leq k$, $c_\Pi(v_{2i}) = (2i - 1, 0, 1)$ dan untuk $k + 1 \leq i \leq 2k$, $c_\Pi(v_{2i}) = (2\text{k} + 2 - 2i, 0, 1)$. Karena semua vector $c_\Pi(v_i)$ berbeda, maka pewarnaan ini adalah pewarnaan lokasi dan $\chi_L(C_{4k+1}) = 3$.

Subkasus 1.2

$n = 4k + 3$, dengan $k \geq 0$. Bukti $\chi_L(C_{4k+3}) = 3$ mirip dengan Subkasus 1.1.

Kasus 2

$n \geq 4$ adalah genap. Misal $C_n : v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1$. Ditetapkan warna 1 untuk v_1, warna 2 untuk v_i jika i adalah genap, dan warna 3 untuk v_i jika $i \geq 3$ dan i ganjil, dan warna 4 untuk v_i jika $i \geq 4$ dan i genap. Akan ditunjukkan bahwa ini adalah pewarnaan lokasi C_n, dengan demikian membuktikan bahwa $\chi_L(C_n) \leq 4$. Pertimbangkan dua Subkasus.

Subkasus 2.1

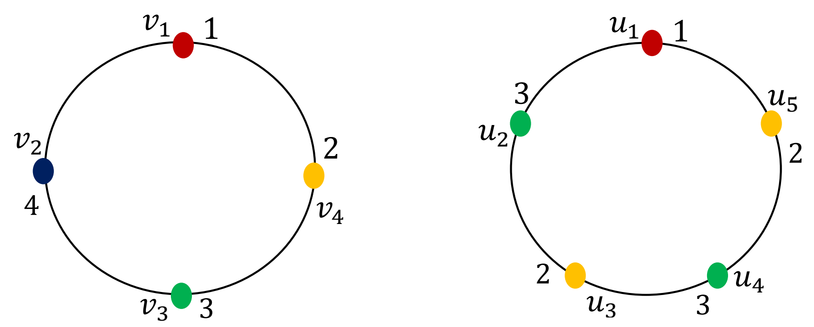
$n = 4k$, dengan $k \geq 1$. Untuk $1 \leq i \leq k$, $c_\Pi(v_{2i+1}) = (2i, 2i - 1, 0, 1)$ dan untuk $k + 1 \leq i \leq 2k$, $c_\Pi(v_{2i+1}) = (4\text{k} - 2i, 4k + 1 - 2i, 0, 1)$. Untuk $2 \leq i \leq k$, $c_\Pi(v_{2i}) = (2i - 1, 2i - 1, 0, 1)$ dan untuk $k + 1 \leq i \leq 2k$, $c_\Pi(v_{2i}) = (4\text{k} + 1 - 2i, 4k + 2 - 2i, 0, 1)$. Karena semua vector $c_\Pi(v_i)$ berbeda, maka pewarnaan ini adalah pewarnaan lokasi dan $\chi_L(C_{4k}) = 4$.

Subkasus 2.2

$n = 4k + 2$, dengan $k \geq 1$. Bukti bahwa $\chi_L(C_{4k+2}) = 4$ mirip dengan Subkasus 2.1. Tetap hanya untuk menunjukkan $\chi_L(C_n) \geq 4$ jika n genap. Diasumsikan secara kebalikannya, bahwa terdapat c pewarnaan lokasi dari C_n yang menggunakan tiga warna, misalkan $1, 2, 3$ untuk $n \geq 4$. Setidaknya salah satu warna, misalkan 2, digunakan untuk mewarnai sejumlah t titik C_n, dimana $1 \leq t \leq n/2$. Selanjutnya dicari siklus dari C_n, dimulai dengan v_1, misal $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_t}$, menjadi titik pada C_n yang berwarna 2. Karena tidak ada dua titik yang berdekatan, selanjutnya untuk setiap bilangan bulat j dengan $1 \leq j \leq t$, interval $I_j = \{v_{i_j+1}, v_{i_j+2}, \ldots, v_{i_{j+1}-1}\}$ (dihitung modulo n) tidak kosong.

Pertama, ditunjukkan bahwa tidak ada interval yang berkardinal ganjil yaitu 3 atau lebih, diasumsikan secara kontradiksi, bahwa beberapa interval I_j terdiri atas bilangan ganjil dari titik atau lebih. Tanpa menghilangkan secara umum, diasumsikan bahwa v_{i_j+1} dan $v_{i_{j+1}-1}$ berwarna 1. Namun, $c_\Pi\left(v_{i_j+1}\right) = c_\Pi\left(v_{i_{j+1}-1}\right) = (0, 1, 1)$, yang tidak mungkin.

Kedua, ditunjukkan bahwa tidak ada interval yang berbilangan genap pada titik, diasumsikan secara kontradiksi, terdapat interval berbilangan genap pada titik. Karena C_{2k} memiliki susunan genap, harus ada bilangan genap pada interval yang terdiri dari bilangan genap pada titik. Misalkan I_j dan I_k dua interval berbeda yang terdiri dari bilangan genap pada titik. Diasumsikan, tanpa menghilangkan secara umum, bahwa v_{i_j+1} berwarna 1. Tepat satu dari v_{i_k+1} dan $v_{i_{k+1}-1}$ berwarna 1, dikatakan berbekas. Maka $c_\Pi\left(v_{i_j+1}\right) = c_\Pi(v_{i_k+1}) = (0,1,1)$, kontradiksi. Kensekuensinya, semua interval $t = n/2$ terdiri tepat satu titik. Seharusnya, ada bilangan bulat terkecil i_j $(1 \leq j \leq n/2)$ sehingga v_{i_j-1} dan v_{i_j+1} berwarna berbeda, katakanlah 1 dan 3, secara berturut-turut. Seharusnya, ada bilangan bulat $i_k > i_j$ sehingga v_{i_k-1} berwarna 3 dan v_{i_k-1} berwarna 1. Namun, kemudian $c_\Pi\left(v_{i_j}\right) = c_\Pi(v_{i_k}) = (1,0,1)$, menghasilkan kontradiksi akhir. Oleh karena itu, $\chi_L(C_n) = 4$ jika n genap. ■



Gambar 7. Contoh graf lingkaran (C_4) dengan kromatik lokasinya 4 dan (C_5) dengan kromatik lokasinya 3

III. METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini akan dilaksanakan pada semester ganjil tahun akademik 2017/2018 di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Langkah - Langkah Penelitian

Langkah-langkah yang dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menganalisa teorema-teorema yang berkaitan dengan bilangan kromatik suatu graf.
2. Menentukan bilangan kromatik lokasi dari graf amalgamasi dua sisi pada lingkaran seragam (sC_n^2) untuk $n \geq 3$ ganjil dan $s \geq 2$.
3. Menentukan bilangan kromatik lokasi dari graf amalgamasi dua sisi pada lingkaran seragam (sC_n^2) untuk $n \geq 4$ genap dan $s \geq 2$.
4. Menambahkan satu sisi lingkaran pada graf amalgamasi dua sisi pada lingkaran seragam (sC_n^2) untuk $n \geq 3$ ganjil dan $s \geq 3$. Dan menentukan bilangan kromatik lokasinya.

5. Menambahkan satu sisi lingkaran pada graf amalgamasi dua sisi pada lingkaran seragam (sC_n^2) untuk $n \geq 4$ genap dan $s \geq 3$. Dan menentukan bilangan kromatik lokasinya.
6. Menentukan bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi satu sisi pada lingkaran seragam sebanyak s lingkaran.

V. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil yang diperoleh dari penelitian pada bab sebelumnya, dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi dua sisi pada lingkaran seragam (sC_3^2) ganjil adalah $\chi_L(sC_3^2) = 3$ untuk $s \geq 2$.
2. Bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi dua sisi pada lingkaran seragam (sC_4^2) genap adalah $\chi_L(sC_4^2) = s + 3$ untuk $s \geq 2$.
3. Bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi dua sisi pada lingkaran seragam (sC_n^2) adalah $\chi_L(sC_n^2) = l + 4$ untuk $n > 3$ ganjil dengan $(l+2)^2 - (l+1) \leq s \leq (l+2)^2 + (l+2)$, dan $n > 4$ genap untuk $(l+1)^2 + l \leq s \leq (l+2)^2 + l$ dimana $l \geq 1$.

DAFTAR PUSTAKA

Ardiyansah, R. dan Darmaji, 2013. Bilangan Kromatik Graf Hasil Amalgamasi Dua Buah Graf. *Jurnal Sains dan Seni Pomits*. **2**(1):.22-23

Asmiati, Wamiliana, Devriyadi, dan Yulianti, L. 2017. On Some Petersen Graphs Having Locating-Chromatic Number Four or Five. *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)*. **102**(4):769-778.

Asmiati. 2014. The Locating-Chromatic Number of Non-Homogeneous Amalgamation of Stars. *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)*. **93**(1):89-96.

Asmiati, Assiyatun, H., dan Baskoro, E.T. 2011. Locating-Chromatic Number of Amalgamation of Stars. *ITB J. Sci*. **43**(1):1-8.

Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M.A., Slater, P.J., dan Zhang, P. 2002. The Locating-Chromatic Number of a Graph. *Bull. Inst. Combin. Appl*. **36**:89-101.