PERBANDINGAN ALGORITMA OPTIMASI CHAOS DENGAN METODE NEWTON-RAPHSON UNTUK MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN NON LINEAR

(Skripsi)

Oleh

Tina Maulida

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG

2019

ABSTRAK

PERBANDINGAN ALGORITMA OPTIMASI CHAOS DENGAN METODE NEWTON-RAPHSON UNTUK MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN NON LINEAR

Oleh

TINA MAULIDA

Penyelesaian permasalahan sistem persamaan non linear terdapat banyak metode dan algoritma yang bisa digunakan, tetapi setiap metode dan algoritma yang ada mempunyai kelebihan dan kekurangan masing-masing. Salah satunya, metode numerik digunakan untuk menyelesaikan persoalan di mana perhitungan secara analitik tidak dapat diselesaikan. Metode numerik yang sering digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan non linear adalah metode Newton-Raphson. Metode lain untuk menyelesaikan sistem persamaan non linear juga dapat menggunakan pendekatan dengan algoritma optimasi *chaos.* Penelitian ini bertujuan untuk melihat efektivitas dan efisiensi dari metode Newton-Raphson dan algoritma optimasi *chaos.* Metode Newton Raphson adalah metode pendekatan yang menggunakan satu titik awal dan pendekatannya dengan memperhatikan slope atau gradien pada titik tersebut. *Chaos Optimization Algorithm* (COA) merupakan algoritma optimasi yang berdasarkan *ergodicity, stochastic properties,* dan *regularity* dari *chaos* itu sendiri. Dari hasil pengujian, pendekatan algoritma optimasi *chaos* menghasilkan galat yang lebih kecil sehingga lebih efektif dibanding metode Newton-Raphson, sedangkan pendekatan metode Newton-Raphson menghasilkan jumlah iterasi dan waktu penyelesaian yang lebih singkat sehingga lebih efisien dibanding algoritma optimasi *chaos*.

Kata Kunci : Sistem persamaan non linear, metode Newton-Raphson, gradien, Optimasi *chaos*

ABSTRACT

COMPARISON OF CHAOS OPTIMIZATION ALGORITHM WITH NEWTON-RAPHSON METHOD FOR COMPLETING NON LINEAR EQUATION SYSTEM

By

TINA MAULIDA

Solving the problem of nonlinear system equations, some many methods and algorithms used, but each technique and algorithm that has the advantages and disadvantages of each. For one thing, numerical methods are used to solve problems where analytical calculations cannot answer. The numerical method that is often used to solve nonlinear systems is the Newton-Raphson method. Other methods for solving nonlinear equation systems can also use approaches with chaotic optimization algorithms. This study aims to look at the effectiveness and efficiency of the Newton-Raphson method and chaos optimization algorithms. The Newton Raphson method is an approach method that uses one starting point and approach concerning the slope or gradient at that point. Chaos Optimization Algorithm (COA) is an optimization algorithm based on ergodicity, stochastic properties, and regularity of chaos itself. From the test results, the chaos optimization algorithm approach produces smaller errors so that it is more effective than the Newton-Raphson method, while the Newton-Raphson method approach provides shorter iterations and turnaround times, so it is more efficient than the chaos optimization algorithm.

***Keywords* :** Non linear equation system, Newton-Raphson method, gradient, Chaos optimization.

PERBANDINGAN ALGORITMA OPTIMASI CHAOS DENGAN METODE NEWTON-RAPHSON UNTUK MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN NON LINEAR

Oleh

Tina Maulida

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

Judul Skripsi : **PERBANDINGAN ALGORITMA OPTIMASI CHAOS DENGAN METODE NEWTON-RAPHSON UNTUK MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN NON LINEAR**

Nama Mahasiswa : *Tina Maulida*

Nomor Pokok Mahasiswa : 1317031087

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.	**Subian Saidi, S.Si., M.Si.**
NIP 19740316 200501 1 001	NIP 19800821 200812 1 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Subian Saidi, S.Si., M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Dra. Dorrah Aziz, M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Drs. Suratman, M.Sc.
NIP 19640604 199003 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **15 Maret 2019**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : **Tina Maulida**

Nomor Pokok Mahasiswa : **1317031087**

Judul : **PERBANDINGAN ALGORITMA OPTIMASI CHAOS DENGAN METODE NEWTON-RAPHSON UNTUK MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN NON LINEAR**

Jurusan : **Matematika**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan semua tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah karya penulisan ilmiah Universitas Lampung.

Bandar Lampung, Juli 2019

Penulis,

TINA MAULIDA
NPM. 1317031087

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Tina Maulida, anak keenam dari delapan bersaudara yang dilahirkan di Bandar Lampung pada tanggal 18 Maret 1996 oleh pasangan Bapak Tairon Syamsudin dan Ibu Sar'ah.

Menempuh pendidikan di Sekolah Dasar (SD) diselesaikan di SD N 3 Bandar Lampung pada tahun 2001-2007, kemudian bersekolah di SMP N 25 Bandar Lampung pada tahun 2007-2010, dan bersekolah di SMA N 6 Bandar Lampung pada tahun 2010-2013.

Pada tahun 2013 penulis terdaftar sebagai mahasiswi S1 Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui Jalur SNMPTN undangan.

Pada tahun 2016 penulis melakukan Kerja Praktik (KP) di Kejaksaan Negeri Bandar Lampung dan pada tahun yang sama penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Sendang Agung Kecamatan Bandar Mataram, Kabupaten Lampung Tengah, Provinsi Lampung.

PERSEMBAHAN

Dengan mengucap puji dan syukur kehadirat Allah SWT kupersembahkan karya kecil dan sederhana ini untuk :

Ayah dan Ibu tercinta yang selalu mendoakan, memberi semangat, dan telah menjadi motivasi terbesar selama ini.

Kakak dan Adik tercinta Zainuddin, Agus Susanto, Adi Saputra, Wahyudi, Dedi Irawan, M. Riski Aziz, dan M. Jabar Sidiq yang selalu berbagi canda, tawa serta menjadi penyemangat penulis agar bisa menjadi seseorang yang bisa dibanggakan.

Dosen Pembimbing dan Penguji yang sangat berjasa dan selalu memberikan motivasi kepada penulis.

Sahabat-sahabat tersayang. Terimakasih atas kebersamaan, keceriaan, canda dan tawa serta doa dan semangat yang telah diberikan.

Almamater Universitas Lampung

KATA INSPIRASI

"Sukses tergantung pada impianmu, maka bermimpilah sebesar mungkin dan kamu berusaha untuk menggapainya, pasti kamu akan menjadi orang sukses."

"Sukses itu ibarat perjalanan, jika kamu tidak mau konsisten dan terus melangkah, siap-siap saja jika perjalananmu akan menjadi lebih lama."

"Jangan pernah mengizinkan rasa takut tumbuh lebih besar dibandingkan keyakinanmu, karena hal itu akan menghalangi kesuksesanmu di masa depan."

"Meski kamu bukan terbaik, namun belajarlah agar tetap menjadi lebih baik lagi."

SANWACANA

Dengan mengucapkan *Alhamdulillah* penulis panjatkan puji syukur kehadirat Allah SWT atas rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “PERBANDINGAN ALGORITMA OPTIMASI CHAOS DENGAN METODE NEWTON-RAPHSON UNTUK MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN NON LINEAR”. Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si.) di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Dengan ketulusan hati penulis ingin mengucapkan terima kasih banyak kepada :

1. Bapak Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing I, terima kasih untuk bimbingan dan kesedian waktunya selama penyusunan skripsi ini.
2. Bapak Subian Saidi, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing II, terima kasih untuk bantuan dan masukannya selama penyusunan skripsi.
3. Ibu Dra. Dorrah Aziz, M.Si. selaku Dosen Penguji, terima kasih atas kesediaannya untuk menguji, memberikan saran dan kritik yang membangun dalam penyelesaian skripsi ini.
4. Bapak Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D. selaku Pembimbing Akademik, terima kasih atas bimbingan dan pembelajarannya dalam menjalani perkuliahan.

5. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, MA, Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Bapak Drs. Suratman, M.Sc. selaku Dekan FMIPA Universitas Lampung.
7. Seluruh Dosen dan Karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
8. Ayah dan Ibu tercinta yang tak pernah berhenti memberi semangat, doa, dorongan, nasehat dan kasih sayang serta pengorbanan yang tak tergantikan hingga penulis selalu kuat menjalani setiap rintangan yang ada di depan.
9. Kakak dan adik Zainuddin, Agus Susanto, Adi Saputra, Wahyudi, Dedi Irawan, M. Riski Aziz, dan M. Jabar Sidiq yang selalu berbagi canda dan tawa serta selalu menyemangati hingga terselesaikannya skripsi ini.
10. Sahabat-sahabat seperjuangan Matematika 2013 yang banyak membantu dan sabar menghadapi penulis, serta selalu memberikan dukungan dan juga semangat hingga terselesaikannya skripsi ini.
11. Almamater tercinta Universitas Lampung.
12. Seluruh pihak yang telah membantu yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Bandar Lampung,   Juli 2019
Penulis,

Tina Maulida

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL i

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang 1

1.2 Tujuan Penelitian 2

1.3 Manfaat Penelitian 2

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan 3

2.1.1. Persamaan Linear 4

2.1.2. Persamaan Non Linear 5

2.2 Sistem Persamaan 6

2.2.1. Sistem Persamaan Linear (SPL) 6

2.2.2. Sistem Persamaan Non Linear 7

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian 17

3.2 Metodologi Penelitian 17

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Penyelesaian Sistem Persamaan Non Linear dengan Metode Newton-Raphson 18

4.2 Penyelesaian Sistem Persamaan Non Linear dengan Algoritma Optimasi *Chaos* 21

4.3 Perbandingan Metode Newton-Raphson dengan Algoritma Optimasi *Chaos* 23

V. KESIMPULAN
5.1 Kesimpulan..28
DAFTAR PUSTAKA
LAMPIRAN

DAFTAR TABEL

Halaman

Tabel 1. Hasil Perhitungan Dengan Menggunakan Metode Iterasi Satu Titik....... 13

Tabel 2. Solusi Sistem Persamaan Non Linear dengan Metode Newton-Raphson (1) 20

Tabel 3. Solusi Sistem Persamaan Non Linear dengan Metode Newton-Raphson (2) 21

Tabel 4. Solusi Sistem Persamaan Non Linear dengan Algoritma Optimasi Chaos 23

Tabel 5. Perbandingan Jumlah Iterasi Metode Newton-Raphson dengan Algoritma Optimasi *Chaos* 24

Tabel 6. Perbandingan Solusi Sistem Persamaan Non Linear Metode Newton-Raphson dengan Algoritma Optimasi *Chaos* 25

Tabel 7. Perbandingan galat (*error*) Sistem Persamaan Non Linear Metode Newton-Raphson dengan Algoritma Optimasi *Chaos* 26

Tabel 8. Perbandingan Waktu *Looping* Metode Newton-Raphson dengan Algoritma Optimasi *Chaos* 27

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Sistem persamaan non linear merupakan kumpulan dari beberapa persamaan non linear. Ada beberapa fungsi tujuan dalam persamaan non linear yang tidak bisa diselesaikan secara analitik, tetapi dapat diselesaikan dengan metode-metode khusus untuk penyelesaian masalah dalam persamaan non linear. Untuk menyelesaikan permasalahan sistem persamaan non linear terdapat banyak metode dan algoritma yang bisa digunakan, tetapi setiap metode dan algoritma yang ada mempunyai kelebihan dan kekurangan masing-masing. Salah satunya, metode numerik digunakan untuk menyelesaikan persoalan di mana perhitungan secara analitik tidak dapat diselesaikan.

Metode numerik yang sering digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan non linear adalah metode Newton-Raphson. Metode Newton-Raphson adalah metode pendekatan yang menggunakan satu titik awal dan pendekatannya dengan memperhatikan slope atau gradien pada titik tersebut. Metode Newton-Raphson adalah metode untuk mencari hampiran atau pendekatan terhadap akar fungsi real.

Metode lain untuk menyelesaikan sistem persamaan non linear juga dapat menggunakan pendekatan dengan algoritma-algoritma yang terinspirasi dari alam diantaranya algoritma optimasi *chaos*.

Chaos, sifat kacau atau tidak beraturan yang sebenarnya bersifat deterministik atau bisa ditentukan, merupakan fenomena yang banyak terjadi di banyak sistem dalam bidang ilmu pengetahuan. *Chaos Optimization Algorithm* (COA) merupakan algoritma optimasi yang berdasarkan *ergodicity*, *stochastic properties*, dan *regularity* dari *chaos* itu sendiri. Pada penelitian ini penulis ingin membandingkan penyelesaian sistem persamaan non linear menggunakan metode Newton-Raphson dan dengan pendekatan *Chaos Optimization Algorithm* (COA).

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini yaitu :

1. Memperoleh akar-akar dari suatu sistem persamaan non linear dengan menggunakan metode Newton-Raphson dan algoritma optimasi *chaos*.
2. Melihat efektivitas dan efisiensi dari metode Newton-Raphson dan algoritma optimasi *chaos*.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini yaitu:

1. Dapat mengetahui kelayakan algoritma optimasi *chaos* dalam mencari solusi sistem persamaan non linear.
2. Dapat menjadi referensi dalam pengembangan menyelesaikan sistem persamaan non linear.
3. Dapat membantu memecahkan masalah sistem persamaan non linear.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan

Persamaan adalah suatu pernyataan matematika dalam bentuk simbol yang menyatakan bahwa dua hal adalah persis sama. Persamaan ditulis dengan tanda sama dengan (=). Persamaan dapat digunakan untuk menyatakan kesamaan dua ekspresi yang terdiri dari satu atau lebih peubah. Sebagai contoh, untuk *x* anggota bilangan nyata, persamaan berikut selalu benar:

$$x(x - 1) = x^2 - x$$

Persamaan di atas adalah contoh dari identitas: persamaan yang selalu benar, tak peduli berapa pun nilai peubah yang ada di dalamnya. Persamaan berikut bukanlah suatu identitas:

$$x^2 - x = 0$$

Persamaan di atas adalah salah untuk sejumlah tak hingga *x*, dan hanya benar untuk satu nilai. Jika suatu persamaan diketahui bernilai benar, persamaan tersebut membawa informasi mengenai nilai *x*. Secara umum, nilai peubah di mana suatu persamaan menjadi benar disebut dengan solusi atau penyelesaian. Banyak pengarang yang menggunakan istilah persamaan untuk kesamaan yang bukan identitas. Sebagai contoh,

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

adalah identitas, sedangkan

$$(x + 1)^2 = 2x^2 + x + 1$$

adalah persamaan yang memiliki akar $x = 0$ dan $x = 1$. Apakah suatu pernyataan dimaksudkan sebagai suatu identitas atau suatu persamaan, menentukan informasi mengenai peubahnya sering dapat ditentukan berdasarkan konteksnya.

Huruf-huruf awal alfabet seperti $a, b, c, \ldots$ sering kali digunakan sebagai konstanta, dan huruf-huruf di akhir alfabet, seperti $x, y, z,$ umumnya digunakan sebagai lambang peubah (Sinaga, 2017).

Secara umum, persamaan dibagi menjadi dua yaitu :

2.1.1 Persamaan Linear

Persamaan linear adalah suatu kalimat matematika terbuka yang peubah berderajat (berpangkat) satu.

Bentuk umum dari sebuah persamaan linear adalah:

$ax = c$ (1 peubah)

$ax + by = c$ (2 peubah)

$ax + by + cz = d$ (3 peubah)

di mana *a*, *b*, *c* dan *d* konstanta.

Secara umum sebuah persamaan linear dalam n peubah $x_1, x_2, \dots, x_n$ dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

dengan $a_1, a_2, \dots, a_n$ dan b adalah konstanta real. Suatu penyelesaian dari suatu persamaan linear $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ adalah sederetan n angka $s_1, s_2, \dots, s_n$ sedemikian sehingga persamaan tersebut terpenuhi jika kita mensubstitusikan $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$. Himpunan semua penyelesaian persamaan tersebut disebut himpunan penyelesaiannya atau penyelesaian umum persamaan. Penyelesaian (solusi) persamaan linear dapat ditentukan dengan memperhatikan *domain* atau daerah asalnya (Anton dan Chris, 2000).

2.1.2 Persamaan Non linear

Persamaan non linear adalah suatu kalimat matematika terbuka yang peubah berderajat tidak sama dengan satu atau mengandung nilai fungsi non linear, seperti log, sin dan lain sebagainya.

Penyelesaian persamaan non linear adalah penentuan akar-akar persamaan non linear, dimana akar sebuah persamaan $f(x) = 0$ adalah nilai-nilai x yang menyebabkan nilai $f(x)$ sama dengan nol. Dalam beberapa kasus, melalui faktorisasi $f(x) = 0$ dapat diperoleh penyelesaian seperti yang diinginkan. Akan tetapi, lebih banyak jabaran persamaan dalam model mempunyai bentuk yang rumit, sehingga teknik analisis matematika murni tidak dapat memberikan solusi. Oleh karena itu, digunakan hampiran metode numerik diantaranya yaitu metode biseksi (*bisection*), metode regula falsi (*false position*), metode Newton-Raphson, metode secant, metode iterasi tetap.

2.2 Sistem Persamaan

2.2.1 Sistem Persamaan Linear (SPL)

Sistem persamaan linear ialah kumpulan dari persamaan-persamaan linear yang saling berhubungan untuk mencapai tujuan tertentu.

Himpunan berhingga dari persamaan linear- persamaan linear dalam *n* peubah x_1, $x_2, \ldots, x_n$ dinamakan sistem persamaatn linear atau sistem linear. Bentuk umum sistem persamaan linear (disingkat SPL) yang terdiri dari *m* persamaan dan *n* peubah $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dapat ditulis sebagai :

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m$$

dengan a_{ij} dan b_i $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ adalah konstanta-konstanta real.

Suatu sistem persamaan linear dengan *m* persaman dan *n* peubah x_1, $x_2, \ldots, x_n$ dengan $A_{m\,x\,n} = (a_{ij}), X_{n\,x\,1} = (x_j)$ $, dan\ B_{m\,x\,1} = (b_i)$. Jika matriks *B* pada SPL di atas diganti dengan matriks nol *O*, maka sistem persamaan linear tersebut dikatakan homogen, jika tidak disebut SPL non homogen.

Penyelesaian SPL dapat dilakukan dengan berbagai macam cara, yaitu: substitusi, eliminasi, metode Cramer, eliminasi Gauss, eliminasi Gasuss-Jordan dan berbagai macam cara lain.

2.2.2 Sistem Persamaan Non linear

Sistem persamaan non linear ialah kumpulan dari persamaan-persamaan non linear yang saling berhubungan untuk mencapai tujuan tertentu (Gusmiyanti,2012).

Bentuk persamaannya adalah sebagai berikut

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

$$\vdots$$

$$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

Hasil penyelesaiannya adalah $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$. Untuk menyelesaikan sistem persamaan non linear ekuivalen dengan meminimalkan fungsi utama yang dijabarkan sebagai berikut:

Dicari : $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)T , x \in \Phi$

Min : $F(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} f_i^2(x)$

di mana Φ adalah ruang penyelesaian. Fungsi ini definit positif dan memiliki global minimum di setiap akar pemecahannya. Bila minimisasi dari $F(\mathbf{x})$ adalah 0, maka **x** adalah solusi yang tepat.

Pada umumnya penyelesaian sistem persamaan non linear sulit untuk diselesaikan secara analitik. Oleh karena itu, penyelesaian sistem persamaan non linear didekati dengan hampiran numerik. Metode numerik adalah teknik untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang diformulasikan secara matematis dengan menggunakan operasi hitungan (*arithmatic*) yaitu operasi tambah, kurang, kali, dan bagi. Solusi yang dihasilkan dengan menggunakan metode numerik berupa hampiran. Hampiran, pendekatan, atau aproksimasi (*approximation*) didefinisikan sebagai nilai yang mendekati solusi sebenarnya atau sejati.

Penyelesaian sistem persamaan non linear dengan metode numerik dapat diselesaikan dengan beberapa pendekatan diantaranya :

1. Metode Newton Raphson

Menurut Yang, dkk (2005:186-187), metode Newton Raphson digunakan untuk meyelesaikan persamaan non linear dengan satu variabel, hanya jika pada turunan pertama dari $f(x)$ ada dan kontinu pada seluruh solusinya. Strategi di balik metode Newton adalah pendekatan kurva $f'(x)$ berdasrkan pada garis singgung di kurva x, sehingga untuk menentukan gradien garis kurva $f'(x)$ tersebut yaitu dengan cara

$$f'(x_n) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_n) - 0}{x_n - x_{n+1}}$$

atau dapat ditulis

$$0 - f(x_n) = f'(x_n)(x_n - x_{n+1})$$

Sehingga rumus metode Newton adalah sebagai berikut

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Untuk persamaan non linear tunggal, cara lain untuk menyusun formulanya adalah dengan menurunkannya dari ekspansi deret Taylor order-pertama:

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + (x_{n+1} - x_n)f'(x_n)$$

di mana x_n adalah nilai tebakan awal x dan x_{n+1} adalah nilai x yang merupakan perpotongan antara slope $f'(x)$ dengan sumbu x. Karena pada perpotongan ini, $f(x_{n+1})$ bernilai nol, maka persamaan di atas dapat disusun ulang menjadi:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, f'(x_n) \neq 0$$

yang merupakan formula Newton-Raphson untuk persamaan tunggal.

Pendekatan di atas selanjutnya dapat diterapkan untuk kumpulan atau sistem persamaan non linear, yang terdiri atas n buah persamaan, dengan n buah variabel bebas yang tak diketahui. Sebagai contoh, ekspansi deret Taylor order-pertama untuk 2 buah variabel dapat dituliskan sebagai berikut :

$$f_{(1,n+1)} = f_{(1,n)} + \left(x_{(1,n+1)} - x_{(1,n)}\right)\frac{\partial f_{(1,n)}}{\partial x_1} + \left(x_{(2,n+1)} - x_{(2,n)}\right)\frac{\partial f_{(1,n)}}{\partial x_2}$$

$$f_{(2,n+1)} = f_{(2,n)} + \left(x_{(1,n+1)} - x_{(1,n)}\right)\frac{\partial f_{(2,n)}}{\partial x_1} + \left(x_{(2,n+1)} - x_{(2,n)}\right)\frac{\partial f_{(2,n)}}{\partial x_2}$$

Karena $f_{1,n+1}$ dan $f_{2,n+1}$ bernilai nol, maka kedua persamaan di atas dapat disusun ulang menjadi:

$$\frac{\partial f_{(1,n)}}{\partial x_1}x_{(1,n+1)} + \frac{\partial f_{(1,n)}}{\partial x_2}x_{(2,n+1)} = -f_{(1,n)} + x_{(1,n)}\frac{\partial f_{(1,n)}}{\partial x_1} + x_{(2,n)}\frac{\partial f_{(1,n)}}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial f_{(2,n)}}{\partial x_1}x_{(1,n+1)} + \frac{\partial f_{(2,n)}}{\partial x_2}x_{(2,n+1)} = -f_{(2,n)} + x_{(1,n)}\frac{\partial f_{(2,n)}}{\partial x_1} + x_{(2,n)}\frac{\partial f_{(2,n)}}{\partial x_2}$$

Suku-suku yang mengandung *subscript* n telah diketahui nilainya; sedangkan suku-suku yang mengandung *subscript* n+1 yang akan dihitung. Dengan cara lain, kedua persamaan di atas dapat disusun dalam bentuk matriks (yakni perkalian sebuah matriks bujur sangkar dengan sebuah vektor yang menghasilkan sebuah vektor) menjadi :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_{1,n}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{1,n}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_{2,n}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{2,n}}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,n+1} \\ \\ x_{2,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_{1,n} + x_{1,n}\frac{\partial f_{1,n}}{\partial x_1} + x_{2,n}\frac{\partial f_{1,n}}{\partial x_2} \\ -f_{2,n} + x_{1,n}\frac{\partial f_{2,n}}{\partial x_1} + x_{2,n}\frac{\partial f_{2,n}}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

A **X** = **b**

Selanjutnya, besarnya vektor **X** dapat ditentukan. Matriks **A** dalam sistem persamaan ini sering disebut sebagai matriks Jacobian.

Nilai-nilai $x_{1,n+1}$ dan $x_{2,n+1}$ juga dapat ditentukan melalui manipulasi aljabar (misalnya dengan cara Cramer), menghasilkan:

$$x_{1,n+1} = x_{1,n} - \frac{f_{1,n}\frac{\partial f_{2,n}}{\partial x_2} - f_{2,n}\frac{\partial f_{1,n}}{\partial x_2}}{\frac{\partial f_{1,n}}{\partial x_1}\frac{\partial f_{2,n}}{\partial x_2} - \frac{\partial f_{1,n}}{\partial x_2}\frac{\partial f_{2,n}}{\partial x_1}}$$

$$x_{2,n+1} = x_{2,n} - \frac{f_{2,n}\frac{\partial f_{1,n}}{\partial x_1} - f_{1,n}\frac{\partial f_{2,n}}{\partial x_1}}{\frac{\partial f_{1,n}}{\partial x_1}\frac{\partial f_{2,n}}{\partial x_2} - \frac{\partial f_{1,n}}{\partial x_2}\frac{\partial f_{2,n}}{\partial x_1}}$$

2. Metode Iterasi Satu Titik

Seperti penyelesaian persamaan non linear tunggal, formula **iterasi satu titik** untuk sekumpulan persamaan non linear melibatkan sebuah proses penyusunan ulang persamaan:

$$f_i(x) = 0$$

menjadi berbentuk :

$$x_i = g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Metode ini mempunyai strategi yang sama dengan metode iterasi titik tetap dan metode Gauss- Seidel. Masing-masing persamaan non linear diselesaikan untuk memperoleh sebuah nilai *x* yang tak diketahui. Sistem persamaan ini selanjutnya diproses secara iteratif untuk menghitung nilai-nilai *x* yang baru, yang diharapkan akan konvergen kepada penyelesaian yang sesungguhnya.

Sebagai contoh :

Gunakan metode substitusi berurut untuk menentukan akar-akar persamaan:

$x_1 + {x_1}^2 x_2 = 10 \quad \ldots (a)$

$x_2 + 3x_1 {x_2}^2 = 57 \quad \ldots (b)$

Gunakan nilai tebakan awal : $x_1 = 1{,}5$ dan $x_2 = 3{,}5$

Bandingkan hasilnya dengan nilai x_1 dan x_2 yang sesungguhnya.

Penyelesaian :

Masing-masing persamaan (a) dan (b) dapat disusun ulang *(rearranging)* untuk memperoleh harga x_1 dan x_2 sebagai berikut:

$x_1 = \frac{10 - x_1^2}{x_2}$ dan $x_2 = 57 - 3x_1 x_2^2$

<u>Iterasi pertama :</u>

Dengan menggunakan nilai awal $x_1 = 1{,}5$ dan $x_2 = 3{,}5$, maka x_1 (baru) dapat dihitung dengan cara :

$$x_1 = \frac{10 - (1{,}5)^2}{3{,}5} = 2{,}21429$$

Nilai x_1 (baru) ini dan nilai x_2 (lama) selanjutnya dapat dihitung untuk menghitung nilai x_2 (baru) :

$$x_2 = 57 - 3(2{,}21429)(3{,}5)^2 = -24{,}37516$$

<u>Iterasi kedua :</u>

Dengan cara yang sama, diperoleh :

$$x_1 = \frac{10 - (2{,}21429)^2}{-24{,}37516} = -0{,}20910$$

$x_2 = 57 - 3(-0{,}20910)(-24{,}37516)^2 = 429{,}709$

Perhatikan bahwa pendekatan ini menghasilkan penyelesaian yang divergen.

Oleh karena itu, persamaan (a) dan (b) disusun ulang kembali dengan cara yang berbeda, misalnya :

Dari persamaan (a) : $x_1 = \sqrt{10 - x_1 x_2}$

dan, dari persamaan (b) : $x_2 = \sqrt{\frac{57 - x_2}{3x_1}}$

<u>iterasi pertama :</u>

$$x_1 = \sqrt{10 - (1{,}5)(3{,}5)} = 2{,}17945$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{57 - 3{,}5}{3(2{,}17945)}} = 2{,}86051$$

<u>Iterasi kedua :</u>

$$x_1 = \sqrt{10 - (2{,}17945)(2{,}86051)} = 1{,}94053$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{57 - 2{,}86051}{3(1{,}94053)}} = 3{,}04955$$

Hasil-hasil perhitungan selengkapnya disajikan dalam tabel berikut ini :

Tabel 1 Hasil Perhitungan Dengan Menggunakan Metode Iterasi Satu Titik

	A	B	C	D	E	F	G
7	No. Iterasi	x1	x2	g1 (x1, x2)	x1 baru	g2 (x1, x2)	x2 baru
8	1	1.5	3.5	2.17945	2.17945	2.86051	2.86051
9	2	2.17945	2.86051	1.94053	1.94053	3.04955	3.04955
10	3	1.94053	3.04955	2.02046	2.02046	2.98340	2.98340
11	4	2.02046	2.98340	1.99303	1.99303	3.00570	3.00570
12	5	1.99303	3.00570	2.00239	2.00239	2.99805	2.99805
13	6	2.00239	2.99805	1.99918	1.99918	3.00067	3.00067
14	7	1.99918	3.00067	2.00028	2.00028	2.99977	2.99977
15	8	2.00028	2.99977	1.99990	1.99990	3.00008	3.00008
16	9	1.99990	3.00008	2.00003	2.00003	2.99997	2.99997
17	10	2.00003	2.99997	1.99999	1.99999	3.00001	3.00001
18	11	1.99999	3.00001	2.00000	2.00000	3.00000	3.00000
19	12	2.00000	3.00000	2.00000	2.00000	3.00000	3.00000
20	13	2.00000	3.00000	2.00000	2.00000	3.00000	3.00000

(Diyarkholisoh, 2008).

Perhatikanlah bahwa pendekatan ini menghasilkan penyelesaian yang konvergen ke arah nilai-nilai yang sesungguhnya ($x_1 = 2$ dan $x_2 = 3$).

3. Pendeketan Menggunakan Algoritma Optimasi yang Terinspirasi dari Alam

Selain beberapa metode di atas, untuk menentukan solusi sistem persamaan non linear dapat menggunakan pendekatan menggunakan algoritma optimasi yang terinspirasi dari alam di antaranya yaitu :

a. Algoritma Optimasi *Chaos*

Dalam kamus bahasa Inggris *chaos* sendiri diartikan sebagai suatu kekacauan atau ketidakaturan. Walaupun berlangsung secara acak (tidak teratur), sistem yang *chaotic* nyatanya dapat ditentukan secara matematis. *Chaos* bukan suatu gerakan perulangan murni. *Chaos* juga tidak berarti gerakan tak beraturan. Misalnya, pada kupu-kupu Lorenz (*Lorenz butterfly*), gerakannya berulang, tetapi secara tidak beraturan. Contoh lainnya adalah permainan melempar dadu 100 kali. Kejadian yang muncul berulang yaitu bisa satu, dua, tiga, empat, lima, atau enam. Tetapi, sama sekali tidak beraturan juga tidak karena angka satu keluar kira-kira sebanyak 1/6 kali banyaknya pelemparan. Peristiwa ini dinamakan proses random (acak).

Sistem *chaotic* juga mempunyai properti khusus, yaitu bergantung secara sensitif terhadap kondisi awal. Jadi, *chaos* adalah suatu keadaan di mana sebuah sistem tidak bisa diprediksi di mana ia akan ditemukan di tempat berikutnya. Sistem ini bergerak secara acak. Akan tetapi, menurut teori *chaos*, apabila keadaan acak tersebut kita perhatikan dalam waktu yang cukup lama dengan mempertimbangkan dimensi waktu, maka kita akan menemukan juga keteraturan.

Optimasi *chaos* merupakan teknik pembangkitan bilangan random dengan menggunakan fungsi *chaos*, bisa berbentuk fungsi polinomial atau eksponensial seperti persamaan logistik di dalam ekologi yang digunakan untuk menghitung pertumbuhan populasi suatu spesies.

Salah satu fungsi *chaos* sederhana adalah persamaan logistik (*logistic map*). Persamaan logistik dinyatakan sebagai berikut :

$$t_{k+1} = \lambda\, t_k\, (1 - t_k)$$

dimana konstanta λ menyatakan laju pertumbuhan fungsi, yang dalam hal ini $0 \leq \lambda \leq 4$, $0 \leq t \leq 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, Ketika $\lambda \in [3.56, 4]$ menyebabkan persamaan di atas menjadi *chaotic* (Hui-juan, 2006).

Untuk masalah optimasi seperti dibawah ini

$f(x_1, x_2, .., x_n)$, $x_i \in [a_i, b_i]$, $i = 1,2, .., n$ diperkirakan

$x^k = (x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k)$, $t^k = (t_1^k, t_2^k, ..., t_n^k)$.

Secara umum garis besar algoritma optimasi *chaos* dapat diberikan sebagai berikut:

- *Step* 1. Inisialisasi

k = 0, r = 0, k adalah peubah tanda untuk setiap iterasi *chaos*, r adalah peubah tanda untuk pencarian. Tetapkan jumlah iterasi maksimum untuk

peubah *chaos* yaitu k_{max} dan jumlah iterasi maksimum untuk pencarian (*fine search*) yaitu r_{max}.

Membuat nilai t^0 dengan random nilai antara [0,1] dan kemudian memastikan bahwa $t_i^0 \neq (0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0)$. Tetapkan bahwa nilai $t^k = t^0, t^* = t^0, a = a , b = b$, dimana t* adalah peubah *chaos* terbaik pada saat ini, *a* dan *b* adalah batas ruang pencarian (*search space*), kemudian tentukan nilai x* dengan mengacak (*random*) dengan batas ruang pencarian [a,b] dan hitung *f**=*f* (x*).

- *Step* 2. *Mapping* peubah yaitu

Memetakan t_i^k ke daerah optimasi , sehingga

$x_i^k = a_i^r + t_i^k(b_i^r - a_i^r)$

- *Step* 3

Hitung $f(x^k)$, bandingkan hasilnya dengan f^*. Jika

$f(x^k) < f^*$ maka $f^* = f(x^k)$, $x^* = x^k$, $t^* = t^k$

- *Step* 4. Iterasi peubah *chaos*

$k = k + 1;\ 4t_i^k(1.0 - t_i^k)$

- *Step* 5

Jika $k < K_{max}$ maka ulangi *step* 2. Jika tidak, maka $r = r + 1$ dan lanjutkan ke *step* 6.

- *Step* 6. Ubah batas pencarian

$a_i^{r+1} = x_i^* - \gamma(b_i^r - a_i^r)$, $b_i^{r+1} = x_i^* + \gamma(b_i^r - a_i^r)$

Jika $a_i^{r+1} < a_i^r$ maka $a_i^{r+1} = a_i^r$. Jika $b_i^{r+1} > b_i^r$ maka $b_i^{r+1} = b_i^r$

dimana $\gamma \in (0,0.5)$

- *Step* 7

Jika $r < r_{max}$, maka buat t^0 melalui random, tentukan k = 0, dan $t^k = t^0$, kemudian kembali ke *step* 2. Jika tidak, maka COA diakhiri dan x^* adalah solusinya (Jiaqiang, 2008).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian dilaksanakan pada semester ganjil tahun ajaran 2017/2018 bertempat di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metodologi Penelitian

Metodologi penelitian ini yaitu :

1. Mencari referensi tentang algoritma optimasi *chaos*.
2. Menentukan sistem persamaan non linear yang akan di tentukan solusinya.
3. Menentukan solusi sistem persamaan non linear dengan menggunakan metode newton-raphson.
4. Mengaplikasikan algoritma optimasi *chaos* untuk menentukan solusi sistem persamaan non linear yang telah ditentukan dengan bantuan *software Matlab*.
5. Membandingkan solusi sistem persamaan non linear yang di peroleh dari metode newton-raphson dengan algoritma optamasi *chaos*.
6. Menarik kesimpulan.

V. KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Dari hasil dan pembahasan pada bab sebelumnya dapat disimpulkan bahwa :

1. Dari banyaknya iterasi dan waktu penyelesiannya metode Newton-Raphson lebih cepat di banding algoritma optimasi *chaos*, maka metode Newton-Raphson lebih efesien untuk menyelesaikan sistem persamaan non linear.
2. Pada penyelesaian sistem persamaan non linear dengan metode Newton-Raphson solusinya di pengaruhi oleh nilai awal.
3. Dari solusi dan galat yang dihasilkan, algoritma optimasi *chaos* tidak dipengaruhi oleh nilai intervalnya. Maka, algoritma optimasi *chaos* lebih efektif untuk menyelesaikan sistem persamaan non linear.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard, Terjemahan Ir. Hari Suminto. 2000. *Dasar-Dasar Aljabar Linear*. Edisi ketujuh. Interaksa. Batam.

Diyarkholisoh. Akar-akar Sistem Tak Linier. 20 Desember 2016. https://diyarkholisoh.files.wordpress.com/2008/12/akar-sistem-tak-linier-doc-dy.pdf.

Gusmiyanti,R. Sistem Persamaan. 15 Desember 2016. http://raesyagusmiyanti.blogspot.co.id/2012/02/behaviorurldefaultvmlo_09.html.

Hui-Juan, L., Z. Huo-ming, M. Long-hua. 2006. A new Optimization Algorithm Based on Chaos. *Journal of Zhejiang University Science A, ISSN 1009-3095.*

Jiaqiang, dkk. 2008. A New Adaptive Mutative Scale Chaos Optimization Algorithm and its Application. *Control Theory and Application*. **6(2)** : 141-145.

Ramadhani, N. N., dkk. 2013. Perbandingan Solusi Sistem Persamaan Nonlinear menggunakan Metode Newthon-raphson dan Metode Jacobian. *E-Jurnal Matematika*. **2** : 11-17.

Sinaga, Gilbert. Persamaan. 26 Januari 2017. https://gilbertsinaga.wordpress.com/2013/09/26/8/.html.

Yang, W.Y., Cao, W., Chug, T., dan Morris, J. 2005. *Applied Numerical Method Using MATLAB*. New York: John Wiley & Sons, Inc.