

**ANALISIS KESTABILAN DAN PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN  
LOTKA-VOLTERRA DUA *PREDATOR* DAN SATU *PREY* DENGAN  
MENGUNAKAN METODE RUNGE KUTTA ORDE 5**

**(Skripsi)**

**Oleh**

**THALIA REGINA**



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS LAMPUNG  
BANDAR LAMPUNG  
2019**

## **ABSTRACT**

### **ANALYSIS OF STABILITY AND SOLUTION OF LOTKA-VOLTERRA EQUATION SYSTEM OF TWO PREDATORS AND ONE PREY USING FIFTH-ORDER RUNGE KUTTA METHOD**

**By**

**Thalia Regina**

Lotka-Volterra modelling is a dynamic system that can be found in a various natural phenomenon, for example interaction among species that live in a ecosystem. Among the modellings, there are some Lotka-Volterra modellings with various cases, for example two predators and one prey. In this research, discussed numerical solution and stability analysis of Lotka-Volterra modelling of two predators that compete to share one prey. The way to show the discussed dynamic model is by fixed point analysis and stability system. Numerical simulations have illustrated that three species can coexist, when the values of efficiency conversion for the two predators are near to each other.

**Keywords:** Lotka-Volterra modelling, two predators and one prey, fixed points, stability.

## ABSTRAK

### ANALISIS KESTABILAN DAN PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LOTKA-VOLTERRA DUA *PREDATOR* DAN SATU *PREY* DENGAN MENGUNAKAN METODE RUNGE KUTTA ORDE 5

Oleh

**Thalia Regina**

Model Lotka-Volterra merupakan sebuah sistem dinamik yang dapat ditemui dalam berbagai kasus pada fenomena alam, misalnya interaksi antar spesies yang hidup pada suatu ekosistem. Diantara model tersebut terdapat sejumlah model Lotka-Volterra dengan kasus yang bervariasi, misalnya Lotka-Volterra dua *predator* dan satu *prey*. Dalam skripsi ini dibahas solusi numerik dan analisis kestabilan model Lotka-Volterra dari dua spesies *predator* yang berkompetisi untuk berbagi satu spesies *prey*. Upaya memperlihatkan dinamika model yang dibahas adalah melalui analisis titik tetap dan kestabilan sistem. Simulasi numerik telah mengilustrasikan bahwa ketiga spesies dapat hidup berdampingan, ketika nilai konversi efisiensi untuk dua *predator* mendekati satu sama lain.

**Kata kunci:** model Lotka-Volterra, dua *predator* dan satu *prey*, titik tetap, kestabilan.

**ANALISIS KESTABILAN DAN PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN  
LOTKA-VOLTERRA DUA *PREDATOR* DAN SATU *PREY* DENGAN  
MENGUNAKAN METODE RUNGE KUTTA ORDE 5**

Oleh

*Thalia Regina*

Skripsi

Sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar  
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS LAMPUNG  
BANDAR LAMPUNG  
2019**

**Judul Skripsi** : **ANALISIS KESTABILAN DAN PENYELESAIAN  
SISTEM PERSAMAAN LOTKA-VOLTERRA DUA  
PREDATOR DAN SATU PREY DENGAN  
MENGUNAKAN METODE RUNGE KUTTA  
ORDE 5**

**Nama Mahasiswa** : **Thalia Regina**

**No. Pokok Mahasiswa** : 1517031111

**Jurusan** : Matematika

**Fakultas** : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



**Dr. La Zakaria, S.Si., M.Sc.**  
NIP 19690213 199402 1 001

**Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.**  
NIP 19700831 199903 1 002

2. Ketua Jurusan Matematika

**Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.**  
NIP 19631108 198902 2 001

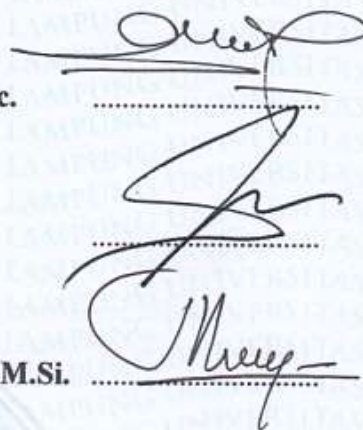
**MENGESAHKAN**

**1. Tim Penguji**

**Ketua : Dr. La Zakaria, S.Si., M.Sc.**

**Sekretaris : Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.**

**Penguji  
Bukan Pembimbing : Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.**



**2. a.n. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Wakil Dekan Bidang Akademik dan Kerjasama**



**Prof. Sutopo Hadi, M.Sc., Ph.D.**  
**NIP. 19710415 199512 1 001**

**Tanggal Lulus Ujian Skripsi : 01 Februari 2019**



## SURAT PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Thalia Regina

Nomor Pokok Mahasiswa : 1517031111

Judul : Analisis Kestabilan dan Penyelesaian Sistem  
Persamaan Lotka-Volterra Dua *Predator* dan Satu  
*Prey* dengan Menggunakan Metode Runge Kutta  
Orde 5

Jurusan : Matematika

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri, bukan hasil orang lain, dan semua hasil tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 22 Februari 2019



Penulis

*Thalia Regina*  
Thalia Regina  
NPM. 1517031111

## **RIWAYAT HIDUP**

Penulis bernama lengkap Thalia Regina, anak pertama dari dua bersaudara yang dilahirkan di Bandar Lampung pada tanggal 16 September 1997 oleh pasangan Bapak Nursiwan dan Ibu Lilis Suryani. Penulis memiliki satu orang adik perempuan bernama Olivia Pratiwi.

Penulis menyelesaikan pendidikan taman kanak-kanak di TK Melati Puspa Tanjung Seneng Bandar Lampung pada tahun 2003. Pendidikan sekolah dasar di SD Negeri 1 Perumnas Way Halim pada tahun 2009. Pendidikan sekolah menengah pertama di SMP Negeri 22 Bandar Lampung pada tahun 2012. Pendidikan sekolah menengah atas di SMA Negeri 9 Bandar Lampung pada tahun 2015.

Penulis melanjutkan pendidikan di perguruan tinggi dan terdaftar sebagai mahasiswi S1 Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung pada tahun 2015 melalui jalur SBMPTN. Pada periode 2015/2016 penulis terdaftar sebagai anggota GEMATIKA Himpunan Mahasiswa Matematika FMIPA Unila. Penulis pernah menjadi anggota bidang Eksternal Himpunan Mahasiswa Matematika Tahun 2016.



Sebagai bentuk penerapan ilmu perkuliahan, penulis telah melaksanakan Kerja Praktik (KP) selama 40 hari di Perum BULOG Divisi Regional Lampung pada tahun 2018. Dan pada tahun yang sama, sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat, penulis telah melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) selama 32 hari di Desa Catur Swako, Kecamatan Bumi Agung, Kabupaten Lampung Timur.

## *Kata Inspirasi*

*“With every difficulty there is relief”  
(Quran 94:5)*

*“But perhaps you hate a thing and it is good for you and perhaps you love  
a thing and it is bad for you and Allah knows while you know not”  
(Quran 2:216)*

*“Indeed, Allah will not change the condition of a people until they change  
what is in themselves”  
(Quran 13:11)*

*“The best of people are those that bring most benefit to the rest of  
mankind”  
(H.R. Thabrani)*

*“If Allah wants to do good to somebody, He afflicts him with trials”  
(Sahih Al-Bukhari)*

## **PERSEMBAHAN**

Alhamdulillah Wasyukurillah

Puji dan syukur tiada hentinya kepada Allah Subhanahu Wata'ala atas segala nikmat dan karunia-Nya, dan suri tauladan Nabi Muhammad Shallallahu 'Alaihi Wasallam yang menjadi contoh dan panutan untuk kita semua.

Penulis persembahkan sebuah karya sederhana ini untuk:

### **Ayahanda Nursiwan dan Ibunda Lilis Suryani**

Terimakasih atas limpahan kasih sayang, pengorbanan, doa, dan seluruh motivasi di setiap langkah penulis. Karena atas doa dan ridho kalian, Allah memudahkan setiap perjalanan hidup ini.

### **Adik Olivia Pratiwi**

Terimakasih telah menjadi pendengar selama penulis mencurahkan keluh kesah dan mendoakan setiap waktu untuk keberhasilan penulis.

**Almamater Tercinta Universitas Lampung**

## SANWACANA

*Alhamdulillah* rabbi'l'alaamiin, puji dan syukur penulis kepada Allah SWT atas izin serta ridho-Nya dalam menyelesaikan skripsi yang berjudul “**Analisis Kestabilan dan Penyelesaian Sistem Persamaan Lotka-Volterra Dua Predator Satu Prey dengan Menggunakan Metode Runge Kutta Orde 5**”. Shalawat serta salam kepada Nabi Muhammad SAW yang telah menjadi suri tauladan yang baik sepanjang masa.

Terselesaikannya skripsi ini tidak terlepas dari bantuan, kejasama, dan dukungan berbagai pihak. Untuk itu, penulis ingin mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Dr. La Zakaria, S.Si., M.Sc. selaku Dosen Pembimbing I, yang senantiasa membimbing dan memberikan arahan, ide, kritik, dan saran serta semangat kepada penulis selama proses pembuatan skripsi ini.
2. Bapak Agus Sutrisno, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing II, yang telah membimbing, memberi masukan, dan mengarahkan penulis selama proses penyusunan skripsi ini.
3. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembahas, yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun kepada penulis selama proses penyelesaian skripsi ini.

4. Ibu Dian Kurniasari, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing Akademik yang telah memberikan pengarahan selama masa perkuliahan.
5. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, MA., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.
6. Bapak Prof. Sutopo Hadi, M.Sc., Ph.D. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Seluruh dosen, staf, dan karyawan Jurusan Matematika FMIPA UNILA yang telah memberikan ilmu pengetahuan dan segala bentuk bantuan kepada penulis.
8. Ibunda Lilis, Ayahanda Nursiwan, Adik Olivia, dan keluarga yang tak pernah berhenti memberi semangat, doa, dorongan, kasih sayang, dan nasihat untuk selalu berjuang setiap harinya.
9. Sahabat-sahabat penulis Rani, Nurah, Anggun, Tirania, Fathur, dan Edwin yang senantiasa menemani suka duka penulis.
10. Teman-teman penulis Natasha, Anita, Moni, Intan, Cintya, Pipin, Resti, Dinda, Rahma, Sekar, dan Indraswari yang telah memberikan warna dan keceriaan di masa perkuliahan penulis.
11. Seluruh pihak yang telah membantu penulis yang tidak dapat disebutkan satu persatu atas peran dan dukungannya dalam menyusun skripsi ini.

Bandar Lampung, Januari 2019

Penulis

**Thalia Regina**

## DAFTAR ISI

	Halaman
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	iii
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	iv
<b>I. PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang dan Masalah.....	1
1.2 Tujuan Penelitian .....	3
1.3 Manfaat Penelitian .....	4
<b>II. TINJAUAN PUSTAKA</b>	
2.1 Sistem Persamaan Diferensial.....	5
2.2 Sistem Persamaan Diferensial Biasa Linier dan Non Linier .....	6
2.3 Sistem <i>Autonomous</i> .....	8
2.4 Titik Kesetimbangan dan Kestabilan Sistem .....	8
2.5 Linierisasi Sistem.....	9
2.6 Kriteria Routh Hurwitz .....	12
2.7 Metode Runge Kutta Orde 5 .....	12
2.8 Sistem Persamaan Lotka-Volterra .....	18
2.9 Model Persamaan Lotka-Volterra Dua <i>Predator</i> Satu <i>Prey</i> .....	21
<b>III. METODOLOGI PENELITIAN</b>	
3.1 Waktu dan Tempat Penelitian.....	29
3.2 Metode Penelitian .....	29
<b>IV. HASIL DAN PEMBAHASAN</b>	
4.1 Titik Kesetimbangan Sistem.....	31

4.1.1 Titik Setimbang Kepunahan .....	31
4.1.2 Titik Setimbang Kepunahan <i>Predator y</i> dan <i>Predator z</i> ....	32
4.1.3 Titik Setimbang Kepunahan <i>Predator z</i> .....	32
4.1.4 Titik Setimbang Kepunahan <i>Predator y</i> .....	35
4.1.5 Titik Setimbang Koeksistensi.....	38
4.2 Analisis Kestabilan .....	40
4.2.1 Kestabilan Titik Setimbang Kepunahan ( $E_0$ ) .....	42
4.2.2 Kestabilan Titik Setimbang <i>Predator y</i> dan <i>Predator z</i> ( $E_1$ ) .....	43
4.2.3 Kestabilan Titik Setimbang <i>Predator z</i> ( $E_2$ ).....	45
4.2.4 Kestabilan Titik Setimbang <i>Predator y</i> ( $E_3$ ).....	50
4.2.5 Kestabilan Titik Setimbang Koeksistensi ( $E_4$ ).....	55
4.3 Simulasi Numerik .....	60
<b>V. KESIMPULAN</b>	
5.1 Kesimpulan .....	76
5.2 Saran .....	77

## **DAFTAR PUSTAKA**



## DAFTAR TABEL

Tabel	Halaman
1. Tabel Butcher untuk Runge Kutta orde- $n$ .....	13
2. Tabel Butcher untuk Runger Kutta orde 5.....	15
3. Nilai parameter persamaan Lotka-Volterra dua <i>predator</i> satu <i>prey</i> dan titik kesetimbangan koeksistensi.....	38
4. Nilai parameter model persamaan Lotka-Volterra dua <i>predator</i> satu <i>Prey</i> .....	57
5. Nilai parameter dan nilai awal sistem persamaan (4.9).....	60

## DAFTAR GAMBAR

Gambar	Halaman
1. Fase potret tidak stabil ( <i>saddle</i> ) titik setimbang $E_2 = (\tilde{x}, \tilde{y}, 0)$ .....	48
2. Fase potret <i>saddle</i> titik setimbang $E_2 = (\tilde{x}, \tilde{y}, 0)$ .....	49
3. Fase potret stabil asimtotik titik setimbang $E_2 = (\tilde{x}, \tilde{y}, 0)$ .....	50
4. Fase potret tidak stabil ( <i>saddle</i> ) titik setimbang $E_3 = (\hat{x}, 0, \hat{z})$ .....	53
5. Fase potret <i>saddle</i> titik setimbang $E_3 = (\hat{x}, 0, \hat{z})$ .....	54
6. Fase potret stabil asimtotik titik setimbang $E_3 = (\hat{x}, 0, \hat{z})$ .....	55
7. Fase potret stabil asimtotik pada titik setimbang $E_4 = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ .....	58
8. Fase potret tidak stabil ( <i>saddle</i> ) pada titik setimbang $E_4 = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ...	59
9. Fase potret <i>saddle</i> pada titik setimbang $E_4 = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ .....	60
10. Dinamika populasi populasi <i>prey</i> , <i>predator y</i> , dan <i>predator z</i> pada $\sigma_1 = 0.8$ dan $\sigma_2 = 0.79$ .....	62
11. Populasi <i>predator y</i> dan <i>predator z</i> pada $\sigma_1 = 0.8$ dan $\sigma_2 = 0.79$ .....	64
12. Dinamika populasi populasi <i>prey</i> , <i>predator y</i> , dan <i>predator z</i> pada $\sigma_1 = 1.8$ dan $\sigma_2 = 0.79$ .....	65
13. Populasi <i>predator y</i> dan <i>predator z</i> pada $\sigma_1 = 1.8$ dan $\sigma_2 = 0.79$ .....	66
14. Dinamika populasi populasi <i>prey</i> , <i>predator y</i> , dan <i>predator z</i> pada $\sigma_1 = 0.45$ dan $\sigma_2 = 0.79$ .....	67
15. Populasi <i>predator y</i> dan <i>predator z</i> pada $\sigma_1 = 0.45$ dan $\sigma_2 = 0.79$ ..	68
16. Dinamika populasi populasi <i>prey</i> , <i>predator y</i> , dan <i>predator z</i> pada $\sigma_1 = 0.68$ dan $\sigma_2 = 0.72$ .....	69

17. Populasi <i>predator y</i> dan <i>predator z</i> pada $\sigma_1 = 0.68$ dan $\sigma_2 = 0.72$ ..	70
18. Dinamika populasi populasi <i>prey</i> , <i>predator y</i> , dan <i>predator z</i> pada $\sigma_1 = 0.68$ dan $\sigma_2 = 1.45$ .....	71
19. Populasi <i>predator y</i> dan <i>predator z</i> pada $\sigma_1 = 0.68$ dan $\sigma_2 = 1.45$ ..	72
20. Dinamika populasi populasi <i>prey</i> , <i>predator y</i> , dan <i>predator z</i> pada $\sigma_1 = 0.68$ dan $\sigma_2 = 0.45$ .....	73
21. Populasi <i>predator y</i> dan <i>predator z</i> pada $\sigma_1 = 0.68$ dan $\sigma_2 = 0.45$ ..	74

## I. PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang dan Masalah

Setiap makhluk hidup dituntut untuk senantiasa berinteraksi dengan makhluk hidup lainnya. Interaksi yang terjadi antara individu dalam satu spesies atau interaksi antara individu dengan spesies yang berbeda dapat berdampak positif bagi keduanya, berdampak negatif bagi keduanya maupun berdampak negatif bagi salah satu spesies dan positif bagi spesies yang lain. Jika berdampak positif bagi keduanya, interaksi keduanya disebut simbiosis mutualisme. Jika berdampak negatif bagi keduanya disebut persaingan, dan jika berdampak positif bagi spesies yang satu sedangkan bagi spesies yang lainnya negatif maka interaksi tersebut disebut dengan mangsa-pemangsa (*prey-predator*).

Model matematika yang sering digunakan untuk menjelaskan fenomena-fenomena interaksi antar spesies yang hidup pada suatu ekosistem yang disebut dengan model Lotka-Volterra. Model Lotka-Volterra yang sering diteliti diantaranya adalah model interaksi antara *predator* (pemangsa) dan *prey* (mangsa). Model Lotka-Volterra pertama kali dikenalkan oleh Lotka pada tahun 1925 dan Volterra pada tahun 1926. Penelitian Lotka-Volterra menghasilkan model sederhana pemangsaan atau interaksi antar dua spesies dalam suatu ekosistem dan selanjutnya juga

mengenalkan model Lotka-Volterra klasik yang akhir-akhir ini banyak dikembangkan oleh para peneliti.

Pada penelitian ini akan dibahas model Lotka-Volterra tiga spesies pada suatu jaring-jaring makanan yang terdiri dari *prey*, *predator* satu, dan *predator* dua. *Prey* adalah spesies yang dimangsa oleh *predator* satu dan *predator* dua, sedangkan *predator* satu dan *predator* dua adalah spesies yang memangsa *prey*. Adanya persaingan dari dua *predator* menyebabkan sistem yang diperoleh menjadi lebih kompleks. Dengan menggunakan fungsi respon yang berbeda untuk kedua *predator* dalam sistem tersebut memberikan perubahan signifikan terhadap perilaku solusi interaksi di antara ketiga spesies tersebut. Oleh karena itu penelitian ini akan membahas titik kesetimbangan dan kestabilan sistem Lotka-Volterra dua *predator* satu *prey* yang akan berpengaruh terhadap kestabilan sistem.

Dalam penerapannya model Lotka-Volterra muncul dalam bentuk sistem persamaan diferensial. Penyelesaian model tersebut tidak dapat diselesaikan secara analitik atau tidak mempunyai solusi eksak namun dapat diselesaikan secara numerik (solusi aproksimasi atau hampiran). Sehingga dapat dikatakan bahwa metode numerik merupakan alternatif dari metode analitik.

Ada berbagai macam metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan model Lotka-Volterra, salah satunya adalah dengan metode Runge Kutta. Penelitian terhadap penyelesaian sistem persamaan Lotka-Volterra telah dilakukan oleh para peneliti diantaranya “Penyelesaian Numerik Persamaan Lotka-Volterra

dengan Menggunakan Metode Runge Kutta Berorde 4” yang telah dilakukan oleh (Aisyah, 2006), “Penyelesaian Numerik Persamaan *Competitive* Lotka-Volterra dengan Menggunakan Metode Runge Kutta Orde 4” yang telah dilakukan oleh (Bidayasari, 2009), “Penyelesaian Numerik Sistem Persamaan Diferensial Lotka-Volterra dengan Metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45) dan Metode Heun” yang telah dilakukan oleh (Urifah, 2008), “Penyelesaian Sistem Persamaan Lotka-Volterra dengan Menggunakan Metode Runge-Kutta Orde Lima” yang telah dilakukan oleh (Darmiyanti, 2013), dan “Penyelesaian Numerik Model *Predator-Prey* Tiga Spesies Menggunakan Metode Runge Kutta Orde 4” yang telah dilakukan oleh (Syauqi, 2016). Sehingga penulis merasa tertarik untuk mengetahui kestabilan dan penyelesaian model Lotka-Volterra dua *predator* satu *prey* dengan metode Runge Kutta orde 5.

## 1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah menganalisis stabilitas dan mendapatkan penyelesaian numerik dengan metode Runge-Kutta orde 5 untuk mendapatkan nilai hampiran dari sistem persamaan Lotka-Volterra dua *predator* satu *prey* menggunakan *software* Mathematica.

### 1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah sebagai referensi dalam mengkaji permasalahan atau fenomena alam yang terjadi menggunakan model matematika dan sebagai sarana informasi tentang analisis stabilitas dan penyelesaian numerik sistem persamaan Lotka-Volterra *dua* predator dan satu *prey*.



## II. TINJAUAN PUSTAKA

### 2.1 Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial adalah suatu persamaan diferensial yang memuat  $n$  buah fungsi yang tidak diketahui. Sistem persamaan diferensial bisa muncul secara alamiah dalam masalah yang melibatkan beberapa variabel bebas (misalnya  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ) yang masing-masing darinya merupakan sebuah fungsi dari satu variabel terikat (misalnya  $t$ ) (Kartono, 2012).

Bentuk umum dari suatu sistem  $n$  persamaan diferensial orde pertama mempunyai bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t)\end{aligned}\tag{2.1}$$

dengan  $x_1, x_2, \dots, x_n$  adalah variabel bebas dan  $t$  adalah variabel terikat, sehingga  $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$ , yang mana  $\frac{dx_n}{dt}$  merupakan derivatif fungsi  $x_n$  terhadap  $t$  (Neuhauser, 2004).

## 2.2 Sistem Persamaan Diferensial Biasa Linier dan Non Linier

$F(x, y, y', y'', y''', \dots, y^n) = 0$  dikatakan linier jika  $F$  adalah linier dan variabel-variabelnya adalah  $x, y, y', y'', y''', \dots, y^n$ . Secara umum persamaan diferensial biasa linier dapat diberikan sebagai berikut:

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (2.2)$$

Menurut Baiduri (2012), persamaan (2.2) merupakan persamaan diferensial linier orde- $n$  jika:

- a) Tidak mengandung bentuk perkalian antara sebuah variabel terikat dengan variabel terikat lainnya, atau turunan yang satu dengan turunan lainnya, atau variabel terikat dengan sebuah turunan.
- b) Variabel terikat  $y$  bukan merupakan fungsi transenden.

Dimisalkan bahwa koefisien-koefisien  $a_n(x), a_{n-1}(x), \dots, a_0(x)$  dan dan fungsi  $f(x)$  merupakan fungsi-fungsi yang kontinu pada suatu selang  $I$ . Jika fungsi  $f(x) = 0$  maka persamaan (2.2) disebut persamaan homogen. Jika fungsi  $f(x) \neq 0$  maka persamaan (2.2) disebut persamaan non-homogen atau tak homogen. Bila semua koefisien  $a_n(x), a_{n-1}(x), \dots, a_0(x)$  adalah suatu konstanta, maka persamaan (2.2) disebut persamaan linier koefisien konstanta, jika semua variabelnya berupa fungsi maka disebut persamaan linier koefisien variabel.

Sistem persamaan diferensial linier adalah suatu sistem yang memuat  $n$  persamaan diferensial dengan  $n$  fungsi yang tidak diketahui, yang mana  $n$  merupakan bilangan

bulat positif yang lebih besar sama dengan 2. Bentuk umum dari suatu sistem persamaan diferensial linier orde satu dengan  $n$  fungsi yang tidak diketahui adalah:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Dengan koefisien  $a_{11}, \dots, a_{nn}$  dan fungsi  $f_1, \dots, f_n$ ; semua merupakan fungsi  $t$  yang kontinu pada suatu selang  $I$  dan  $x_1, \dots, x_n$  adalah fungsi  $t$  yang tidak diketahui. Sedangkan titik diatas  $x_1, \dots, x_n$  menyatakan turunan menurut peubah bebas  $t$  (Finizio & Ladas, 1988).

Sedangkan sistem persamaan diferensial non linier adalah sistem persamaan yang terdiri dari  $n$  buah persamaan diferensial non linier dengan  $n$  buah fungsi tak diketahui. Sistem ini disebut juga *sistem non linier*.

Sistem persamaan diferensial dinyatakan sebagai

$$\dot{x} = F(t, x) \quad (2.4)$$

dengan

$$x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, F(t, x) = \begin{pmatrix} F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

Jika  $F(t, x)$  fungsi tak linier pada  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , maka sistem ini disebut sebagai sistem persamaan diferensial non linier dan jika  $F$  linier maka sistem persamaan diferensial (2.4) disebut persamaan diferensial linier (Farlow, 1994).

Dari tipe-tipe persamaan diferensial linier, hanya beberapa tipe yang dapat diselesaikan secara eksplisit, seperti persamaan diferensial homogen dan persamaan diferensial eksak. Demikian juga untuk sistem persamaan diferensial non linier. Di sisi lain, jika dibandingkan antara linier dan non linier, maka model matematis yang digambarkan dengan sistem non linierlah yang banyak menggambarkan keadaan yang lebih mendekati kenyataan (Boyce & Diprima, 2009).

### 2.3 Sistem *Autonomous*

Suatu sistem persamaan diferensial yang berbentuk

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{\lambda}) \quad (2.5)$$

dengan

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}, \lambda) \\ f_2(\vec{x}, \lambda) \\ \vdots \\ f_n(\vec{x}, \lambda) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

dimana fungsi-fungsi  $f$  tidak bergantung secara eksplisit pada variabel  $t$ , disebut sistem *autonomous* (Finizio & Ladas, 1988).

### 2.4 Titik Keseimbangan dan Kestabilan Sistem

Titik keseimbangan dari sistem merupakan titik dimana sistem tersebut tidak mengalami perubahan sepanjang waktu (Panfilov, 2004). Titik ( $\vec{x}^*$ ) disebut titik keseimbangan pada sistem (2.5) jika

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}^*) = 0$$

Selanjutnya, untuk mengetahui perilaku sistem di sekitar titik kesetimbangan digunakan konsep kestabilan.

Titik kesetimbangan ( $\vec{x}^*$ ) disebut stabil jika untuk setiap bilangan  $\varepsilon > 0$  terdapat  $\delta > 0$  sedemikian sehingga setiap penyelesaian  $\vec{x}(t)$  pada  $t = 0$  memenuhi

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta$$

berlaku

$$\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \varepsilon$$

untuk setiap  $t \geq 0$ . Semua titik kesetimbangan ( $\vec{x}^*$ ) dikatakan tak stabil jika titik tersebut tak stabil. Titik kesetimbangan ( $\vec{x}^*$ ) disebut stabil asimtotis jika titik tersebut stabil dan terdapat  $\delta_0$  sedemikian sehingga setiap penyelesaian  $\vec{x}(t)$  yang pada  $t = 0$  memenuhi

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta_0$$

berlaku untuk semua  $t \geq 0$  dan memenuhi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = \vec{x}^*$$

(Finizio & Ladas, 1988).

## 2.5 Linierisasi Sistem

Definisi stabil dan tidak stabil terlalu sulit digunakan untuk menentukan kestabilan suatu sistem yang tak linier. Salah satu metode yang dapat digunakan adalah melalui pendekatan analisis bentuk linierisasinya. Fungsi pada persamaan (2.5) dihipotesiskan dengan menggunakan ekspansi deret Taylor di sekitar titik kesetimbangan

$$\vec{f}(\dot{\vec{x}}) \approx \vec{f}(\vec{x}^*) + \frac{\partial \vec{f}(\vec{x}^*)}{\partial \vec{x}} (\vec{x} - \vec{x}^*)$$

Karena  $\vec{x}^*$  adalah titik kesetimbangan maka

$$\vec{f}(\vec{x}^*) = 0$$

Oleh karena itu, sistem persamaan (2.5) dapat dihamperi sebagai sistem linier

$$\frac{d\vec{x}}{dt} \approx \frac{\partial \vec{f}(\vec{x}^*)}{\partial \vec{x}} (\vec{x} - \vec{x}^*) \quad (2.6)$$

Sistem linier (2.6) dapat diberikan dalam bentuk matriks

$$\frac{\partial \vec{f}(\vec{x}^*)}{\partial \vec{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_1^*)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x_1^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x_n^*)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x_n^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix} = J(x^*)$$

karena  $\dot{\vec{x}} = (\vec{x} - \vec{x}^*)$  maka tulis  $(\vec{x} - \vec{x}^*) = h$  sehingga persamaan (2.6) menjadi

$$\dot{h} = J(x^*) h$$

$$\dot{h} = A h \quad (2.7)$$

dengan  $A = J(x^*)$ . Matriks  $J(x^*)$  di atas disebut dengan matriks Jacobian (Khamsi, 2004).

Misalkan nilai eigen matriks Jacobian  $J(x^*)$  adalah  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , dengan vektor eigen yang bersesuaian  $\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \dots \quad \vec{v}_n$ . Dengan menggunakan transformasi

$h = P U$ , dimana  $P = [\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \dots \quad \vec{v}_n]$  maka persamaan (2.7)

$$P \dot{U} = A P U \quad (2.8)$$

Dalam hal  $P$  memiliki invers dan mendiagonal maka persamaan (2.8) menjadi

$$\begin{aligned}\dot{U} &= P^{-1} A P U \\ \dot{U} &= D U\end{aligned}\tag{2.9}$$

dengan  $D$  adalah matriks diagonal

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

solusi umum dari persamaan (2.9)

$$U_i = c_i e^{\lambda_i t}$$

sehingga penyelesaian umum dari persamaan  $\dot{h} = P U$  adalah

$$\begin{aligned}\vec{h}(t) &= P U \\ &= [\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \cdots \quad \vec{v}_n] \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \\ &= c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} \vec{v}_n\end{aligned}$$

dengan  $\lambda_i$  adalah nilai eigen,  $c_i$  adalah konstanta, dan  $\vec{v}_i$  adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan  $\lambda_i$  untuk setiap  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Kriteria kestabilan dari persamaan (2.7) dapat ditentukan dengan mencari nilai eigen dari matriks  $J(x)$ . Dalam hal nilai eigen riil dan berbeda semua maka semua sistem akan stabil asimtotis jika nilai eigen matriks Jacobian  $J(x)$  berupa bilangan riil negatif. Jika semua nilai eigen berupa bilangan riil positif maka sistem akan tidak stabil. Kemudian jika salah satu nilai eigen bernilai negatif dan yang lain bernilai positif maka sistem tersebut dikatakan *saddle* (dan tidak stabil) (Hurewicz, 1961).



## 2.6 Kriteria Routh Hurwitz

Misalkan suatu sistem linier mempunyai persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad (2.10)$$

Dengan menggunakan koefisien-koefisien persamaan karakteristik (2.10) dibentuk matriks *Hurwitz* ( $H_n$ ) sebagai berikut:

$$H_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{2n-3} & a_{2n-4} & a_{2n-5} & a_{2n-6} & \dots & a_{n-2} \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

dengan  $a_j = \begin{cases} a_j, & j \leq n \\ 0, & j > n \end{cases}$ .

Akar-akar dari persamaan karakteristik (2.10) bernilai negatif atau mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika semua determinan dari matriks *Hurwitz* bernilai positif atau  $\det(H_j) > 0, j = 1, 2, \dots, n$  (Merkin, 1997).

## 2.7 Metode Runge Kutta Orde 5

Penyelesaian Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dengan metode deret Taylor tidak praktis, karena metode tersebut membutuhkan perhitungan turunan  $f(x, y)$ . Di samping itu, tidak semua fungsi mudah dihitung turunannya, terutama bagi fungsi yang bentuknya rumit. Semakin tinggi orde metode deret Taylor, maka semakin tinggi turunan fungsi yang harus dihitung. Selain itu, untuk mendapatkan hasil yang lebih teliti diperlukan  $\Delta x$  atau  $h$  yang kecil, padahal penggunaan  $\Delta x$  yang kecil

menyebabkan waktu hitungan yang lebih panjang. Oleh karena itu, metode Runge Kutta merupakan alternatif dari metode deret Taylor yang memberikan ketelitian hasil yang lebih besar dan tidak memerlukan turunan fungsi.

Bentuk umum metode Runge Kutta orde- $n$  adalah:

$$y_{n+1} = y_n + w_1 k_1 + w_2 k_2 + w_3 k_3 + \dots + w_n k_n \quad (2.11)$$

dengan  $w_1, w_2, \dots, w_n$  adalah konstanta, dan

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + hc_2, y_n + a_{21}k_1)$$

$$k_3 = hf(x_n + hc_3, y_n + a_{31}k_1 + a_{32}k_2)$$

$$k_4 = hf(x_n + hc_4, y_n + a_{41}k_1 + a_{42}k_2 + a_{43}k_3)$$

⋮

$$k_n = hf(x_n + hc_n, y_n + a_{n,1}k_1 + a_{n,2}k_2 + \dots + a_{n,n}k_{n-1}).$$

Metode Runge Kutta orde-  $n$  langkah dapat ditunjukkan kedalam sebuah tabel yang dikenal sebagai Tabel Butcher (Munir, 2010).

Tabel 1. Tabel Butcher untuk Runge Kutta orde- $n$

$c_2$	$a_{21}$			
$c_3$	$a_{31}$	$a_{32}$		
$c_4$	$a_{41}$	$a_{42}$	$a_{43}$	
⋮	⋮	⋮	⋮	
$c_n$	$a_{n,1}$	⋯	$a_{n,n-1}$	$a_{n,n}$
	$w_1$	$w_2$	$w_3$	⋯ $w_n$

Tabel Butcher ini berbentuk matriks segitiga bawah, tabel ini menunjukkan hasil aproksimasi sama dengan bentuk berikut:

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{i=1}^n w_i k_i$$

dengan

$$k_i = h f(x_i + h c_i, \sum_{j=1}^n a_{i,j} k_j)$$

Bentuk umum dari persamaan metode Runge Kutta orde 5 dengan enam langkah:

$$y_{n+1} = y_n + w_1 k_1 + w_2 k_2 + w_3 k_3 + w_4 k_4 + w_5 k_5 + w_6 k_6 \quad (2.12)$$

dengan

$$k_1 = h f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h f(x_n + c_2 h, y_n + a_{21} k_1)$$

$$k_3 = h f(x_n + c_3 h, y_n + a_{31} k_1 + a_{32} k_2)$$

$$k_4 = h f(x_n + c_4 h, y_n + a_{41} k_1 + a_{42} k_2 + a_{43} k_3)$$

$$k_5 = h f(x_n + c_5 h, y_n + a_{51} k_1 + a_{52} k_2 + a_{53} k_3 + a_{54} k_4)$$

$$k_6 = h f(x_n + c_6 h, y_n + a_{61} k_1 + a_{62} k_2 + a_{63} k_2 + a_{64} k_2 + a_{65} k_5)$$

Menurut Chapra dan Canale (2013) untuk mendapatkan nilai parameter  $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, a_{21}, a_{31}, a_{32}, a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{51}, a_{52}, a_{53}, a_{54}, a_{61}, a_{62}, a_{63}, a_{64}, a_{65}$  adalah dengan cara menguraikan  $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5$ , dan  $k_6$  kedalam deret Taylor dua variabel sehingga akan diperoleh rumus Runge Kutta orde 5 sebagai berikut:

$$y_{n+1} = y_n + \left(\frac{7}{90} k_1 + \frac{32}{90} k_3 + \frac{12}{90} k_4 + \frac{32}{90} k_5 + \frac{7}{90} k_6\right) \quad (2.13)$$

dengan

$$x_{n+1} = x_n + h$$

$$k_1 = h f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h f\left(x_n + \frac{1}{4}h, y_n + \frac{1}{4}k_1\right)$$

$$k_3 = h f\left(x_n + \frac{1}{4}h, y_n + \frac{1}{8}k_1 + \frac{1}{8}k_2\right)$$

$$k_4 = h f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n - \frac{1}{2}k_2 + k_3\right)$$

$$k_5 = h f\left(x_n + \frac{3}{4}h, y_n + \frac{3}{16}k_1 + \frac{9}{16}k_4\right)$$

$$k_6 = h f\left(x_n + h, y_n - \frac{3}{7}k_1 + \frac{2}{7}k_2 + \frac{12}{7}k_3 - \frac{12}{7}k_4 + \frac{8}{7}k_5\right)$$

Metode Runge Kutta orde 5 dapat dimasukkan kedalam tabel Butcher sebagai berikut:

Tabel 2. Tabel Butcher untuk Runge Kutta orde 5

0						
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$					
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$				
$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1			
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{16}$	0	0	$\frac{9}{16}$		
1	$-\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{12}{7}$	$-\frac{12}{7}$	$\frac{8}{7}$	
	$\frac{7}{90}$	0	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$

Menurut Hossain dkk (2017) penerapan metode Runge Kutta orde 5 persamaan (2.13) pada sistem tiga persamaan diferensial dari bentuk umum persamaan:

$$\frac{dx}{dt} = P(t, x, y, z) \quad (2.14)$$

$$\frac{dy}{dt} = Q(t, x, y, z) \quad (2.15)$$

$$\frac{dz}{dt} = R(t, x, y, z) \quad (2.16)$$

dengan syarat awal  $x(t_0) = x_0$ ,  $y(t_0) = y_0$ , dan  $z(t_0) = z_0$ , maka Runge Kutta orde 5 akan menjadi:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{90} (7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6) \quad (2.17)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{90} (7l_1 + 32l_3 + 12l_4 + 32l_5 + 7l_6) \quad (2.18)$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{90} (7m_1 + 32m_3 + 12m_4 + 32m_5 + 7m_6) \quad (2.19)$$

dengan,

$$k_1 = P(t_n, x_n, y_n, z_n)$$

$$l_1 = Q(t_n, x_n, y_n, z_n)$$

$$m_1 = R(t_n, x_n, y_n, z_n)$$

$$k_2 = P\left(t_n + \frac{1}{4}h, x_n + \frac{1}{4}k_1h, y_n + \frac{1}{4}l_1h, z_n + \frac{1}{4}m_1h\right)$$

$$l_2 = Q\left(t_n + \frac{1}{4}h, x_n + \frac{1}{4}k_1h, y_n + \frac{1}{4}l_1h, z_n + \frac{1}{4}m_1h\right)$$

$$m_2 = R\left(t_n + \frac{1}{4}h, x_n + \frac{1}{4}k_1h, y_n + \frac{1}{4}l_1h, z_n + \frac{1}{4}m_1h\right)$$

$$k_3 = P\left(t_n + \frac{1}{4}h, x_n + \frac{1}{8}k_1h + \frac{1}{8}k_2h, y_n + \frac{1}{8}l_1h + \frac{1}{8}l_2h, z_n + \frac{1}{8}m_1h + \frac{1}{8}m_2h\right)$$

$$l_3 = Q\left(t_n + \frac{1}{4}h, x_n + \frac{1}{8}k_1h + \frac{1}{8}k_2h, y_n + \frac{1}{8}l_1h + \frac{1}{8}l_2h, z_n + \frac{1}{8}m_1h + \frac{1}{8}m_2h\right)$$

$$m_3 = R\left(t_n + \frac{1}{4}h, x_n + \frac{1}{8}k_1h + \frac{1}{8}k_2h, y_n + \frac{1}{8}l_1h + \frac{1}{8}l_2h, z_n + \frac{1}{8}m_1h + \frac{1}{8}m_2h\right)$$

$$k_4 = P \left( t_n + \frac{1}{2}h, x_n - \frac{1}{2}k_2h + k_3h, y_n - \frac{1}{2}l_2h + l_3h, z_n - \frac{1}{2}m_2h + m_3h \right)$$

$$l_4 = Q \left( t_n + \frac{1}{2}h, x_n - \frac{1}{2}k_2h + k_3h, y_n - \frac{1}{2}l_2h + l_3h, z_n - \frac{1}{2}m_2h + m_3h \right)$$

$$m_4 = R \left( t_n + \frac{1}{2}h, x_n - \frac{1}{2}k_2h + k_3h, y_n - \frac{1}{2}l_2h + l_3h, z_n - \frac{1}{2}m_2h + m_3h \right)$$

$$k_5 = P \left( t_n + \frac{3}{4}h, x_n + \frac{3}{16}k_1h + \frac{9}{16}k_4h, y_n + \frac{3}{16}l_1h + \frac{9}{16}l_4h, z_n + \frac{3}{16}m_1h + \frac{9}{16}m_4h \right)$$

$$l_5 = Q \left( t_n + \frac{3}{4}h, x_n + \frac{3}{16}k_1h + \frac{9}{16}k_4h, y_n + \frac{3}{16}l_1h + \frac{9}{16}l_4h, z_n + \frac{3}{16}m_1h + \frac{9}{16}m_4h \right)$$

$$m_5 = R \left( t_n + \frac{3}{4}h, x_n + \frac{3}{16}k_1h + \frac{9}{16}k_4h, y_n + \frac{3}{16}l_1h + \frac{9}{16}l_4h, z_n + \frac{3}{16}m_1h + \frac{9}{16}m_4h \right)$$

$$k_6 = P \left( t_n + h, x_n - \frac{3}{7}k_1 + \frac{2}{7}k_2 + \frac{12}{7}k_3 - \frac{12}{7}k_4 + \frac{8}{7}k_5, y_n - \frac{3}{7}l_1 + \frac{2}{7}l_2 + \frac{12}{7}l_3 - \frac{12}{7}l_4 + \frac{8}{7}l_5, z_n - \frac{3}{7}m_1 + \frac{2}{7}m_2 + \frac{12}{7}m_3 - \frac{12}{7}m_4 + \frac{8}{7}m_5 \right)$$

$$l_6 = Q \left( t_n + h, x_n - \frac{3}{7}k_1 + \frac{2}{7}k_2 + \frac{12}{7}k_3 - \frac{12}{7}k_4 + \frac{8}{7}k_5, y_n - \frac{3}{7}l_1 + \frac{2}{7}l_2 + \frac{12}{7}l_3 - \frac{12}{7}l_4 + \frac{8}{7}l_5, z_n - \frac{3}{7}m_1 + \frac{2}{7}m_2 + \frac{12}{7}m_3 - \frac{12}{7}m_4 + \frac{8}{7}m_5 \right)$$

$$\begin{aligned}
m_6 = R \left( t_n + h, x_n - \frac{3}{7}k_1 + \frac{2}{7}k_2 + \frac{12}{7}k_3 - \frac{12}{7}k_4 + \frac{8}{7}k_5, y_n - \frac{3}{7}l_1 + \frac{2}{7}l_2 \right. \\
\left. + \frac{12}{7}l_3 - \frac{12}{7}l_4 + \frac{8}{7}l_5, z_n - \frac{3}{7}m_1 + \frac{2}{7}m_2 + \frac{12}{7}m_3 - \frac{12}{7}m_4 \right. \\
\left. + \frac{8}{7}m_5 \right)
\end{aligned}$$

## 2.8 Sistem Persamaan Lotka-Volterra

Model Lotka-Volterra tersusun dari pasangan persamaan diferensial yang mendeskripsikan *predator-prey* dalam kasus yang paling sederhana. Model ini membuat beberapa asumsi:

1. Populasi *prey* akan tumbuh secara eksponen ketika tidak adanya *predator*.
2. Populasi *predator* akan mati kelaparan ketika tidak adanya populasi *prey*.
3. *Predator* dapat mengkonsumsi *prey* dengan jumlah yang tak terhingga.
4. Tidak adanya lingkungan yang lengkap (dengan kata lain, kedua populasi berpindah secara acak melalui sebuah lingkungan yang homogen) (Neuhauser, 2004).

Selanjutnya bentuk verbal ini diterjemahkan ke dalam sebuah sistem persamaan diferensial. Diasumsikan  $x$  sebagai populasi *prey* dan  $y$  sebagai populasi *predator*, populasi *prey* berkurang ketika *predator* membunuhnya dan bertahan hidup (tidak mengurangi populasi *prey*) ketika *predator* hanya menyerangnya.

Dimulai dengan memperhatikan apa yang terjadi pada populasi *predator* ketika tidak ada *prey* sebagai sumber makanan, diharapkan laju populasi *predator*

berkurang secara eksponensial, laju kematian *predator* tanpa adanya *prey* diasumsikan dengan  $c$ , sehingga persamaannya dideskripsikan seperti berikut:

$$\frac{dy}{dt} = -cy \quad (2.20)$$

Persamaan tersebut menggunakan hasil kali dari bilangan *predator* ( $y$ ) dan kelajuan kematian *predator* ( $c$ ). Laju perpindahan dari *prey* ke *predator* diasumsikan dengan  $\alpha$  dan laju perpindahan dari *predator* ke *prey* diasumsikan dengan  $\beta$ . Untuk mendeskripsikan penurunan kelajuan (karena ada tanda negatif pada bagian kanan persamaan) dari populasi *predator* dengan pengaruh waktu. Dengan adanya *prey* bagaimanapun juga pengurangan ini dilawan oleh laju kelahiran *predator*, yang ditentukan oleh laju konsumsi ( $\beta xy$ ) yang mana laju penyerangan ( $\beta$ ) dikalikan dengan bilangan  $y$  dan bilangan  $x$ . Bilangan *predator* dan *prey* naik ketika pertemuan *predator* dan *prey* lebih sering, tetapi laju aktual dari konsumsi akan tergantung pada laju penyerangan ( $\beta$ ). Persamaan populasi *predator* menjadi:

$$\frac{dy}{dt} = -cy + \beta xy \quad (2.21)$$

Perkalian  $\beta y$  adalah tanggapan *predator* secara numerik atau peningkatan perkapita dari fungsi *prey* yang melimpah. Sedangkan perkalian  $\beta xy$  menunjukkan bahwa kenaikan populasi *predator* sebanding dengan perkalian *prey* yang melimpah.

Beralih pada populasi *prey*, diharapkan tanpa serangan *predator*, populasi *prey* akan naik secara eksponensial. Persamaan berikut ini mendeskripsikan laju kenaikan populasi *prey* dengan pengaruh waktu, dengan  $r$  adalah laju pertumbuhan intrinsik *prey* dan  $x$  adalah jumlah dari populasi *prey*.



$$\frac{dx}{dt} = rx \quad (2.22)$$

Pada model Lotka-Volterra tersebut terdapat kelemahan yaitu fakta bahwa ketika tidak adanya *predator*, populasi *prey* akan tumbuh tanpa batas, untuk mengatasi hal ini digunakan model logistik yang merupakan sebuah model pertumbuhan populasi. Di hadapan *predator*, bagaimanapun juga populasi *prey* dicegah dari peningkatan eksponensial secara terus menerus, karena model *predator-prey* memiliki waktu yang kontinu dan mengisyaratkan tentang model pertumbuhan populasi maka termasuk dalam model logistik. Jadi persamaan tersebut menjadi:

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) \quad (2.23)$$

Dengan  $x$  merupakan laju pertumbuhan populasi dan  $K$  adalah kapasitas tampung atau kemampuan menahan populasi agar tetap maksimum. Dengan adanya *predator* bagaimanapun juga kenaikan ini dilawan oleh laju kematian *prey* karena adanya penyerangan dari *predator*, yang ditentukan oleh laju konsumsi ( $\alpha xy$ ) dengan laju penyerangan ( $\alpha$ ) dikalikan dengan bilangan  $y$  dan bilangan  $x$ . Bilangan *predator* dan *prey* turun ketika pertemuan *predator* dan *prey* lebih sering, tetapi laju aktual dari konsumsi akan tergantung pada laju penyerangan ( $\alpha$ ). Persamaan populasi *prey* menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + \beta xy \end{aligned} \quad (2.24)$$

Model persamaan (2.23) memuat fungsi logistik yang merupakan model pertumbuhan logistik atau model Verhulst atau kurva pertumbuhan logistik pada spesies tunggal dengan  $\frac{x}{k} < -1$ . Model tersebut termasuk model yang memiliki waktu kontinu, model logistik yang dimaksud dapat diformulasikan dengan

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

Konstanta  $r$  diasumsikan positif. Konstanta  $r$  adalah laju pertumbuhan intrinsik karena perbandingan laju pertumbuhan untuk  $x$  diperkirakan sama dengan  $r$ . Konstanta positif  $K$  biasanya mengarah kepada kapasitas tampung kesehatan lingkungan yaitu kemampuan menahan populasi agar tetap maksimum (Alebraheem dan Abu-Hasan, 2016).

## 2.9 Model Persamaan Lotka-Volterra Dua *Predator* Satu *Prey*

Interaksi dinamis dari model rantai makanan tiga spesies ditunjukkan dimana dua *predator* bersaing pada satu *prey*. Tingkat pertumbuhan *prey* dan dua *predator* dijelaskan oleh hukum logistik dimana kapasitas tampung *predator* tergantung pada jumlah *prey* yang tersedia. Respon fungsional Holling tipe-II digunakan untuk menggambarkan pemberian makan dari dua *predator*  $y$  dan  $z$  pada *prey*  $x$ . Model dapat ditulis sebagai:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{\alpha xy}{1+h_1\alpha x} - \frac{\beta xz}{1+h_2\beta x}, \\ \frac{dy}{dt} &= -uy + R_1y\left(1 - \frac{y}{k_y}\right) - c_1yz, \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\frac{dz}{dt} = -wz + R_2z \left(1 - \frac{z}{k_z}\right) - c_2yz,$$

Syarat awal dari sistem adalah:

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0.$$

Laju pertumbuhan intrinsik *prey* adalah  $r$ ;  $\alpha$  dan  $\beta$  laju efisiensi untuk mencari dan menangkap dari masing-masing *predator*  $y$  dan  $z$ .  $h_1$  dan  $h_2$  adalah laju konsumsi dari masing-masing *predator*  $y$  dan  $z$ . Dengan tidak adanya konstanta *prey* ( $x$ ),  $u$  dan  $w$  adalah laju kematian dari masing-masing *predator*  $y$  dan  $z$ .  $R_1 = \frac{\alpha x e_1}{1+h_1\alpha x}$ ,  $R_2 = \frac{\beta x e_2}{1+h_2\beta x}$ ;  $R_1$  dan  $R_2$  merupakan respon numerik dari masing-masing *predator*  $y$  dan  $z$ , yang menggambarkan perubahan populasi *predator* dengan memangsa *prey*.

Parameter  $e_1$  dan  $e_2$  merupakan efisiensi dari perubahan *prey* yang dikonsumsi menjadi kelahiran *predator*. Kapasitas tampung  $k_y = a_1x$ ,  $k_z = a_2x$  sama dengan jumlah *prey* yang tersedia.  $c_1$  dan  $c_2$  adalah laju persaingan dari *predator*  $z$  pada *predator*  $y$  dan sebaliknya. Semua parameter dan syarat awal model diasumsikan nilai positif.

Model persamaan (2.23) dapat ditulis dalam bentuk non-dimensi untuk mengurangi jumlah parameter. Hal ini membuat analisis matematis menjadi lebih mudah.

Ditulis menjadi

$$\bar{t} = rt, \bar{x} = \frac{x}{k}, \bar{y} = \frac{y}{a_1k}, \bar{z} = \frac{z}{a_2k}, \bar{\alpha} = \frac{ka_1\alpha}{r}, \bar{\beta} = \frac{ka_2\beta}{r}, \bar{e}_1 = \frac{e_1}{a_1}, \bar{e}_2 = \frac{e_2}{a_2}, \bar{u} = \frac{u}{r},$$

$$\bar{w} = \frac{w}{r}, \bar{h}_1 = \frac{rh_1}{a_1}, \bar{h}_2 = \frac{rh_2}{a_2}, \bar{c}_1 = \frac{a_2kc_1}{r}, \bar{c}_2 = \frac{a_1kc_2}{r}$$

Dengan menghapus tanda bar dari semua parameter, maka sistem menjadi:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(1-x) - \frac{\alpha xy}{1+h_1\alpha x} - \frac{\beta xz}{1+h_2\beta x} = x L(x, y, z), \\ \frac{dy}{dt} &= -uy + \frac{e_1\alpha xy}{1+h_1\alpha x} - \frac{e_1\alpha}{1+h_1\alpha x} y^2 - c_1 yz = y M_1(x, y, z), \\ \frac{dz}{dt} &= -wz + \frac{e_2\beta xz}{1+h_2\beta x} - \frac{e_2\beta}{1+h_2\beta x} z^2 - c_2 yz = z M_2(x, y, z),\end{aligned}\tag{2.24}$$

Fungsi  $L$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  fungsi kontinu mulus pada  $\mathbb{R}_+^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geq 0\}$

(Alebraheem dan Abu-Hasan, 2016).

Model matematika dalam persamaan (2.24) dapat diilustrasikan pada contoh berikut. Dimisalkan suatu habitat dimana mangsa dan pemangsa hidup berdampingan. Model yang dibahas dalam penelitian ini diasumsikan pada *prey* rusa hutan (*Cervus unicolor*) dengan serigala (*Canis lupus*) dan harimau (*Panthera tigris*) di suatu hutan hujan tropis.

Ada tiga variabel yang digunakan dalam pembentukan model matematika persamaan Lotka-Volterra dua *predator* dan satu *prey* yaitu sebagai berikut:

$x(t)$  = banyaknya populasi mangsa (*prey*) terhadap waktu

$y(t)$  = banyaknya populasi pemangsa pertama (*predator y*) terhadap waktu

$z(t)$  = banyaknya populasi pemangsa kedua (*predator z*) terhadap waktu

Dan parameter yang digunakan yaitu sebagai berikut:

$\alpha_1$  = laju efisiensi mencari dan menangkap untuk pemangsa pertama (*predator y*)

$\alpha_2$  = laju efisiensi mencari dan menangkap untuk pemangsa kedua (*predator z*)

$\delta_1$  = laju konsumsi pemangsa pertama (*predator y*)

$\delta_2$  = laju konsumsi pemangsa kedua (*predator z*)

$\beta$  = laju pertumbuhan mangsa (*prey x*)

$\varepsilon_1$  = laju kematian pemangsa pertama (*predator y*)

$\varepsilon_2$  = laju kematian pemangsa kedua (*predator z*)

$\sigma_1$  = laju efisiensi yang mengubah konsumsi mangsa (*prey*) menjadi kelahiran pemangsa pertama (*predator y*)

$\sigma_2$  = laju efisiensi yang mengubah konsumsi mangsa (*prey*) menjadi kelahiran pemangsa kedua (*predator z*)

$\theta_1$  = laju kompetisi persaingan antara pemangsa pertama (*predator y*) dan pemangsa kedua (*predator z*)

$\theta_2$  = laju kompetisi persaingan antara pemangsa kedua (*predator z*) dan pemangsa pertama (*predator y*)

$k$  = kapasitas tampung lingkungan untuk *prey x*

$k_y$  = kapasitas tampung lingkungan untuk *predator y*

$k_z$  = kapasitas tampung lingkungan untuk *predator z*

Adapun asumsi yang digunakan dalam pembentukan model adalah sebagai berikut:

1. Populasi *predator* dan populasi *prey* bersifat tertutup, artinya tidak ada *predator* dan *prey* yang melakukan migrasi.
2. Pertumbuhan *prey* dan *predator* mengikuti model pertumbuhan logistik.
3. Model matematika persamaan Lotka-Volterra dua *predator* dan satu *prey* terdiri dari satu spesies *prey*, satu spesies *predator y*, dan satu spesies *predator z* dimana satu spesies *prey* merupakan satu-satunya sumber makanan bagi spesies *predator y* dan *predator z*.

4. Faktor pendukung pertumbuhan *prey* jumlahnya terbatas, sehingga populasi *prey* akan tumbuh dengan rata-rata alami dan dipengaruhi oleh daya dukung lingkungannya.
5. *Predator y* dan *predator z* hanya bergantung kepada *prey* untuk bertahan hidup.
6. Kematian *prey* karena faktor alam tidak diperhitungkan, *prey* mati hanya akibat dimakan *predator y* dan *predator z*.
7. Kematian *prey* akibat dimakan *predator y* dan *predator z* dapat dikonversi menjadi perubahan populasi *predator y* dan *predator z*.
8. Tidak ada kompetisi sesama spesies *prey*, tidak ada kompetisi sesama *predator y*, dan tidak ada kompetisi sesama *predator z*. Kompetisi hanya terjadi pada spesies *predator y* dan *predator z*.

Pembentukan model didasarkan pada asumsi diatas adalah:

1. Laju perubahan jumlah populasi *prey* akan bertambah dengan lahirnya spesies baru dimana besarnya merupakan hasil kali antara tingkat pertumbuhan alami *prey* ( $\beta$ ) dengan jumlah populasi *prey*. Populasi *prey* dapat dicegah dari peningkatan eksponensial secara terus menerus, karena model *predator-prey* memiliki waktu yang kontinu dan mengisyaratkan tentang model pertumbuhan populasi maka termasuk dalam model logistik dengan  $x$  adalah banyaknya populasi dan  $k$  adalah kapasitas tampung atau kemampuan menahan populasi agar tetap maksimum, maka laju perubahan jumlah populasi *prey* adalah:

$$\frac{dx}{dt} = \beta x \left(1 - \frac{x}{k}\right) \quad (2.25)$$

Laju perubahan jumlah populasi *prey* akan berkurang seiring adanya interaksi dengan *predator y* dan *predator z*. Pada model Holling tipe-II, ditandai dengan tingkat konsumsi melambat yang mengasumsikan bahwa *predator* menghabiskan waktunya untuk mencari dan menangkap *prey*. Fungsi Holling tipe-II terjadi pada *predator* yang berkarakteristik aktif dalam mencari *prey*. Fungsi ini akan meningkat jika tingkat konsumsi menurun dan akan konstan jika mencapai titik kejenuhan (*half saturation*). Hal ini disebabkan setiap *predator* hanya dapat memakan sejumlah *prey* pada saat satuan waktu. Dengan demikian diperoleh laju perubahan jumlah populasi *prey* adalah:

$$\frac{dx}{dt} = \beta x \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{\alpha_1 xy}{1 + \delta_1 \alpha_1 x} - \frac{\alpha_2 xz}{1 + \delta_2 \alpha_2 x} \quad (2.26)$$

2. Laju perubahan populasi *predator y* akan berkurang karena adanya kematian alami dari *predator y* sebesar  $\varepsilon_1 y$ , sehingga diperoleh:

$$\frac{dy}{dt} = -\varepsilon_1 y \quad (2.27)$$

Laju perubahan populasi *predator y* juga akan berkurang karena adanya interaksi kompetisi dengan *predator z* sebesar  $\theta_1 yz$ , sehingga diperoleh:

$$\frac{dy}{dt} = -\varepsilon_1 y - \theta_1 yz \quad (2.28)$$

Laju perubahan populasi *predator y* akan bertambah dengan memangsa *prey*.

$R_1 = \frac{\alpha_1 x \sigma_1}{1 + \delta_1 \alpha_1 x}$ ;  $R_1$  adalah respon numerik menggunakan fungsi Holling tipe-II

dari *predator y*, yang menggambarkan perubahan populasi *predator y* dengan memangsa *prey*.  $\sigma_1$  adalah efisiensi dari perubahan *prey* yang dikonsumsi menjadi kelahiran *predator y*. Dengan dikalikan model logistik dalam model

pertumbuhan populasi dimana  $k_y = a_1x$  sama dengan jumlah *prey* yang tersedia, diperoleh laju perubahan populasi *predator y* yaitu:

$$\frac{dy}{dt} = -\varepsilon_1y - \theta_1yz + R_1y \left(1 - \frac{y}{k_y}\right) \quad (2.29)$$

3. Laju perubahan populasi *predator z* akan berkurang karena adanya kematian alami dari *predator z* sebesar  $\varepsilon_2z$ , sehingga diperoleh:

$$\frac{dz}{dt} = -\varepsilon_2z \quad (2.30)$$

Laju perubahan populasi *predator z* juga akan berkurang karena adanya interaksi kompetisi dengan *predator y* sebesar  $\theta_2yz$ , sehingga diperoleh:

$$\frac{dz}{dt} = -\varepsilon_2z - \theta_2yz \quad (2.31)$$

Laju perubahan populasi *predator y* akan bertambah dengan memangsa *prey*.

$R_2 = \frac{\alpha_2x\sigma_2}{1+\delta_2\alpha_2x}$ ;  $R_2$  adalah respon numerik menggunakan fungsi Holling tipe-II

dari *predator z*, yang menggambarkan perubahan populasi *predator z* dengan memangsa *prey*.  $\sigma_2$  adalah efisiensi dari perubahan *prey* yang dikonsumsi menjadi kelahiran *predator z*. Dengan dikalikan model logistik dalam model pertumbuhan populasi dimana  $k_z = a_2x$  sama dengan jumlah *prey* yang tersedia, diperoleh laju perubahan populasi *predator z* yaitu:

$$\frac{dz}{dt} = -\varepsilon_2z - \theta_2yz + R_2z \left(1 - \frac{y}{k_z}\right) \quad (2.32)$$

Model persamaan (4.2), (4.5), dan (4.8) dapat ditulis dalam bentuk non-dimensi untuk mengurangi jumlah parameter. Hal ini membuat analisis matematis menjadi lebih mudah. Ditulis menjadi



$$\bar{t} = \beta t, \bar{x} = \frac{x}{k}, \bar{y} = \frac{y}{a_1 k}, \bar{z} = \frac{y}{a_2 k}, \bar{\alpha}_1 = \frac{ka_1 \alpha_1}{\beta}, \bar{\alpha}_2 = \frac{ka_2 \alpha_2}{\beta}, \bar{\sigma}_1 = \frac{\sigma_1}{a_1}, \bar{\sigma}_2 = \frac{\sigma_2}{a_2},$$

$$\bar{\varepsilon}_1 = \frac{\varepsilon_1}{r}, \bar{\varepsilon}_2 = \frac{\varepsilon_2}{r}, \bar{\delta}_1 = \frac{\delta_1}{a_1}, \bar{\delta}_2 = \frac{\delta_2}{a_2}, \bar{\theta}_1 = \frac{a_2 k \theta_1}{\beta}, \bar{\theta}_2 = \frac{a_2 k \theta_2}{\beta}$$

Dengan menghapus tanda bar dari semua parameter, maka sistem menjadi:

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x) - \frac{\alpha_1 xy}{1+\delta_1 \alpha_1 x} - \frac{\alpha_2 xz}{1+\delta_2 \alpha_2 x},$$

$$\frac{dy}{dt} = -\varepsilon_1 y + \frac{\sigma_1 \alpha_1 xy}{1+\delta_1 \alpha_1 x} - \frac{\sigma_1 \alpha_1}{1+\delta_1 \alpha_1 x} y^2 - \theta_1 yz, \quad (2.33)$$

$$\frac{dz}{dt} = -\varepsilon_2 z + \frac{\sigma_2 \alpha_2 xz}{1+\delta_2 \alpha_2 x} - \frac{\sigma_2 \alpha_2}{1+\delta_2 \alpha_2 x} z^2 - \theta_2 yz.$$

### III. METODOLOGI PENELITIAN

#### 3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2018/2019 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

#### 3.2 Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan menggunakan studi literatur secara sistematis yang diperoleh dari mempelajari buku-buku teks yang terdapat di perpustakaan jurusan matematika dan jurnal online matematika yang terkait dengan materi persamaan Lotka-Volterra dan sebagainya guna menunjang proses penelitian. Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian adalah sebagai berikut:

1. Mendefinisikan sistem persamaan Lotka-Volterra untuk dua *predator* satu *prey*.
2. Mengidentifikasi nilai parameter dan nilai awal pada sistem persamaan diferensial yaitu variabel  $x(0)$ ,  $y(0)$ , dan  $z(0)$ .
3. Menentukan titik tetap atau titik kesetimbangan sistem persamaan Lotka-Volterra untuk dua *predator* satu *prey*.

4. Melinierisasi sistem persamaan Lotka-Volterra untuk dua *predator* satu *prey*.
5. Menganalisis kestabilan titik kesetimbangan pada sistem persamaan Lotka-Volterra untuk dua *predator* satu *prey*.
6. Melakukan simulasi numerik dengan metode Runge-Kutta orde 5 untuk melihat perilaku sistem persamaan Lotka-Volterra untuk dua *predator* satu *prey*.
7. Menginterpretasi grafik hasil dari solusi dinamik model yang telah ditentukan.

## V. KESIMPULAN

### 5.1 Kesimpulan

Model Lotka-Volterra dua *predator* dan satu *prey* memiliki lima titik kesetimbangan dengan syarat nilai-nilai parameter adalah konstanta positif, yaitu titik setimbang kepunahan  $E_0$ , titik setimbang kepunahan *predator*  $y$  dan *predator*  $z$   $E_1$ , titik setimbang kepunahan *predator*  $z$   $E_2$ , titik setimbang kepunahan *predator*  $y$   $E_3$ , dan titik setimbang koeksistensi  $E_4$ .

Titik setimbang  $E_0$  tidak stabil, titik setimbang  $E_1$  akan stabil asimtotis jika  $\varepsilon_1 > \frac{\alpha_1 \sigma_1}{(1 + \alpha_1 \delta_1)}$  dan  $\varepsilon_2 > \frac{\alpha_2 \sigma_2}{(1 + \alpha_2 \delta_2)}$ , titik setimbang  $E_2$  akan stabil asimtotis jika  $\varepsilon_2 + \theta_2 \tilde{y} > \frac{\alpha_2 \sigma_2 \tilde{x}}{1 + \alpha_2 \delta_2 \tilde{x}}$ , titik setimbang  $E_3$  akan stabil asimtotis jika  $\varepsilon_1 + \theta_1 \hat{z} > \frac{\alpha_1 \sigma_1 \hat{x}}{1 + \alpha_1 \delta_1 \hat{x}}$ , dan titik setimbang  $E_4$  akan stabil asimtotis dengan syarat nilai parameter lebih dari 0.

Berdasarkan simulasi numerik dapat dilihat bahwa *prey*, *predator*  $y$ , dan *predator*  $z$  dapat hidup berdampingan, ketika nilai laju efisiensi konversi (mengubah konsumsi *prey* menjadi kelahiran *predator*) untuk masing-masing *predator* saling mendekati. Namun, kepunahan *predator* satu bergantung pada nilai laju efisiensi konversi pada *predator* dua, dimana jika nilai laju efisiensi konversi *predator*

pertama kurang dari nilai laju efisiensi konversi *predator* kedua, maka *predator* pertama akan menuju ke arah kepunahan sementara spesies lain bertahan hidup, begitu pula sebaliknya.

## **5.2 Saran**

Disarankan untuk pembaca yang tertarik pada masalah ini dapat mengembangkan model Lotka-Volterra dengan menambahkan peubah yang belum disebutkan pada penelitian ini, contohnya faktor migrasi pada setiap spesies.

## DAFTAR PUSTAKA

- Alebraheem, J., & Hasan, Y. 2012. Persistence of Predator in a Two Predators-One Prey Model with Non-Periodic Solution. *Applied Mathematical Sciences*. **6**(19): 943-956.
- Baiduri. 2012. *Persamaan Diferensial dan Matematika Model*. UMM Press, Malang.
- Boyce, E., & Diprima, C. 2009. *Elementary Differential Equations and Value Problems Ninth Edition*. Wiley and Sons, New York.
- Chapra, S., & Canale, R. 2013. *Numerical Methods for Engineers Sixth Edition*. McGraw-Hill Inc., New York.
- Edwards, C., & Penney, D. 2005. *Differential Equation & Linier Algebra*. Ed. ke-2. Pearson Prentice Hall, The United States of America.
- Farlow, S. 1994. *An Introduction to Differential Equations and Applications*. McGraw-Hill, Inc., New York.
- Finizio, N., & Ladas, G. 1988. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Erlangga, Jakarta.
- Hossain, B., *et al.* 2017. A Comparative Study on Fourth Order and Butcher's Fifth Order Runge-Kutta Methods with Third Order Initial Value Problem (IVP). *Applied and Computational Mathematics*. **6**(6): 243-253.
- Hurewicz, W. 1961. *Lecture on Ordinary Differential Equation*. John Wiley and Sons, Inc., New York.

- Kartono. 2012. *Persamaan Diferensial Biasa: Model Matematika Fenomena Perubahan*. Graha Ilmu, Jakarta.
- Khamsi, M. A. 2004. *Equilibrium Point Analysis: Linearization Technique*. Utrecht University, Utrecht.
- Merkin, D. R. 1997. *Introduction to the Theory of Stability*. Springer, New York
- Munir, R. 2010. *Metode Numerik*. Informatika, Bandung.
- Neuhauser, C. 2004. *Calculus for Biology and Medicine*. Pearson Education, New Jersey.
- Panfilov, A. 2004. *Qualitative Analysis of Differential Equations*. Utrecht University, Utrecht.