DINAMIKA MODEL MATEMATIKA PADA PROSES TRANSPOR TAK TUNAK ION LOGAM MELALUI TEKNIK MEMBRAN CAIR BERPENDUKUNG

(SKRIPSI)

Oleh

FELICIA ANDRADE PASKALIA MARPAUNG

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

ABSTRACT

MATHEMATICAL MODELLING DYNAMICS OF UNSTEADY-STATE TRANSPORT OF METAL IONS THROUGH SUPPORTED LIQUID MEMBRANE TECHNIQUE

By

Felicia Andrade Paskalia Marpaung

Dynamics of unsteady-state transport process of metal ions through supported liquid membrane technique can be modelled into diffusion equation which is related to transport rate and completed with related initial value and boundary condition. In this study, law of conservation of mass modelling in the feed, the membrane, and the stripping phases is used to determinded the profil of the dynamics of metal ions concentration in this transport process to time through analytical simulation using Duhamel's Theorem and numerical simulation using finite difference method. Variation of membrane thickness and kinetics parameter k_1 and k_1 related to pH of feed phase is simulated to determined its effect to the profil of metal ions concentration and time. The obtained simulation shows that in case the kinetics parameter are $k_1 < k_2$ and k_1 near to k_2, when membrane thickness position increase then the transported metal ions concentration also increase.

Keywords : *unsteady-state transport, diffusion equation, mathematical model, metal ions*

ABSTRAK

DINAMIKA MODEL MATEMATIKA PADA PROSES TRANSPOR TAK TUNAK ION LOGAM MELALUI TEKNIK MEMBRAN CAIR BERPENDUKUNG

Oleh

Felicia Andrade Paskalia Marpaung

Dinamika proses transpor tak tunak ion logam melalui teknik membran cair berpendukung dapat digambarkan dalam bentuk persamaan difusi yang terkait dengan laju reaksi dan dilengkapi dengan syarat awal dan syarat batas tertentu. Pada penelitian ini, model hukum konservasi masa pada fasa umpan, fasa membran, dan fasa penerima digunakan untuk mempelajari profil dinamika konsentrasi ion logam pada proses transpor tersebut terhadap waktu melalui simulasi analitik yang diperoleh menggunakan Teorema Duhamel dan simulasi numerik menggunakan metode beda hingga. Variasi posisi ketebalan membran dan parameter kinetik yang berkaitan dengan pH pada fasa umpan disimulasikan untuk melihat pengaruhnya terhadap profil konsentrasi ion logam dan waktu. Hasil simulasi menunjukkan bahwa pada kasus parameter kinetik $k_1 < k_2$ dan k_1 dekat dengan k_2, ketika posisi ketebalan membran semakin meningkat maka konsentrasi ion logam yang tertranspor juga semakin meningkat.

Kata kunci : *transpor tak tunak, persamaan difusi, model matematika, ion logam*

DINAMIKA MODEL MATEMATIKA PADA PROSES TRANSPOR TAK TUNAK ION LOGAM MELALUI TEKNIK MEMBRAN CAIR BERPENDUKUNG

Oleh

FELICIA ANDRADE PASKALIA MARPAUNG

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

Judul Skripsi	:	**DINAMIKA MODEL MATEMATIKA PADA PROSES TRANSPOR TAK TUNAK ION LOGAM MELALUI TEKNIK MEMBRAN CAIR BERPENDUKUNG**
Nama Mahasiswa	:	Felicia Andrade Paskalia Marpaung
No. Pokok Mahasiswa	:	1517031177
Jurusan	:	Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.	**Subian Saidi, S.Si., M.Si.**
NIP 19740316 200501 1 001	NIP 19800821 200812 1 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Subian Saidi, S.Si., M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Dr. La Zakaria, S.Si., M.Sc.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Drs. Suratman, M.Sc.
NIP 19640604 199003 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : 06 Agustus 2019

SURAT PERNYATAAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : **Felicia Andrade Paskalia Marpaung**

Nomor Pokok Mahasiswa : **1517031177**

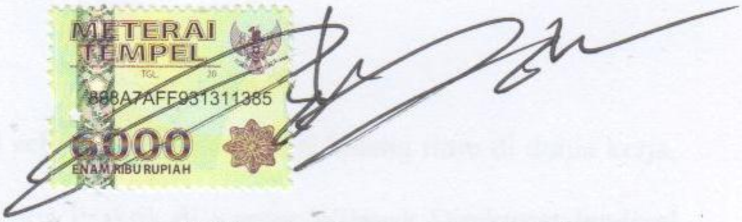
Jurusan : **Matematika**

Judul Skripsi : **Dinamika Model Matematika Pada Proses Transpor Tak Tunak Ion Logam Melalui Teknik Membran Cair Berpendukung**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri, dan sepanjang pengetahuan saya tidak berisi materi yang telah dipublikasikan atau ditulis orang lain atau telah dipergunakan dan diterima sebagai persyaratan penyelesaian studi pada Universitas atau Institut lain.

Bandar Lampung, 06 Agustus 2019

Yang Menyatakan



Felicia Andrade Paskalia Marpaung

RIWAYAT HIDUP

Skripsi ini ditulis oleh Felicia Andrade Paskalia Marpaung, lahir di Bandar Lampung, pada tanggal 08 April 1996. Penulis merupakan anak kedua dari tiga bersaudara dari pasangan Bapak Edward P. Marpaung dan Ibu Maria Helena Sandra Yunita Suryawati Sitohang.

Penulis menyelesaikan pendidikan dasar di SD Fransiskus Tanjungkarang pada tahun 2008, pendidikan menengah pertama di SMP Fransiskus Tanjungkarang pada tahun 2011, dan menyelesaikan pendidikan menengah atas di SMA Negeri 9 Bandar Lampung pada tahun 2014. Kemudian pada tahun 2015, penulis diterima melalui jalur SBMPTN dan terdaftar sebagai mahasiswa reguler Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam di Universitas Lampung. Selama menempuh pendidikan di universitas, penulis aktif terlibat dalam Unit Kegiatan Mahasiswa Katolik Universitas Lampung sebagai Kepala Divisi Kerohanian periode 2017 dan Bendahara Umum periode 2018.

Pada pertengahan tahun 2018 sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu di dunia kerja, penulis telah melaksanakan Kerja Praktik di Kantor Wilayah Direktorat Jenderal Pajak Bengkulu dan Lampung. Sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu kepada masyarakat, penulis telah melaksanakan Kuliah Kerja Nyata pada tahun 2018 di Desa Air Bakoman, Kec. Pulau Panggung, Kab. Tanggamus, Lampung.

Kata Inspirasi

"Ad Majorem Dei Gloriam"
(Jesuits)

"Janganlah hendaknya kamu kuatir tentang apapun juga, tetapi nyatakanlah dalam segala hal keinginanmu kepada Allah dalam doa dan permohonan dengan ucapan syukur."
(Filipi 4:6)

"Takut akan Tuhan adalah permulaan pengetahuan, tetapi orang bodoh menghina hikmat dan didikan."
(Amsal 1:7)

"Try not to become a man of success, but rather try to become a man of value."
(Albert Einstein)

"It does not matter how slowly you go, so long as you do not stop."
(Confucius)

PERSEMBAHAN

Puji Syukur Kepada Allah Yang Maharahim

Dengan kerendahan hati dan rasa syukur kepada Tuhan
Kupersembahkan karya ini kepada:

Orang Tua Tercinta
Bapak Edward P. Marpaung, S.E. dan Ibu M.H. Sandra Y.S. Sitohang, S.E.
atas limpahan kasih sayang, doa, dan tetesan keringat dalam merawat dan menyekolahkanku selama ini demi kesuksesanku.
Serta Abangku, Kakakku, Adikku Tersayang
Leonard Adrian Marpaung, BSMA., Widya Emilia Primaningtyas, S.T., M.T, dan Kurniawan Deny Pratama Marpaung yang selalu memberikan semangat dan dukungan.

Para Pendidikku, Dosen dan Guruku yang telah memberikan ilmu kepadaku.

Semua sahabat terbaik yang selalu memberikan inspirasi, dukungan, pertolongan, semangat dan motivasi.

Almamater dan Negeriku Tercinta.

SANWACANA

Puji syukur kehadirat Tuhan Yang Maha Esa yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Dinamika Model Matematika pada Proses Transpor Tak Tunak Ion Logam Melalui Teknik Membran Cair Berpendukung".

Penulis menyadari bahwa dalam penyelesaian skripsi ini tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Papa dan Mama tercinta, serta saudara-saudaraku tersayang, yang selalu mendoakan, memberikan motivasi, semangat, dan dukungan baik secara moril maupun materil.
2. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing I yang telah meluangkan waktu untuk membimbing, memberikan masukan, motivasi, serta kritik dan saran yang membangun kepada penulis dalam penyusunan skripsi sehingga skripsi ini menjadi lebih baik lagi.
3. Bapak Subian Saidi, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing II atas bimbingan dan saran yang membangun dalam penyusunan skripsi ini.
4. Bapak Dr. La Zakaria, S.Si., M.Sc. selaku Dosen Pembahas yang telah memberikan kritik dan saran yang positif dalam penyusunan skripsi ini.

5. Bapak Drs. Nusyirwan, M.Si. selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah memberikan arahan, bimbingan, motivasi semangat bagi penulis selama masa studi.
6. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Bapak Suratman, S.Si., M.Sc. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
8. Seluruh Dosen dan staf Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung, khususnya Ibu Anita dan Bapak Drajat.
9. Temanku Aditya Danang Pratama yang senantiasa memberikan dukungan, menemani, dan membantu penulis mempersiapkan segala sesuatu untuk menyelesaikan penelitian ini.
10. Sahabat-sahabatku, Deby Anastasya, Geralda Agustina, Debora Ibotona, Nita Septi, Wima Nurbilla, dan Alif Rizky yang telah memberikan semangat, pertolongan, dan motivasi bagi penulis.
11. Teman-teman seperjuangan seluruh Keluarga Matematika 2015, serta kakak dan adik tingkat terimakasih atas kebersamaannya selama ini.
12. Saudara-saudariku dalam Keluarga Mahasiswa Katolik Universitas Lampung yang memberikan semangat, motivasi rohani, pertolongan dan inspirasi dari awal perkuliahan, selama dinamika di kepengurusan UKM Katolik, hingga skripsi ini berhasil terbuat.

Semoga dengan kebaikan, bantuan, dan dukungan yang telah diberikan mendapat balasan dari Tuhan Yang Maha Esa dan mudah-mudahan skripsi ini bermanfaat.

Akhir kata, penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun.

Bandar Lampung,   Agustus 2019
Penulis

Felicia Andrade Paskalia Marpaung

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Gambar **Halaman**

DAFTAR TABEL

Tabel **Halaman**

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Ion-ion logam memiliki tingkat kelarutan yang cukup tinggi dalam air. Dilihat dari sudut pandang proses hidrometalurgi, pemisahan selektif ion-ion logam berat dan toksik dari limbah seringkali dibutuhkan. Ekstraksi pelarut merupakan metode yang berharga untuk memisahkan beberapa ion logam dari larutan. Membran cair berpendukung (*Supported Liquid Membrane*, SLM) merupakan kombinasi antara proses ekstraksi dan pemisahan. Teknik membran cair berpendukung tersebut didasarkan pada proses distribusi cair-cair, yang dilakukan dengan menggunakan agen pengekstrak seperti senyawa pembawa dalam transpor berfasilitas. Seiring meningkatnya kebutuhan logam berat sebagai material utama dalam proses produksi, maka perlu dikembangkan metoda pemisahan dengan kinerja tinggi dan ekonomis untuk memperoleh kembali logam-logam dari bijih tingkat rendah dan sumber-sumber sekunder. Teknik ekstraksi pelarut biasa akan memerlukan jumlah ekstraktan yang banyak dan memerlukan waktu lama. Berdasarkan kelemahan tersebut, maka teknik pemisahan yang sedang dikembangkan adalah pemisahan dengan teknik membran cair yang didasarkan pada transpor ion logam melalui membran cair yang mengandung senyawa pembawa. Proses transpor melalui membran cair berpendukung ini memiliki tiga fasa yaitu fasa umpan, fasa membran, dan fasa penerima.

Pada proses aliran fluida, dikenal dua jenis keadaan aliran yaitu keadaan tunak (*steady state*) dan keadaan tak tunak (*unsteady state*). Keadaan tunak adalah kondisi sewaktu sifat-sifat suatu sistem tak berubah dengan berjalannya waktu. Sementara itu, suatu aliran tak tunak memerlukan waktu untuk mencapai atau mendekati keadaan tunak.

Transpor ion-ion logam melalui membran cair berpendukung diselidiki dalam keadaan tak tunak karena konsentrasi bahan-bahan dalam proses SLM bergantung pada posisi dan waktu. Adanya istilah akumulasi dalam persamaan tingkat persediaan menimbulkan permasalahan matematika karena persamaan yang dihasilkan merupakan persamaan diferensial parsial. Solusi persamaan diferensial parsial tersebut juga bergantung pada kondisi batas (Tosun, 2002).

Masalah matematika khususnya persamaan diferensial parsial dapat diselesaikan baik secara analitik maupun numerik. Solusi analitik merupakan penyelesaian yang memenuhi persamaan semula secara eksak sedangkan solusi numerik merupakan penyelesaian yang memenuhi persamaan semula berupa hampiran (Susila,1993). Salah satu metode numerik untuk penyelesaian persamaan diferensial parsial adalah metode beda hingga, dimana metode ini memiliki berbagai skema. Pada penelitian ini, skema yang akan digunakan adalah skema eksplisit FTCS (*Forward Time Center Space*).

Perilaku dinamika transpor ion logam selama proses difusi berlangsung terus dikaji untuk memperoleh data yang dibutuhkan untuk memahami mekanisme transpor dari suatu unsur melalui membran cair berpendukung. Masalah dinamika pemisahan ion logam yang terjadi melalui proses difusi biasanya digambarkan dalam bentuk model matematika berupa persamaan difusi berdasarkan hukum konservasi massa. Simulasi digunakan untuk mempelajari bagaimana perilaku dinamika transpor ion logam pada proses difusi melalui membran cair berpendukung khususnya yang terkait dengan konsentrasi ion logam dan waktu yang diperlukan selama proses transpor berlangsung. Salah satu model matematika yang menggambarkan dinamika konsentrasi dan waktu yang diperlukan pada proses transpor tak tunak ion logam menggunakan SLM telah dikemukakan oleh Ata (2007), yaitu model homogen tak tunak satu dimensi, dimana sepanjang difusi dinamika transpor ion logam dianggap mengalami keadaan yang sama (homogen) dan konsentrasi unsur yang terkandung didalamnya bergantung pada waktu.

Pada penelitian ini, dinamika proses transpor ion logam melalui membran cair berpendukung akan dikaji secara analitik dan pendekatan numerik untuk mengetahui seberapa banyak konsentrasi ion logam yang tertranspor dengan pertimbangan lama waktu yang dibutuhkan. Lebih lanjut akan dikaji bagaimana pengaruh perbedaan pH pada fasa umpan dan ketebalan lapisan film berair terhadap proses transpor ion logam di setiap fasa.

1.2 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan grafik perubahan konsentrasi ion logam dan waktu yang dibutuhkan dalam kasus transpor tak tunak ion logam melalui membran cair berpendukung, serta analisis sensitivitas paramater kadar pH pada fasa umpan dan ketebalan lapisan film berair pada masing-masing fasa umpan, fasa membran, dan fasa penerima terhadap jumlah ion logam yang tertranspor.

1.3 Manfaat Penelitian

Penelitian ini bermanfaat untuk mengetahui model matematika dan solusi analitik pada proses transpor tak tunak ion logam melalui teknik membran cair berpendukung. Selain itu, penelitian ini juga bermanfaat untuk mengetahui simulasi distribusi konsentrasi ion logam yang terkontrol ketebalan film dan kadar pH pada fasa umpan, serta mengetahui mekanisme terbaik untuk meningkatkan performa proses transpor ion logam.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Membran Cair Berpendukung (*Supported Liquid Membrane,* SLM)

Teknik pemisahan dengan membran cair berpendukung dilakukan pertama kali oleh Danesi dan Reicheley-Yinger. Membran cair berpendukung menggunakan membran berpori yang diimpregnasi dengan pembawa pengompleks untuk memisahkan fasa umpan dan penerima (Djunaidi dan Haris, 2003).

Menurut Ata (2007), sistem SLM mengandung tiga fasa sebagai berikut.

(i) Fasa umpan cair yang mengandung ion-ion logam.

(ii) Fasa membran berpendukung polimer mikro berpori yang teresapi oleh larutan organik yang mengandung senyawa pembawa dan pelarut. Membran berperan sebagai pemisah antara dua fasa cair.

(iii) Fasa penerima yang merupakan tempat tidak terkompresinya ion logam dari antarmuka membran-penerima.

Pada proses transpor ion logam melalui SLM, reaksi kimia yang terjadi pada antarmuka umpan-membran dan membran-penerima dapat ditulis dalam bentuk persamaan berikut.

$$\mathrm{Me^{2+}_{(larutan)}} + \mathrm{2HR_{(organik)}} \overset{\mathrm{f-m}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{R_2Me_{(organik)}} + \mathrm{2H^{+}_{(larutan)}}$$

$$\mathrm{R_2Me_{(organik)}} + \mathrm{2H^{+}_{(larutan)}} \overset{\mathrm{difusi}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{2H^{+}_{(larutan)}} + \mathrm{R_2Me_{(organik)}}$$

$$\mathrm{2H^{+}_{(larutan)}} + \mathrm{R_2Me_{(organik)}} \overset{\mathrm{m-s}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{Me^{2+}_{(larutan)}} + \mathrm{2HR_{(organik)}}$$

dengan f-m adalah antarmuka umpan-membran dan m-s adalah antarmuka membran-penerima.

2.2 Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial adalah suatu sistem yang memuat n buah persamaan diferensial, dengan n buah fungsi yang tidak diketahui, dimana n merupakan bilangan bulat positif lebih besar sama dengan dua (Boyce dan DiPrima, 1986). Antara persamaan diferensial yang satu dengan yang lain saling keterkaitan dan konsisten. Menurut Hidayat (2006), bentuk umum dari suatu sistem n persamaan orde pertama mempunyai bentuk sebagai berikut :

$$\frac{dx_1}{dt} = g_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = g_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = g_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad (2.1)$$

dengan $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah variabel terikat dan *t* adalah variabel bebas, sehingga $x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$, dimana $\frac{dx_n}{dt}$ merupakan derivatif fungsi x_n terhadap *t* , dan *g*, adalah fungsi yang tergantung pada variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$ dan *t*.

2.3 Persamaan Difusi

Persamaan difusi adalah persamaan diferensial parsial linier tipe parabolik yang umumnya digunakan untuk merepresentasikan perubahan konsentrasi dari tinggi menjadi rendah seiring dengan berjalannya waktu. Persamaan difusi satu dimensi pada domain $[0, L]$ dapat dituliskan sebagai masalah nilai awal dan batas seperti berikut.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = D\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \ , \ \ x \in (0, L) \tag{2.2}$$

$$U(0, \tau) = U(L, t) = a \ , \quad t > 0$$

$$U(x, 0) = f(x) \ , \quad x \in [0, L]$$

dengan $U(x, t)$ merupakan besaran konsentrasi pada waktu t dan spasial x, D merupakan koefisien difusi dengan $D \in \mathbb{R}^+$, dan $f(x)$ adalah fungsi awal sebaran konsentrasi pada domain (Zain, 2018).

2.4 Hukum Kedua Fick

Suatu persamaan untuk transpor massa yang menekankan perubahan dalam konsentrasi terhadap waktu pada tempat tertentu, bukan pada massa yang berdifusi melalui satu satuan luas barrier dalam satuan waktu dikenal sebagai Hukum Kedua Fick. Hukum Kedua Fick menyatakan bahwa perubahan konsentrasi terhadap waktu dalam daerah tertentu sebanding dengan perubahan gradien konsentrasi pada titik itu dalam sistem tersebut (Heinz, 2011).

Menurut Bellomo dan Preziosi (1995), persamaan umum pada Hukum Kedua Fick adalah

$$\frac{\partial U}{\partial t} = D\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{2.3}$$

dengan

U = konsentrasi zat

D = koefisien difusi

t = waktu

x = jarak permukaan

2.5 Difusi Kondisi Tunak dan Tak Tunak

Aliran fluida ada dua macam yaitu secara terbuka atau berhubungan dengan udara luar serta aliran tertutup yang biasanya dilakukan di dalam pipa. Menurut Tosun (2002), aliran zat cair dalam pipa ditinjau dari kestabilan kapasitasnya dibagi menjadi dua yaitu :

a. Aliran dalam keadaaan tunak (*steady state*) apabila debit atau laju alir volumetrik selama waktu yang ditinjau adalah tetap.
b. Aliran tak tunak (*unsteady state*) apabila debitnya atau laju alir volumetrik selama waktu yang ditinjau tidak tetap atau mengalami perubahan.

2.6 Teorema Duhamel

Tinjau permasalahan konduksi panas berdimensi tiga dan tak homogen yang berada pada daerah R dengan bentuk fungsi kondisi batas yang bergantung waktu sebagai berikut.

$$\nabla^2 T(r,t) + \frac{1}{k} g(r,t) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T(r,t)}{\partial t}, \text{ dalam daerah } R \text{ dengan } t > 0 \qquad (2.4)$$

$$k_i \frac{\partial T}{\partial n_i} + h_i T = f_i(r,t)\ , \text{ pada batas } S_i \text{ dengan } t > 0$$

$$T(r,t) = F(r)\ , \text{ untuk } t = 0 \text{ dalam wilayah } R$$

dengan $\frac{\partial}{\partial \mathrm{n_i}}$ merupakan turunan disepanjang permukaan batas S_i, *i = 1,2,...,N* dan *N* menjadi jumlah permukaan batas kontinu dari daerah *R*, serta k_i dan h_i diasumsikan sebagai konstanta (Ozisik, 1993).

Misalkan $\Phi(r,t,\tau)$ merupakan solusi dari permasalahan diatas dengan asumsi bahwa bentuk tak homogen $g(r,\tau)$ dan $f_i(r,\tau)$ tidak bergantung waktu. Maka, $\Phi(r,t,\tau)$ adalah solusi dari masalah tambahan berikut.

$$\nabla^2\Phi(r,t,\tau)+\frac{1}{k}g(r,\tau)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\Phi(r,t,\tau)}{\partial t}\text{dalam daerah } R \text{ dengan } t>0 \quad (2.5)$$

$k_i\frac{\partial\Phi(r,t,\tau)}{\partial n_i}+h_i\Phi(r,t,\tau)=f_i(r,\tau)$ pada batas S_i dengan *t > 0*

$\Phi(r,t,\tau)=F(r)$ untuk *t = 0* dalam wilayah *R*

dengan $\frac{\partial}{\partial \mathrm{n_i}}$ dan S_i sesuai dengan definisi sebelumnya, dan fungsi $\Phi(r,t,\tau)$ bergantung pada τ karena $g(r,\tau)$ dan $f_i(r,\tau)$ bergantung pada nilai τ. Misal solusi $\Phi(r,t,\tau)$ dari masalah tambahan ada. Maka, menurut Ozisik (1993), Teorema Duhamel mengaitkan solusi $T(r,t)$ dengan solusi $\Phi(r,t,\tau)$ sesuai bentuk integral berikut.

$$T(r,t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\tau=0}^{t}\Phi(r,t-\tau,\tau)\,d\tau \quad (2.6)$$

Oleh karena

$$\Phi(r,t-\tau,\tau)|_{\tau-t}=\Phi(r,0,\tau)=F(r) \quad (2.7)$$

maka

$$T(r,t)=F(r)+\int_{\tau=0}^{t}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(r,t-\tau,\tau)\,d\tau \quad (2.8)$$

Misalkan fungsi $f(t)$ memiliki *N* titik diskontinu dalam domain $0 < t < \tau_N$, maka bentuk alternatif dari Teorema Duhamel adalah sebagai berikut.

$$T(r,t) = \sum_{j=0}^{N-1} \phi\left(r, t-\tau_j\right)\Delta f_j + \int_{\tau=0}^{t} \phi(r, t-\tau)\frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} d\tau \qquad (2.9)$$

dengan

$$\Delta f_j = f^{+}\left(\tau_j\right) - f^{-}\left(\tau_j\right)$$

$\tau_j =$ titik waktu terjadinya kondisi diskontinu; $f^{+}\left(\tau_j\right)$ merupakan nilai f menuju τ_j dari kanan, sedangan $f^{-}\left(\tau_j\right)$ merupakan nilai f menuju τ_j dari kiri.

2.7 Masalah Nilai Awal dan Syarat Batas

Menurut Ozisik (1993), yang dimaksud dengan nilai awal adalah kondisi yang harus dipenuhi pada awal waktu tertentu (t_0). Secara matematis, kondisi awal dideskripsikan sebagai berikut.

$$T(r,0) = F(r), \quad 0 < r < L \qquad (2.9)$$

dengan *F(r)* adalah fungsi yang diberikan.

Syarat batas adalah suatu syarat atau kondisi yang harus dipenuhi pada batas-batas domain terkait dengan ruang. Terdapat tiga jenis kondisi batas linier yang berbeda. Misalkan diberikan domain S dengan r = a dan r = b merupakan titik-titik batas S. Bentuk umum syarat batas adalah $\left[\alpha T(r,t) + \beta \frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right]_{r=a} = g(t)$ dan $\left[\gamma T(r,t) + \delta \frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right]_{r=b} = h(t)$, dengan $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sebarang konstanta. Menurut Ozisik (1993), syarat batas dikatakan

(i) Dirichlet jika syarat batasnya memberikan nilai dari sebarang fungsi *T(r,t)* pada domain *S* atau dapat ditulis $T(r,t)|_{r=a} = g(t)$ dan $T(r,t)|_{r=b} = h(t)$, dengan $g(t)$ dan $h(t)$ fungsi dalam variabel *t*.

(ii) Neumann jika syarat batasnya memberikan nilai turunan *T(r,t)* terhadap *r* pada domain *S* atau dapat ditulis $\left.\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right|_{r=a} = g(t)$ dan $\left.\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right|_{r=b} = h(t)$, dengan $g(t)$ dan $h(t)$ fungsi dalam variabel *t*.

(iii) Robin jika syarat batasnya memberikan relasi linear antara *T(r,t)* dengan $\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}$ pada domain *S* atau dapat ditulis $\left[\alpha T(r,t) + \beta \frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right]_{r=a} = g(t)$ dan $\left[\gamma T(r,t) + \delta \frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right]_{r=b} = h(t)$,

dengan α, β, γ, δ sebarang konstanta serta *g(t)* dan *h(t)* fungsi dalam variabel *t*.

2.8 Metode Beda Hingga Skema Eksplisit

Metode eksplisit dikonstruksikan menggunakan aproksimasi FTCS (*Forward Time Center Space*) untuk turunan-turunan dalam persamaan difusi berikut.

$$U_t(x,t) = DU_{xx}(x,t)$$

dengan $(x,t) \in [0,L] \times [0,T]$, koefisien difusi $D \in \mathbb{R}^+$, dan syarat awal $U(x,0) = f(x)$ serta syarat batas $U(0,\tau) = U(L,t) = a$.

Skema ini dimulai dengan mendefinisikan grid dalam spasial x:

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N = 1$$

dan diasumsikan ukuran partisi adalah $x_k - x_{k-1} = \Delta x$ untuk semua *k*.

Didefinisikan ukuran partisi waktu adalah $\Delta t > 0$, dan grid waktu $t_n = n\Delta t$ untuk $n \geq 0$. Dengan demikian, aproksimasi beda terhadap turunan-turunan dalam persamaan diferensial parsial pada setiap titik grid didefinisikan sebagai berikut.

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = \frac{U(x,t+\Delta t) - U(x,t)}{\Delta t} + \frac{1}{2}\Delta t \frac{\partial^2 U(x,\beta)}{\partial t^2} \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} = \frac{U(x-\Delta x,t) - 2U(x,t) + U(x+\Delta x,t)}{\Delta x^2} + \frac{1}{12}\Delta x^2 \frac{\partial^4 U(\alpha,t)}{\partial x^4} \quad (2.11)$$

dengan $t \leq \beta \leq t + \Delta t$ dan $x - \Delta x \leq \alpha \leq x + \Delta x$.

Persamaan (2.10) dan (2.11) digunakan dalam persamaan diferensial parsial untuk menggantikan $U_t(x,t)$ dan $U_{xx}(x,t)$ sehingga diperoleh

$$\frac{U(x,t+\Delta t) - U(x,t)}{\Delta t} = D\left(\frac{U(x-\Delta x,t) - 2U(x,t) + U(x+\Delta x,t)}{\Delta x^2}\right)$$
$$+ f(x,t) + T_E(x,t) \quad (2.12)$$

dimana galat pemotongan $T_E(x,t)$ diberikan oleh

$$T_E(x,t) = \frac{1}{12}\Delta x^2 \frac{\partial^4 U(\alpha,t)}{\partial x^4} + \frac{1}{2}\Delta t \frac{\partial^2 U(x,\beta)}{\partial t^2} \quad (2.13)$$

Solusi aproksimasi $U_{\Delta x,\Delta t}(x,t)$ pada titik-titik grid didefinisikan dengan cara mengabaikan galat pemotongan (2.13) dan mengganti $U(x_i,t_n)$ dengan $U_i^n = U_{\Delta x,\Delta t}(x_i,t_n)$. Sehingga diperoleh

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = D\left(\frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{\Delta x^2}\right) + f(x_i,t_n) \quad (2.14)$$

Secara sederhana persamaan (2.14) dapat ditulis

$$U_i^{n+1} = U_i^n + S(U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n) + \Delta t f(x_i,t_n) \quad (2.15)$$

dengan $S = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}$.

Untuk uji kestabilan skema beda diatas, menggunakan kestabilan Von Neumann yakni

$$S = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \qquad (2.16)$$

(Epperson, 2013)

2.9 Galat

Penyelesaian secara numerik suatu persamaan matematika memberikan nilai perkiraan yang mendekati nilai eksak dari penyelesaian secara analitis. Hal ini berdampak bahwa terdapat kesalahan (galat) terhadap nilai eksak dalam penyelesaian numerik.

Menurut Epperson (2013), jika θ merupakan suatu kuantitas yang akan dikomputasikan dan θ_h adalah suatu aproksimasi terhadap kuantitas tersebut, maka galat adalah selisih antara keduanya, dinyatakan sebagai berikut.

$$Galat = \theta - \theta_h \qquad (2.17)$$

Sedangkan galat mutlak adalah nilai mutlak dari galat, yakni

$$Galat\ mutlak = |\theta - \theta_h| \qquad (2.18)$$

dengan asumsi $\theta \neq 0$.

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Tempat dan Waktu Penelitian

Penelitian ini dilakukan di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung dan waktu penelitian dilaksanakan pada semester genap tahun ajaran 2018/2019.

3.2 Metode Penelitian

Adapun langkah-langkah yang dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Menentukan dan mengkaji karakteristik model matematika, kondisi awal dan kondisi batas yang akan digunakan pada fasa umpan, fasa membran, dan fasa penerima dalam proses transpor tak tunak ion logam melalui teknik membran cair berpendukung.
2. Menentukan solusi analitik penyelesaian dari model matematika yang diperoleh dengan menggunakan teorema Duhamel.
3. Menentukan solusi numerik penyelesaian dari model matematika yang diperoleh dengan menggunakan metode beda hingga.
4. Melakukan simulasi terhadap persamaan solusi analitik dan persamaan solusi numerik yang diperoleh untuk mendapatkan galat, grafik perilaku konsentrasi

ion logam dan waktu yang dibutuhkan dalam kasus transpor tak tunak ion logam melalui membran cair berpendukung, serta pengaruh variasi kadar pH fasa umpan dan ketebalan lapisan film berair pada setiap fasa umpan, fasa membran, dan fasa penerima terhadap banyaknya konsentrasi ion logam yang tertranspor.

5. Menarik kesimpulan.

V. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan, dapat disimpulkan bahwa distribusi konsentrasi ion logam pada fasa umpan mengalami penurunan secara eksponensial sejalan bertambahnya waktu transpor. Sedangkan pada fasa membran dan fasa penerima, distribusi konsentrasi ion logam menunjukkan perilaku bi-eksponensial seiring berjalannya waktu transpor.

Perlakuan variasi parameter kadar pH fasa umpan memberikan perbedaan profil konsentrasi ion logam sebagaimana tampak bahwa semakin asam kondisi fasa umpan maka konsentrasi ion logam yang tertranspor akan semakin sedikit dan membutuhkan waktu transpor yang lebih panjang. Ketebalan lapisan film dan membran sangat berpengaruh terhadap profil konsentrasi ion logam. Semakin tebal lapisan film dan membran maka proses transpor akan berjalan lebih singkat sehingga konsentrasi ion logam yang tertrasanspor menjadi lebih maksimal.

DAFTAR PUSTAKA

Ata, O.N. 2007. Mathematical Modelling of Unsteady-State Transport of Metal Ions Through Supported Liquid Membrane. *Journal of Hydrometallurgy*. **87**:148-156.

Bellomo, N. & Preziosi, L. 1995. *Modeling Mathematical Methods and Scientific Computation*. CRC Press, Florida.

Boyce, W.E. & DiPrima, R.C. 1986. *Elementary Differential Equations & Boundary Value Problems*. John Wiley & Sons, Inc., New York.

Djunaidi, M.C & Haris, A. 2003. Pemisahan Logam Berat Menggunakan Membran Cair Berpendukung dengan Variabel Konsentrasi Ion Logam dan pH Fasa Umpan. *Jurnal Kimia Sains dan Aplikasi*. **6**:1-4.

Epperson, J.F. 2013. *An Introduction to Numerical Methods and Analysis*. 2nd Edition. John Wiley & Sons Inc, New Jersey.

Heinz, S. 2011. *Mathematical Modelling.* Springer Heidelberg Dordrecht, New York.

Hidayat, R. 2006. *Persamaan Diferensial Parsial*. Penerbitan Universitas Jember, Jember.

Ozisik, M.N. 1993. *Heat Conduction*. 2nd Edition. John Wiley & Sons Inc, New York.

Szpakowska, M. & Nagy, O.B. 1993. Non-steady State vs. Steady State Kinetic Analysis of Coupled Ion Transport Through Binary Liquid Membranes. *Journal of Membrane Science*. **76**:27-38.

Tosun, I. 2002. *Modelling in Transport Phenomena.* Elsevier Science, Turki.

Zain, F.M., Khadafi, M.G., & Gunawan, P.H. 2018. Analisis Konvergensi Metode Beda Hingga dalam Menghampiri Persamaan Difusi. *Jurnal Matematika*. **7(1):**1-4.