RUANG BARISAN SELISIH $l_\infty(\Delta_m)$

(Skripsi)

Oleh

RIZKI FATHURRAHMAN

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

ABSTRAK

RUANG BARISAN SELISIH $l_\infty(\Delta_m)$

OLEH

RIZKI FATHURRAHMAN

Ruang barisan sebagai salah satu konsep dalam analisis, yang membahas tentang barisan salah satunya adalah ruang barisan $l_\infty(\Delta_m)$. Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah membuktikan bahwa ruang barisan $l_\infty(\Delta_m)$ adalah ruang linier, ruang bernorma, dan ruang bernorma lengkap dan dari ketiga cara tersebut membuktikan bahwa ruang barisan $l_\infty(\Delta_m)$ merupakan ruang Banach.

Kata Kunci : Ruang Barisan, Ruang Norma, Ruang Banach.

ABSTRACT

DIFFERENCE SEQUENCE SPACES $\boldsymbol{l_\infty(\Delta_m)}$

By

RIZKI FATHURRAHMAN

Sequence spaces as one concepts in analysis, that discussed about sequence, one of them is $l_\infty(\Delta_m)$ sequence space. Research method used in this research is proving that $l_\infty(\Delta_m)$ sequence spaces is linier spaces, norm space and complete norm spaces. From the three ways, prove that $l_\infty(\Delta_m)$ space is Banach spaces.

Keyword : Sequences space, Norm space, Banach space.

RUANG BARISAN SELISIH $l_\infty(\Delta_m)$

Oleh

RIZKI FATHURRAHMAN

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

Judul Skripsi	:	**RUANG BARISAN SELISIH $l_\infty(\Delta_m)$**
Nama Mahasiswa	:	*Rizki Fathurrahman*
No. Pokok Mahasiswa	:	1517031151
Jurusan	:	Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.	**Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.**
NIP 19720227 199802 1 001	NIP 19620704 198803 1 002

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	: **Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.**	....
Sekretaris	: **Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	: **Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Drs. Suratman, M.Sc.
NIP 19640604 199003 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **24 April 2019**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama mahasiswa	: **RIZKI FATHURRAHMAN**
Nomor pokok mahasiswa	: **1517031151**
Jurusan	: **Matematika**
Judul skripsi	: **RUANG BARISAN SELISIH $l_{\infty}(\Delta_m)$**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, April 2019

Yang menyatakan,

METERAI TEMPEL
TGL 20
64F23AFF750849984
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Rizki Fathurrahman
NPM. 1517033151

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Rizki Fathurrahman, anak pertama dari dua bersaudara yang dilahirkan di Pekanbaru pada tanggal 28 April 1998 oleh pasangan Bapak As'ari Adnan dan Ibu Kusriauni.

Menempuh pendidikan di Taman Kanak-Kanak (TK) Al-Bunayyah Medan pada tahun 2003, Sekolah Dasar (SD) diselesaikan di SD Wahidin pada tahun 2009, kemudian bersekolah dan lulus di MTs Hidayatullah Denpasar pada tahun 2012, dan bersekolah di MAN 2 Model Pekanbaru pada tahun 2012-2015.

Pada tahun 2015 penulis terdaftar sebagai mahasiswa S1 Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui Jalur SBMPTN.

Pada tahun 2018 penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Kantor Dinas Pendidikan Kota Pekanbaru dan pada tahun yang sama penulis melakukan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Gunung Katun Tanjungan Kecamatan Tulang Bawang Udik Kabupaten Tulang Bawang Barat.

KATA INSPIRASI

"Dan Dia memberinya rejeki dari arah yang tidak disangka-sangkanya. Dan barangsiapa yang bertawakal kepada Allah niscaya Allah akan mencukupkan (keperluan)nya. Sesungguhnya Allah melaksanakan urusan (yang dikehendaki) Nya. Sesungguhnya Allah telah mengadakan ketentuan bagi tiap-tiap sesuatu. "

(Q.S Ath-Thalaq 65:3)

"Maka berilah peringatan, karena sesungguhnya kamu hanyalah orang yang memberi peringatan."

(Q.S Al-Ghaasyiyah 88:26)

"Hidup itu perjuangan, maka perjuangkanlah. Dan jika saja kemungkinan itu kecil, maka pastikan perjuangan itu besar"

(Rizki Fathurrahman)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirabbil'alamin

Dengan kerendaan hati dan rasa bersukur kepada Allah SWT

Kupersembakan karya ini kepada :

Orang tua tercinta Bapak As'ari Adnan dan Ibu Kusriauni atas doa, dukungan dan kasih sayang yang terus diberikan serta kerja keras dalam merawat, membesarkan penulis hingga sekarang. Serta adik saya Khoirunnisa yang selalu memberi semangat dan kasih sayang

Para pendidik, guru – guru, serta dosen yang telah meluangkan waktu untuk menurunkan ilmunya kepada penulis.

Semua sahabat terbaik yang terus mendukung, menolong, memberikan semangat dalam proses hidup penulis.

Almamater Unila dan Negriku Indonesia.

SANWACANA

Dengan mengucapkan *Alhamdulillah* penulis panjatkan puji syukur kehadirat Allah SWT atas rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "RUANG BARISAN SELISIH $l_\infty(\Delta_m)$". Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si.) di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Dengan ketulusan hati penulis ingin mengucapkan terima kasih banyak kepada :

1. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing I, terima kasih untuk bimbingan dan kesedian waktunya selama penyusunan skripsi ini.
2. Bapak Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D. selaku Dosen Pembimbing II, terima kasih untuk bantuan dan masukannya selama penyusunan skripsi.
3. Ibu Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si. selaku Dosen Penguji, terima kasih atas kesediannya untuk menguji, memberikan saran dan kritik yang membangun dalam penyelesaian skripsi ini.
4. Bapak Ir. Warsono, M.S., Ph.D. selaku Pembimbing Akademik, terima kasih atas bimbingan dan pembelajarannya dalam menjalani perkuliahan.
5. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, MA., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

6. Bapak Drs. Suratman, M.Sc. selaku Dekan FMIPA Universitas Lampung.
7. Seluruh Dosen dan Karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
8. Bapak As’ari Adnan dan Ibu Kusriauni tercinta yang tak pernah berhenti memberi semangat, doa, dorongan, nasehat dan kasih sayang serta pengorbanan yang tak tergantikan hingga penulis selalu kuat menjalani setiap rintangan yang ada di depan.
9. Nisa, Feren, Mama Lia dan keluarga besarku yang selalu berbagi canda dan tawa serta selalu menyemangati hingga terselesaikannya skripsi ini.
10. Rina Karina Agustina S.Si yang selalu menemani dan memberikan semangat serta perhatiannya selama menyelesaikan skripsi ini.
11. Sahabat – sahabat seperjuangan menuju wisuda Anggun, Irun, Nurah, Rani, Thalia, Tasia dan Tirai yang selalu siap sedia dari usul, hasil sampai ujian skripsi serta semangat hingga terselesaikannya skripsi ini.
12. Para Pejuang S.Si. Edwin, Amargie, Nathan, Dony, Lut, Randy, Topan yang selalu mendukung dan mendorong agar penulis mendapatkan tier mythic.
13. Teman-teman bimbingan Della, Aulia, Nurlita, dan Vina yang mendukung selama menyelesaikan skripsi ini.
14. Teman-teman angkatan 2015 jurusan matematika.
15. Almamater tercinta Universitas Lampung.

Bandar Lampung,   April 2019
Penulis

Rizki Fathurrahman

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL DAN NOTASI

(x_k) : Barisan bilangan untuk k =1,2,3, ...

(Δx_k) : Barisan selisih tingkat pertama (selisih suku ke k + 1 dan suku ke k)

$(\Delta_2 x_k)$: Barisan selisih tingkat kedua

l_∞ : Ruang barisan ∞

$l_\infty(\Delta)$: Ruang barisan selisih pertama di l_∞

$l_\infty(\Delta_2)$: Ruang barisan selisih kedua di l_∞

$l_\infty(\Delta_3)$: Ruang barisan selisih ketiga di l_∞

$l_\infty(\Delta_m)$: Ruang barisan selisih ke-m di l_∞

$\|.\|$: Norm

$\|.\|_\infty$: Norm di ruang l_∞

$\{\tilde{x}^{(j)}\}$: Himpunan Barisan Cauchy

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Matematika sebagai salah satu ilmu pasti memiliki peranan penting dalam perkembangan maupun kemajuan sains dan teknologi. Beberapa teori pemikiran ahli matematika digunakan sebagai dasar pemikiran pengambilan keputusan, dan sebagai bahan pertimbangan. Oleh karena itu, perkembangan ilmu matematika sangat dibutuhkan.

Salah satu bidang kajian matematika adalah bidang analisis, bidang ini merupakan bagian dari matematika, bidang ini membahas tentang konsep ruang barisan.

Ruang barisan sebagai salah satu konsep yang ada di bidang analisis membahas tentang ruang barisan yang diantaranya adalah $l_{\infty,}\mathrm{c}, \mathrm{c}_0,$ dan l_p. Salah satu pakar matematika H. Kizmas (1981) yang meneliti syarat yang diperlukan oleh suatu matriks tak terhingga dari ruang barisan ke ruang barisan. Kemudian dasar pemikiran tersebut digunakan oleh colak R (1995), beliau menambahkan sebuah kondisi kedalam ruang barisan tersebut sehingga menjadi ruang barisan $l_\infty(\Delta)$, $\mathrm{c}(\Delta), \mathrm{c}_0(\Delta)$, dan $l_p(\Delta)$. Dari pemikiran diatas penulis mencoba mengkaji lebih dalam tentang salah satu ruang barisan, yaitu barisan $l_\infty(\Delta_m)$.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini adalah mengkaji dan mempelajari sifat ruang barisan l_∞, ruang barisan selisih $l_\infty(\Delta)$, dan $l_\infty(\Delta_m)$.

1.3 Manfaat penelitian

Adapun manfaat penelitian ini adalah

1. Memberi informasi tentang ruang barisan l_∞, ruang barisan selisih $l_\infty(\Delta)$, dan $l_\infty(\Delta_m)$.
2. Dapat memberi ide bagi penulis lain untuk meneliti lebih lanjut tentang ruang barisan selisih.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pengertian Dasar

Definisi 2.1.1 Ruang Bernorm

Diberikan ruang linear X. Fungsi $\|\cdot\| : X \to R$ yang mempunyai sifat-sifat :

i. $\|x\| \geq 0$ untuk setiap $x \in X$
ii. $\|x\| = 0$, jika dan hanya jika $x = 0$, (0 vektor nol)
iii. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ untuk setiap skalar α dan $x \in X$.
iv. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ untuk setiap $x, y \in X$

disebut norma (*norm*) pada X dan bilangan nonnegatif $\|x\|$ disebut norma vektor x. Ruang linear X yang dilengkapi dengan suatu norma $\|\cdot\|$ disebut ruang bernorma (*norm space*) dan dituliskan singkat dengan $(X, \|\cdot\|)$ atau X saja asalkan normanya telah diketahui. (Darmawijaya, 2007)

Lemma 2.1.2

Dalam ruang linear bernorma X berlaku $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ untuk setiap $x, y \in X$. (Maddox, 1970)

Bukti :

untuk setiap $x, y \in X$ diperoleh :

$\|x\| - \|y\| = \|x - y + y\| - \|y\| \leq \|x - y\| + \|y\| - \|y\| = \|x - y\|$.

Definisi 2.1.2

Barisan $\{x_n\}$ di dalam ruang bernorma X dikatakan **konvergen** (*convergent*) jika ada $x \in X$ sehingga untuk setiap bilangan asli ε>0 terdapat bilangan asli n_0 (bergantung pada ε), sehingga untuk setiap bilangan asli $n \geq n_0$ berlaku.

$$\|x_n - x\| < \varepsilon$$

Jika demikian halnya, dikatakan barisan $\{x_n\}$ konvergen ke x atau barisan $\{x_n\}$ mempunyai limit x untuk $n \to \infty$ dan ditulis dengan

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \varepsilon$$

atau dapat ditulis dengan $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Sedangkan titik x disebut titik limit barisan $\{x_n\}$. (Gozali, 2009)

Definisi 2.1.3

Barisan $\{x_n\}$ di dalam ruang bernorma $(X, \|.\|)$ disebut barisan Cauchy atau **barisan fundamental** jika untuk setiap bilangan ε>0 terdapat bilangan asli n_0, sehingga untuk setiap dua bilangan asli $m,n \geq n_0$ berlaku $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$. (Robert and Ronald, 2000)

Teorema 2.1.4

Setiap barisan yang konvergen di dalam ruang bernorma $(X, \|.\|)$ merupakan barisan Chaucy. (Robert and Ronald, 2000)

Definisi 2.1.5

Ruang bernorma dikatakan lengkap (*complete*) jika setiap barisan Cauchy di dalamnya konvergen. (Robert and Ronald, 2000)

Definisi 2.1.6 Ruang Banach

Ruang Banach (*Banach space*) adalah ruang bernorma yang lengkap, jika dalam suatu ruang bernorma X berlaku kondisi bahwa setiap barisan Cauchy di X adalah konvergen. (Darmawijaya, 2007)

Teorema 2.1.7 (**Ketaksamaan Ho'lder**)

i. $untuksetiap\,\tilde{x} = \{x_n\} \in \ell_1$ dan $\tilde{y} = \{y_n\} \in \ell_\infty$ $benar\ bahwa$

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n \bar{y}_n| \leq \|\tilde{x}\|_1 . \|\tilde{y}\|_\infty$$

$$\text{dengan } \|\tilde{x}\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \text{ dan } \|\bar{y}\| = \sup_{k \geq 1} |y_k|$$

ii. $jika\ 1 < p, q < \infty\ dan\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\quad maka\quad untuk\quad setiap\ \tilde{x} = \{x_n\} \in \ell_p$, dan $\tilde{y} = \{y_n\} \in \ell_p$ $benar\ bahwa$

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n \bar{y}_n| \leq \|\tilde{x}\|_p . \|\tilde{y}\|_q$$

$$\text{dengan } \|\tilde{x}\|_p = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \text{ dan } \|\tilde{y}\|_q = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \right\}^{\frac{1}{q}}$$

(Robert and Ronald, 2000).

Teorema 2.1.8 (Ketaksamaan Minkowski)

Jika $1 \leq p < \infty$ maka untuk setiap $\tilde{x} = \{x_n\}, \tilde{y} = \{y_n\} \in \ell_p$ benar bahwa

$$\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_p \leq \|\tilde{x}\|_p + \|\tilde{y}\|_p$$

(Robert and Ronald, 2000).

2.2 Barisan

Definisi 2.2.1

Barisan adalah suatu fungsi yang domainnya adalah himpunan bilangan asli. Misal terdapat bilangan bulat positif $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ yang bersesuaian dengan bilangan real x_n tertentu, maka $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ dikatakan barisan. (Mizrahi dan Sulivan, 1982)

Definisi 2.2.2

Bilangan-bilangan $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ disebut barisan bilangan tak hingga c_n disebut suku umum dari barisan. Bilangan $n, (n = 1, 2, 3, \ldots)$ adalah nomor urut atau indeks yang menunjukkan letak bilangan tersebut dalam barisan. (Yahya, Suryadi, Agus, 1990)

Definisi 2.2.3

Misal L adalah suatu bilangan real dan $\{x_n\}$ suatu barisan, $\{x_n\}$ konvergen ke L jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat suatu bilangan asli $\mathbb{N}$, sehingga $|x_n - L| < \varepsilon$ untuk setiap $n > N$

Suatu bilangan L dikatakan limit dari suatu barisan takhingga $x_1, x_2, \ldots$ jika ada bilangan real positif ε sehingga dapat ditemukan bilangan asli $\mathbb{N}$ yang tergantung pada ε sehingga $|x_n - L| < \varepsilon$ untuk setiap $n > N$, dan suatu barisan dikatakan konvergen jika ia mempunyai nilai limit. (Mizrahi dan Sulivan, 1982)

Teorema 2.2.4

Setiap barisan bilangan real yang konvergen selalu terbatas. (Martono, 1984)

Bukti :

Misalkan barisan bilangan real $\{a_n\}$ konvergen ke a, akan ditunjukkan terdapat suatu bilangan real $\varepsilon > 0$ sehinga $|a_n| \leq M$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Karena $\{a_n\}$ konvergen ke a, maka terapat suatu $n_0 \in N$ sehingga $n > n_0 \Longrightarrow |a_n - a| < 1$. Akibatnya $|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$ untuk setiap $n > n_0$. Ambillah $M = maks\left(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0}|, |a| + 1\right)$, maka setiap $n \in M$ berlaku $|a_n| \leq M$, yang berarti bahwa barisan bilangan real $\{a_n\}$ terbatas.

Definisi 2.2.5

Suatu barisan $\{x_n\}$ dikatakan mempunyai limit L bila untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ dapat dicari suatu nomor indeks n_0 sedemikian sehingga untuk $n \geq n_0$ berlaku $L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon$ (atau $|x_n - L| < \varepsilon$) artinya jika L adalah limit dari $\{x_n\}$ maka x_n mendekati L jika n mendekati tak hingga. (Yahya, Suryadi, Agus, 1990)

Definisi 2.2.6

Suatu barisan yang mempunyai limit dinamakan barisan konvergen dan barisan yang tak konvergen dinamakan barisan divergen. (Martono, 1984)

Definisi 2.2.7

Diberikan ω yaitu koleksi semua barisan bilangan *real*. (Darmawijaya, 2007)

jadi :

$$\omega = \{\bar{x} = \{x_n\}: x_n \in \mathbb{R}\}$$

Untuk setiap bilangan *real p* dengan $1 \leq p < \infty$ didefinisikan

$$l_p = \left\{x \in \{x_n\} \in \omega: \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\right\}$$

dan norm pada l_p yaitu

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Definisi 2.2.8

Misal $p, q \in (1, \infty)$ dengan $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (q konjugat p), untuk $x \in l_p$ dan $y \in l_p$

$(x_n y_n)_{n \in N} \in l_p$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \|x\|^p \|y\|^q$. (Darmawijaya, 2007)

Teorema 2.2.9

$l_p (1 \leq p < \infty)$ merupakan ruang bernorma terhadap norm $\|.\|_p$. (Darmawijaya, 2007)

Bukti :

Untuk $1 \leq p < \infty$ diambil sebarang $\tilde{x} = \{x_n\}, \tilde{y} = \{y_n\} \in l_p$ dan skalar α.

Diperoleh :

i) $\|\tilde{x}\|_p = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \geq 0$ karena $|x_n| \geq 0$ untuk setiap n.

$$\|\tilde{x}\|_p = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = 0 \Leftrightarrow |x_k| \geq 0 \text{ untuk setiap } k \Leftrightarrow \tilde{x} = \{0\} = \tilde{0}$$

ii) $\quad \|\alpha\tilde{x}\|_{\mathrm{p}} = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha x_n|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \left\{\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha x_n|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = |\alpha|\|x\|_p$

jelas bahwa $\|\alpha x\|_\infty < \infty$

iii) $\quad \|\tilde{x} + \tilde{y}\|_p \leq \|\tilde{x}\|_p + \|\tilde{y}\|_p = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha x_n|^p\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty.$

Berdasarkan iv), v) dan vi) terbukti bahwa l_p merupakan ruang linear dan $\|.\|_p$ norm pada l_p. Dengan kata lain $(l_p, \|.\|_p)$ ruang bernorm.

Teorema 2.2.10

Jika bilangan *real* p dengan $1 \leq p < \infty$, maka $(l_p, \|.\|_p)$ merupakan Ruang Banach. (Darmawijaya, 2007)

Definisi 2.2.11

Ruang barisan, Himpunan dari barisan bilangan yang memiliki syarat

$$l_\infty = \left\{x = (x_n) \in X : \sup_{n \geq 1} |x_n| < \infty\right\}$$

l_∞ koleksi barisan bilangan yang $\sup_{n\geq 1}|x_n| < \infty$.

$$l_\infty(\Delta) = \{x = (x_n) \colon \Delta x \in l_\infty\}$$

$l_\infty(\Delta)$koleksi barisan bilangan yang $\Delta x \in l_\infty$

$$l_\infty(\Delta_m) = \{x = (x_n) \colon \Delta_m x \in l_\infty\}$$

$l_\infty(\Delta_m)$ koleksi barisan bilangan yang $\Delta_m x \in l_\infty$

(H.Kizmaz,1981)

2.3 Ruang Barisan Selisih

Definisi 2.3.1

Diperlihatkan barisan selisi bilangan sebagai berikut :

Jika $\tilde{x} = \{x_n\}$ suatu barisan bilangan dan

$\Delta\tilde{x} = \{x_{n+1} - x_n\}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$

$\Delta\tilde{x}$ disebut barisan selisih pertama terhadap barisan$\tilde{x} = \{x_n\}$

$$\vdots$$

$\Delta_m\tilde{x} = \left\{\Delta_m\tilde{x}_n = \sum_{i=0}^{m}(-1)^i \binom{m}{i} x_{n+m-i}\right\}$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$

$\Delta_m\tilde{x}$ disebut barisan selisih ke-m terhadap barisan $\tilde{x} = \{x_n\}$

Berdasarkan gambaran di atas maka dibentuklah barisan bilangan $\Delta\tilde{x} = \{\Delta x_n\}, \Delta_2\tilde{x} = \{\Delta_2 x_n\}, \dots, \Delta_m x_m = \{\Delta_m x_n\}$ yang disebut dengan barisan selisih pertama, barisan selisih kedua, dan seterusnya sampai barisan selisih ke-m. (H.Kizmaz,1981)

III. METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2018/2019 di jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini antara lain :

1. Membuktikan bahwa ruang l_∞, adalah ruang bernorma , ruang bernorma lengkap, dan merupakan ruang Banach.
2. Membuktikan bahwa ruang $l_\infty(\Delta)$, adalah ruang bernorma , ruang bernorma lengkap, dan merupakan ruang Banach.
3. Membuktikan bahwa ruang $l_\infty(\Delta_2)$, adalah ruang bernorma , ruang bernorma lengkap, dan merupakan ruang Banach.
4. Membuktikan bahwa ruang $l_\infty(\Delta_3)$, adalah ruang bernorma , ruang bernorma lengkap, dan merupakan ruang Banach.
5. Membuktikan bahwa ruang $l_\infty(\Delta_m)$, adalah ruang bernorma , ruang bernorma lengkap, dan merupakan ruang Banach.

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan sebelumnya dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut :

1. Ruang barisan $(l_\infty, \|.\|_\infty)$ dengan norma $\|\tilde{x}\|_\infty = \sup_{k\geq 1}|x_k|$ merupakan ruang Banach.
2. Ruang Barisan $(l_\infty(\Delta), \|.\|_{(\Delta,\infty)})$ dengan norma $\|\tilde{x}\|_{(\Delta,\infty)} = |x_1| + \|\Delta\tilde{x}\|_\infty$ merupakan ruang Banach.
3. Ruang Barisan $(l_\infty(\Delta_2), \|.\|_{(\Delta_2,\infty)})$ dengan norma $\|\tilde{x}\|_{(\Delta_2,\infty)} = |x_1| + |x_2| + \|\Delta_2\tilde{x}\|_\infty$ merupakan ruang Banach.
4. Ruang Barisan $(l_\infty(\Delta_3), \|.\|_{(\Delta_3,\infty)})$ dengan norma $\|\tilde{x}\|_{(\Delta_3,\infty)} = |x_1| + |x_2| + |x_3| + \|\Delta_3\tilde{x}\|_\infty$ merupakan ruang Banach.
5. Ruang Barisan $(l_\infty(\Delta_m), \|.\|_{(\Delta_m,\infty)})$ dengan norma $\|\tilde{x}\|_{(\Delta_m,\infty)} = |x_1| + |x_2| + |x_3| + \cdots |x_m| + \|\Delta_m\tilde{x}\|_\infty$ merupakan ruang Banach.

5.2 Saran

Selisih ruang barisan $l_\infty, l_\infty(\Delta), l_\infty(\Delta_2), l_\infty(\Delta_3), l_\infty(\Delta_m)$ yang telah dibahas dapat dilanjutkan kembali oleh pembaca yang tertarik meneliti bidang analisis matematika terutama ruang barisan. Karena peneliti hanya meneliti $l_\infty(\Delta_m)$ merupakan ruang banach, pembaca dapat membuktikkan bahwa $l_\infty(\Delta_m)$ apakah ruang-BK, solid, dan lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Darmawijaya, S. 2007. *Pengantar Analisis Abstrak*. Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.

Gozali, M. 2009. *Ruang Norm dan Ruang Banach.* Universitas Pendidikan Indonesia. Bandung

Kizmaz, H. 1981. *On Certain Sequance Spaces.* Karadeniz Teknik Universities, Turkey.

Maddox,I.J. 1970. *Element of Functional Analysis*.Cambridge Univercity Press, London.

Martono, K. 1984. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik 2*. Angkasa, Bandung.

Mizrahi, A. dan Sullivan, M. 1982.*Calculus and Analytic Geometry*. Wadsworth Publishing Company Belmont, California.

Robert, G. Ronald R. 2000. *Introduction to Real Analysis.* John Wiley & Sons,inc, New York

Yahya, dkk. 1990. *Matematika Dasar Untuk Perguruan Tinggi*. Ghalia Indonesia, Jakarta.