

**RUANG BARISAN SELISIH  $l_\infty(\Delta_m)$**

**(Skripsi)**

**Oleh**

**RIZKI FATHURRAHMAN**



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS LAMPUNG  
BANDAR LAMPUNG  
2019**

## ABSTRAK

### RUANG BARISAN SELISIH $l_\infty(\Delta_m)$

OLEH

**RIZKI FATHURRAHMAN**

Ruang barisan sebagai salah satu konsep dalam analisis, yang membahas tentang barisan salah satunya adalah ruang barisan  $l_\infty(\Delta_m)$ . Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah membuktikan bahwa ruang barisan  $l_\infty(\Delta_m)$  adalah ruang linier, ruang bernorma, dan ruang bernorma lengkap dan dari ketiga cara tersebut membuktikan bahwa ruang barisan  $l_\infty(\Delta_m)$  merupakan ruang Banach.

**Kata Kunci :** Ruang Barisan, Ruang Norma, Ruang Banach.

## **ABSTRACT**

### **DIFFERENCE SEQUENCE SPACES $l_\infty(\Delta_m)$**

**By**

**RIZKI FATHURRAHMAN**

Sequence spaces as one concepts in analysis, that discussed about sequence, one of them is  $l_\infty(\Delta_m)$  sequence space. Research method used in this research is proving that  $l_\infty(\Delta_m)$  sequence spaces is linier spaces, norm space and complete norm spaces. From the three ways, prove that  $l_\infty(\Delta_m)$  space is Banach spaces.

**Keyword** : Sequences space, Norm space, Banach space.

**RUANG BARISAN SELISIH  $l_\infty(\Delta_m)$**

**Oleh**

**RIZKI FATHURRAHMAN**

**Skripsi**

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar  
**SARJANA SAINS**

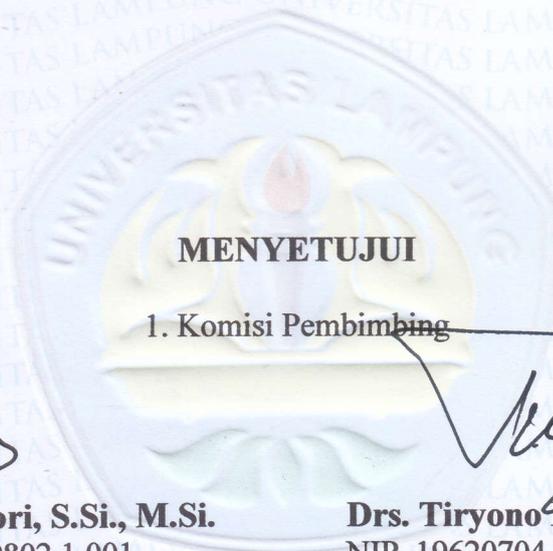
Pada

Jurusan Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Lampung



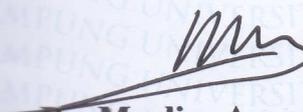
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS LAMPUNG  
BANDAR LAMPUNG  
2019**

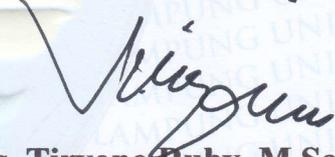
Judul Skripsi : **RUANG BARISAN SELISIH  $l_{\infty}(\Delta_m)$**   
Nama Mahasiswa : **Rizki Fathurrahman**  
No. Pokok Mahasiswa : 1517031151  
Jurusan : Matematika  
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



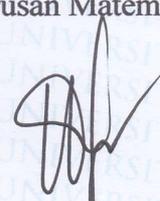
**MENYETUJUI**

1. Komisi Pembimbing

  
**Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.**  
NIP 19720227 199802 1 001

  
**Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.**  
NIP 19620704 198803 1 002

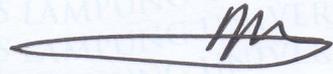
2. Ketua Jurusan Matematika

  
**Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.**  
NIP 19631108 198902 2 001

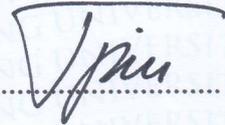
**MENGESAHKAN**

**1. Tim Penguji**

**Ketua : Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.** .....



**Sekretaris : Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.** .....



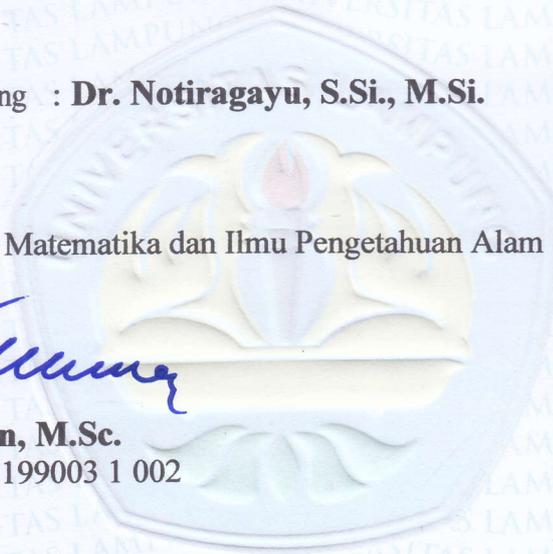
**Penguji  
Bukan Pembimbing : Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si.** .....



**2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**



**Drs. Suratman, M.Sc.**  
NIP 19640604 199003 1 002



**Tanggal Lulus Ujian Skripsi : 24 April 2019**

## PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan dibawah ini:

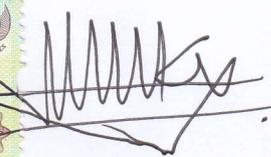
Nama mahasiswa : **RIZKI FATHURRAHMAN**  
Nomor pokok mahasiswa : **1517031151**  
Jurusan : **Matematika**  
Judul skripsi : **RUANG BARISAN SELISIH  $l_{\infty}(\Delta_m)$**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, April 2019

Yang menyatakan,



  
**Rizki Fathurrahman**  
**NPM. 1517033151**

## **RIWAYAT HIDUP**

Penulis bernama lengkap Rizki Fathurrahman, anak pertama dari dua bersaudara yang dilahirkan di Pekanbaru pada tanggal 28 April 1998 oleh pasangan Bapak As'ari Adnan dan Ibu Kusriauni.

Menempuh pendidikan di Taman Kanak-Kanak (TK) Al-Bunayyah Medan pada tahun 2003, Sekolah Dasar (SD) diselesaikan di SD Wahidin pada tahun 2009, kemudian bersekolah dan lulus di MTs Hidayatullah Denpasar pada tahun 2012, dan bersekolah di MAN 2 Model Pekanbaru pada tahun 2012-2015.

Pada tahun 2015 penulis terdaftar sebagai mahasiswa S1 Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui Jalur SBMPTN.

Pada tahun 2018 penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Kantor Dinas Pendidikan Kota Pekanbaru dan pada tahun yang sama penulis melakukan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Gunung Katun Tanjung Kecamatan Tulang Bawang Udik Kabupaten Tulang Bawang Barat.

## **KATA INSPIRASI**

“Dan Dia memberinya rejeki dari arah yang tidak disangka-sangkanya. Dan barangsiapa yang bertawakal kepada Allah niscaya Allah akan mencukupkan (keperluan)nya. Sesungguhnya Allah melaksanakan urusan (yang dikehendaki) Nya. Sesungguhnya Allah telah mengadakan ketentuan bagi tiap-tiap sesuatu. ”

**(Q.S Ath-Thalaq 65:3)**

“Maka berilah peringatan, karena sesungguhnya kamu hanyalah orang yang memberi peringatan.”

**(Q.S Al-Ghaasyiyah 88:26)**

“Hidup itu perjuangan, maka perjuangkanlah. Dan jika saja kemungkinan itu kecil, maka pastikan perjuangan itu besar”

**(Rizki Fathurrahman)**

## PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirabbil'amin

Dengan kerendahan hati dan rasa bersyukur kepada Allah SWT

Kupersembakan karya ini kepada :

Orang tua tercinta Bapak As'ari Adnan dan Ibu Kusriauni atas doa, dukungan dan kasih sayang yang terus diberikan serta kerja keras dalam merawat, membesarkan penulis hingga sekarang. Serta adik saya Khoirunnisa yang selalu memberi semangat dan kasih sayang

Para pendidik, guru - guru, serta dosen yang telah meluangkan waktu untuk menurunkan ilmunya kepada penulis.

Semua sahabat terbaik yang terus mendukung, menolong, memberikan semangat dalam proses hidup penulis.

Almamater Unila dan Negriku Indonesia.

## SANWACANA

Dengan mengucapkan *Alhamdulillah* penulis panjatkan puji syukur kehadiran Allah SWT atas rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “RUANG BARISAN SELISIH  $l_\infty(\Delta_m)$ ”. Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si.) di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Dengan ketulusan hati penulis ingin mengucapkan terima kasih banyak kepada :

1. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing I, terima kasih untuk bimbingan dan kesedian waktunya selama penyusunan skripsi ini.
2. Bapak Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D. selaku Dosen Pembimbing II, terima kasih untuk bantuan dan masukannya selama penyusunan skripsi.
3. Ibu Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si. selaku Dosen Penguji, terima kasih atas kesediannya untuk menguji, memberikan saran dan kritik yang membangun dalam penyelesaian skripsi ini.
4. Bapak Ir. Warsono, M.S., Ph.D. selaku Pembimbing Akademik, terima kasih atas bimbingan dan pembelajarannya dalam menjalani perkuliahan.
5. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, MA., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

6. Bapak Drs. Suratman, M.Sc. selaku Dekan FMIPA Universitas Lampung.
7. Seluruh Dosen dan Karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
8. Bapak As'ari Adnan dan Ibu Kusriauni tercinta yang tak pernah berhenti memberi semangat, doa, dorongan, nasehat dan kasih sayang serta pengorbanan yang tak tergantikan hingga penulis selalu kuat menjalani setiap rintangan yang ada di depan.
9. Nisa, Feren, Mama Lia dan keluarga besarku yang selalu berbagi canda dan tawa serta selalu menyemangati hingga terselesaikannya skripsi ini.
10. Rina Karina Agustina S.Si yang selalu menemani dan memberikan semangat serta perhatiannya selama menyelesaikan skripsi ini.
11. Sahabat – sahabat seperjuangan menuju wisuda Anggun, Irun, Nurah, Rani, Thalia, Tasia dan Tirai yang selalu siap sedia dari usul, hasil sampai ujian skripsi serta semangat hingga terselesaikannya skripsi ini.
12. Para Pejuang S.Si. Edwin, Amargie, Nathan, Dony, Lut, Randy, Topan yang selalu mendukung dan mendorong agar penulis mendapatkan tier mythic.
13. Teman-teman bimbingan Della, Aulia, Nurlita, dan Vina yang mendukung selama menyelesaikan skripsi ini.
14. Teman-teman angkatan 2015 jurusan matematika.
15. Almamater tercinta Universitas Lampung.

Bandar Lampung, April 2019  
Penulis

**Rizki Fathurrahman**

## DAFTAR ISI

### I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah .....	1
1.2 Tujuan Penelitian .....	2
1.3 Manfaat Penelitian .....	2

### II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pegertian Dasar .....	3
2.2 Barisan.....	6
2.3 Ruang Barisan Selisih.....	10

### III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian.....	11
3.2 Metode Penelitian.....	11

### IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Ruang Barisan $l_{\infty}$ .....	12
4.2 Ruang Barisan Selisih $l_{\infty}(\Delta)$ .....	16
4.3 Sifat Pada Ruang Barisan Selisih $l_{\infty}(\Delta_2)$ .....	24
4.3 Sifat Pada Ruang Barisan Selisih $l_{\infty}(\Delta_3)$ .....	31
4.3 Sifat Pada Ruang Barisan Selisih $l_{\infty}(\Delta_m)$ .....	39

### V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan.....	46
5.2 Saran.....	46

### DAFTAR PUSTAKA

## DAFTAR SIMBOL DAN NOTASI

$(x_k)$  : Barisan bilangan untuk  $k = 1, 2, 3, \dots$

$(\Delta x_k)$  : Barisan selisih tingkat pertama (selisih suku ke  $k + 1$  dan suku ke  $k$ )

$(\Delta_2 x_k)$  : Barisan selisih tingkat kedua

$l_\infty$  : Ruang barisan  $\infty$

$l_\infty(\Delta)$  : Ruang barisan selisih pertama di  $l_\infty$

$l_\infty(\Delta_2)$  : Ruang barisan selisih kedua di  $l_\infty$

$l_\infty(\Delta_3)$  : Ruang barisan selisih ketiga di  $l_\infty$

$l_\infty(\Delta_m)$  : Ruang barisan selisih ke- $m$  di  $l_\infty$

$\|\cdot\|$  : Norm

$\|\cdot\|_\infty$  : Norm di ruang  $l_\infty$

$\{\tilde{x}^{(j)}\}$  : Himpunan Barisan Cauchy

# I. PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang Masalah

Matematika sebagai salah satu ilmu pasti memiliki peranan penting dalam perkembangan maupun kemajuan sains dan teknologi. Beberapa teori pemikiran ahli matematika digunakan sebagai dasar pemikiran pengambilan keputusan, dan sebagai bahan pertimbangan. Oleh karena itu, perkembangan ilmu matematika sangat dibutuhkan.

Salah satu bidang kajian matematika adalah bidang analisis, bidang ini merupakan bagian dari matematika, bidang ini membahas tentang konsep ruang barisan.

Ruang barisan sebagai salah satu konsep yang ada di bidang analisis membahas tentang ruang barisan yang diantaranya adalah  $l_\infty, c, c_0$ , dan  $l_p$ . Salah satu pakar matematika H. Kizmas (1981) yang meneliti syarat yang diperlukan oleh suatu matriks tak terhingga dari ruang barisan ke ruang barisan. Kemudian dasar pemikiran tersebut digunakan oleh Colak R (1995), beliau menambahkan sebuah kondisi kedalam ruang barisan tersebut sehingga menjadi ruang barisan  $l_\infty(\Delta)$ ,  $c(\Delta)$ ,  $c_0(\Delta)$ , dan  $l_p(\Delta)$ . Dari pemikiran diatas penulis mencoba mengkaji lebih dalam tentang salah satu ruang barisan, yaitu barisan  $l_\infty(\Delta_m)$ .

## 1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini adalah mengkaji dan mempelajari sifat ruang barisan  $l_\infty$ , ruang barisan selisih  $l_\infty(\Delta)$ , dan  $l_\infty(\Delta_m)$ .

## 1.3 Manfaat penelitian

Adapun manfaat penelitian ini adalah

1. Memberi informasi tentang ruang barisan  $l_\infty$ , ruang barisan selisih  $l_\infty(\Delta)$ , dan  $l_\infty(\Delta_m)$ .
2. Dapat memberi ide bagi penulis lain untuk meneliti lebih lanjut tentang ruang barisan selisih.

## II. TINJAUAN PUSTAKA

### 2.1 Pengertian Dasar

#### Definisi 2.1.1 Ruang Bernorm

Diberikan ruang linear  $X$ . Fungsi  $\|\cdot\| : X \rightarrow R$  yang mempunyai sifat-sifat :

- i.  $\|x\| \geq 0$  untuk setiap  $x \in X$
- ii.  $\|x\| = 0$ , jika dan hanya jika  $x = 0$ , (0 vektor nol)
- iii.  $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$  untuk setiap skalar  $\alpha$  dan  $x \in X$ .
- iv.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  untuk setiap  $x, y \in X$

disebut norma (*norm*) pada  $X$  dan bilangan nonnegatif  $\|x\|$  disebut norma vektor  $x$ . Ruang linear  $X$  yang dilengkapi dengan suatu norma  $\|\cdot\|$  disebut ruang bernorma (*norm space*) dan dituliskan singkat dengan  $(X, \|\cdot\|)$  atau  $X$  saja asalkan normanya telah diketahui. (Darmawijaya, 2007)

#### Lemma 2.1.2

Dalam ruang linear bernorma  $X$  berlaku  $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$  untuk setiap  $x, y \in X$ . (Maddox, 1970)

**Bukti :**

untuk setiap  $x, y \in X$  diperoleh :

$$\|x\| - \|y\| = \|x - y + y\| - \|y\| \leq \|x - y\| + \|y\| - \|y\| = \|x - y\|.$$

**Definisi 2.1.2**

Barisan  $\{x_n\}$  di dalam ruang bernorma  $X$  dikatakan **konvergen** (*convergent*) jika ada  $x \in X$  sehingga untuk setiap bilangan asli  $\varepsilon > 0$  terdapat bilangan asli  $n_0$  (bergantung pada  $\varepsilon$ ), sehingga untuk setiap bilangan asli  $n \geq n_0$  berlaku.

$$\|x_n - x\| < \varepsilon$$

Jika demikian halnya, dikatakan barisan  $\{x_n\}$  konvergen ke  $x$  atau barisan  $\{x_n\}$  mempunyai limit  $x$  untuk  $n \rightarrow \infty$  dan ditulis dengan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| < \varepsilon$$

atau dapat ditulis dengan  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . Sedangkan titik  $x$  disebut titik limit barisan  $\{x_n\}$ . (Gozali, 2009)

**Definisi 2.1.3**

Barisan  $\{x_n\}$  di dalam ruang bernorma  $(X, \|\cdot\|)$  disebut barisan Cauchy atau **barisan fundamental** jika untuk setiap bilangan  $\varepsilon > 0$  terdapat bilangan asli  $n_0$ , sehingga untuk setiap dua bilangan asli  $m, n \geq n_0$  berlaku  $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ . (Robert and Ronald, 2000)

**Teorema 2.1.4**

Setiap barisan yang konvergen di dalam ruang bernorma  $(X, \|\cdot\|)$  merupakan barisan Chauchy. (Robert and Ronald, 2000)

### Definisi 2.1.5

Ruang bernorma dikatakan lengkap (*complete*) jika setiap barisan Cauchy di dalamnya konvergen. (Robert and Ronald, 2000)

### Definisi 2.1.6 Ruang Banach

Ruang Banach (*Banach space*) adalah ruang bernorma yang lengkap, jika dalam suatu ruang bernorma  $X$  berlaku kondisi bahwa setiap barisan Cauchy di  $X$  adalah konvergen. (Darmawijaya, 2007)

### Teorema 2.1.7 ( Ketaksamaan Ho'lder )

i. untuk setiap  $\tilde{x} = \{x_n\} \in \ell_1$  dan  $\tilde{y} = \{y_n\} \in \ell_\infty$  benar bahwa

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n \bar{y}_n| \leq \|\tilde{x}\|_1 \cdot \|\tilde{y}\|_\infty$$

$$\text{dengan } \|\tilde{x}\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \text{ dan } \|\tilde{y}\| = \sup_{k \geq 1} |y_k|$$

ii. jika  $1 < p, q < \infty$  dan  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , maka untuk setiap  $\tilde{x} = \{x_n\} \in \ell_p$ , dan  $\tilde{y} = \{y_n\} \in \ell_q$  benar bahwa

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n \bar{y}_n| \leq \|\tilde{x}\|_p \cdot \|\tilde{y}\|_q$$

$$\text{dengan } \|\tilde{x}\|_p = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \text{ dan } \|\tilde{y}\|_q = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \right\}^{\frac{1}{q}}$$

(Robert and Ronald, 2000).

**Teorema 2.1.8 ( Ketaksamaan Minkowski )**

Jika  $1 \leq p < \infty$  maka untuk setiap  $\tilde{x} = \{x_n\}, \tilde{y} = \{y_n\} \in \ell_p$  benar bahwa

$$\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_p \leq \|\tilde{x}\|_p + \|\tilde{y}\|_p$$

(Robert and Ronald, 2000).

**2.2 Barisan**

**Definisi 2.2.1**

Barisan adalah suatu fungsi yang domainnya adalah himpunan bilangan asli. Misal terdapat bilangan bulat positif  $1, 2, 3, \dots, n, \dots$  yang bersesuaian dengan bilangan real  $x_n$  tertentu, maka  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  dikatakan barisan. (Mizrahi dan Sullivan, 1982)

**Definisi 2.2.2**

Bilangan-bilangan  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$  disebut barisan bilangan tak hingga  $c_n$  disebut suku umum dari barisan. Bilangan  $n, (n = 1, 2, 3, \dots)$  adalah nomor urut atau indeks yang menunjukkan letak bilangan tersebut dalam barisan. (Yahya, Suryadi, Agus, 1990)

**Definisi 2.2.3**

Misal  $L$  adalah suatu bilangan real dan  $\{x_n\}$  suatu barisan,  $\{x_n\}$  konvergen ke  $L$  jika untuk setiap bilangan  $\varepsilon > 0$  terdapat suatu bilangan asli  $N$ , sehingga  $|x_n - L| < \varepsilon$  untuk setiap  $n > N$

Suatu bilangan  $L$  dikatakan limit dari suatu barisan tak hingga  $x_1, x_2, \dots$  jika ada bilangan real positif  $\varepsilon$  sehingga dapat ditemukan bilangan asli  $N$  yang tergantung

pada  $\varepsilon$  sehingga  $|x_n - L| < \varepsilon$  untuk setiap  $n > N$ , dan suatu barisan dikatakan konvergen jika ia mempunyai nilai limit. (Mizrahi dan Sullivan, 1982)

#### **Teorema 2.2.4**

Setiap barisan bilangan real yang konvergen selalu terbatas. (Martono, 1984)

#### **Bukti :**

Misalkan barisan bilangan real  $\{a_n\}$  konvergen ke  $a$ , akan ditunjukkan terdapat suatu bilangan real  $\varepsilon > 0$  sehingga  $|a_n| \leq M$  untuk setiap  $n \in \mathbb{N}$ . Karena  $\{a_n\}$  konvergen ke  $a$ , maka terapat suatu  $n_0 \in \mathbb{N}$  sehingga  $n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < 1$ . Akibatnya  $|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$  untuk setiap  $n > n_0$ .

Ambillah  $M = \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0}|, |a| + 1)$ , maka setiap  $n \in \mathbb{N}$  berlaku  $|a_n| \leq M$ , yang berarti bahwa barisan bilangan real  $\{a_n\}$  terbatas.

#### **Definisi 2.2.5**

Suatu barisan  $\{x_n\}$  dikatakan mempunyai limit  $L$  bila untuk setiap bilangan  $\varepsilon > 0$  dapat dicari suatu nomor indeks  $n_0$  sedemikian sehingga untuk  $n \geq n_0$  berlaku  $L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon$  (atau  $|x_n - L| < \varepsilon$ ) artinya jika  $L$  adalah limit dari  $\{x_n\}$  maka  $x_n$  mendekati  $L$  jika  $n$  mendekati tak hingga. (Yahya, Suryadi, Agus, 1990)

#### **Definisi 2.2.6**

Suatu barisan yang mempunyai limit dinamakan barisan konvergen dan barisan yang tak konvergen dinamakan barisan divergen. (Martono, 1984)

**Definisi 2.2.7**

Diberikan  $\omega$  yaitu koleksi semua barisan bilangan *real*. (Darmawijaya, 2007)

jadi :

$$\omega = \{\bar{x} = \{x_n\}: x_n \in \mathbb{R}\}$$

Untuk setiap bilangan *real*  $p$  dengan  $1 \leq p < \infty$  didefinisikan

$$l_p = \left\{ x \in \{x_n\} \in \omega: \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$$

dan norm pada  $l_p$  yaitu

$$\|x\|_p = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

**Definisi 2.2.8**

Misal  $p, q \in (1, \infty)$  dengan  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  ( $q$  konjugat  $p$ ), untuk  $x \in l_p$  dan  $y \in l_p$

$(x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l_p$  dan  $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \|x\|^p \|y\|^q$ . (Darmawijaya, 2007)

**Teorema 2.2.9**

$l_p (1 \leq p < \infty)$  merupakan ruang bernorma terhadap norm  $\|\cdot\|_p$ . (Darmawijaya, 2007)

**Bukti :**

Untuk  $1 \leq p < \infty$  diambil sebarang  $\tilde{x} = \{x_n\}, \tilde{y} = \{y_n\} \in l_p$  dan skalar  $\alpha$ .

Diperoleh :

$$\text{i) } \|\tilde{x}\|_p = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \geq 0 \text{ karena } |x_n| \geq 0 \text{ untuk setiap } n.$$

$$\|\tilde{x}\|_p = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right\}^{\frac{1}{p}} = 0 \Leftrightarrow |x_k| \geq 0 \text{ untuk setiap } k \Leftrightarrow \tilde{x} = \{0\} = \tilde{0}$$

$$\text{ii) } \|\alpha\tilde{x}\|_p = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha x_n|^p \right\}^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right\}^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \|x\|_p$$

jelas bahwa  $\|\alpha x\|_{\infty} < \infty$

$$\text{iii) } \|\tilde{x} + \tilde{y}\|_p \leq \|\tilde{x}\|_p + \|\tilde{y}\|_p = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha x_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha x_n|^p \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Berdasarkan iv), v) dan vi) terbukti bahwa  $l_p$  merupakan ruang linear dan  $\|\cdot\|_p$  norm pada  $l_p$ . Dengan kata lain  $(l_p, \|\cdot\|_p)$  ruang bernorm.

### **Teorema 2.2.10**

Jika bilangan *real*  $p$  dengan  $1 \leq p < \infty$ , maka  $(l_p, \|\cdot\|_p)$  merupakan Ruang Banach. (Darmawijaya, 2007)

### **Definisi 2.2.11**

Ruang barisan, Himpunan dari barisan bilangan yang memiliki syarat

$$l_{\infty} = \left\{ x = (x_n) \in X : \sup_{n \geq 1} |x_n| < \infty \right\}$$

$l_{\infty}$  koleksi barisan bilangan yang  $\sup_{n \geq 1} |x_n| < \infty$ .

$$l_{\infty}(\Delta) = \{x = (x_n) : \Delta x \in l_{\infty}\}$$

$l_{\infty}(\Delta)$  koleksi barisan bilangan yang  $\Delta x \in l_{\infty}$

$$l_{\infty}(\Delta_m) = \{x = (x_n) : \Delta_m x \in l_{\infty}\}$$

$l_{\infty}(\Delta_m)$  koleksi barisan bilangan yang  $\Delta_m x \in l_{\infty}$

(H.Kizmaz,1981)

### 2.3 Ruang Barisan Selisih

#### Definisi 2.3.1

Diperlihatkan barisan selisih bilangan sebagai berikut :

Jika  $\tilde{x} = \{x_n\}$  suatu barisan bilangan dan

$$\Delta\tilde{x} = \{x_{n+1} - x_n\} \text{ untuk setiap } n \in \mathbb{N}$$

$\Delta\tilde{x}$  disebut barisan selisih pertama terhadap barisan  $\tilde{x} = \{x_n\}$

⋮

$$\Delta_m\tilde{x} = \{\Delta_m\tilde{x}_n = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} x_{n+m-i}\}, \text{ untuk setiap } n \in \mathbb{N}$$

$\Delta_m\tilde{x}$  disebut barisan selisih ke-m terhadap barisan  $\tilde{x} = \{x_n\}$

Berdasarkan gambaran di atas maka dibentuklah barisan bilangan

$\Delta\tilde{x} = \{\Delta x_n\}, \Delta_2\tilde{x} = \{\Delta_2 x_n\}, \dots, \Delta_m\tilde{x} = \{\Delta_m x_n\}$  yang disebut dengan barisan selisih pertama, barisan selisih kedua, dan seterusnya sampai barisan selisih ke-m.

(H.Kizmaz,1981)

### III. METODE PENELITIAN

#### 3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2018/2019 di jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

#### 3.2 Metode Penelitian

Langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini antara lain :

1. Membuktikan bahwa ruang  $l_\infty$ , adalah ruang bernorma , ruang bernorma lengkap, dan merupakan ruang Banach.
2. Membuktikan bahwa ruang  $l_\infty(\Delta)$ , adalah ruang bernorma , ruang bernorma lengkap, dan merupakan ruang Banach.
3. Membuktikan bahwa ruang  $l_\infty(\Delta_2)$ , adalah ruang bernorma , ruang bernorma lengkap, dan merupakan ruang Banach.
4. Membuktikan bahwa ruang  $l_\infty(\Delta_3)$ , adalah ruang bernorma , ruang bernorma lengkap, dan merupakan ruang Banach.
5. Membuktikan bahwa ruang  $l_\infty(\Delta_m)$ , adalah ruang bernorma , ruang bernorma lengkap, dan merupakan ruang Banach.

## V. KESIMPULAN DAN SARAN

### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan sebelumnya dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut :

1. Ruang barisan  $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$  dengan norma  $\|\tilde{x}\|_\infty = \sup_{k \geq 1} |x_k|$  merupakan ruang Banach.
2. Ruang Barisan  $(l_\infty(\Delta), \|\cdot\|_{(\Delta, \infty)})$  dengan norma  $\|\tilde{x}\|_{(\Delta, \infty)} = |x_1| + \|\Delta\tilde{x}\|_\infty$  merupakan ruang Banach.
3. Ruang Barisan  $(l_\infty(\Delta_2), \|\cdot\|_{(\Delta_2, \infty)})$  dengan norma  $\|\tilde{x}\|_{(\Delta_2, \infty)} = |x_1| + |x_2| + \|\Delta_2\tilde{x}\|_\infty$  merupakan ruang Banach.
4. Ruang Barisan  $(l_\infty(\Delta_3), \|\cdot\|_{(\Delta_3, \infty)})$  dengan norma  $\|\tilde{x}\|_{(\Delta_3, \infty)} = |x_1| + |x_2| + |x_3| + \|\Delta_3\tilde{x}\|_\infty$  merupakan ruang Banach.
5. Ruang Barisan  $(l_\infty(\Delta_m), \|\cdot\|_{(\Delta_m, \infty)})$  dengan norma  $\|\tilde{x}\|_{(\Delta_m, \infty)} = |x_1| + |x_2| + |x_3| + \dots + |x_m| + \|\Delta_m\tilde{x}\|_\infty$  merupakan ruang Banach.

### 5.2 Saran

Selalih ruang barisan  $l_\infty, l_\infty(\Delta), l_\infty(\Delta_2), l_\infty(\Delta_3), l_\infty(\Delta_m)$  yang telah dibahas dapat dilanjutkan kembali oleh pembaca yang tertarik meneliti bidang analisis

matematika terutama ruang barisan. Karena peneliti hanya meneliti  $l_\infty(\Delta_m)$  merupakan ruang banach, pembaca dapat membuktikan bahwa  $l_\infty(\Delta_m)$  apakah ruang-BK, solid, dan lainnya.

## DAFTAR PUSTAKA

- Darmawijaya, S. 2007. *Pengantar Analisis Abstrak*. Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.
- Gozali, M. 2009. *Ruang Norm dan Ruang Banach*. Universitas Pendidikan Indonesia. Bandung
- Kizmaz, H. 1981. *On Certain Sequence Spaces*. Karadeniz Teknik Universities, Turkey.
- Maddox, I.J. 1970. *Element of Functional Analysis*. Cambridge University Press, London.
- Martono, K. 1984. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik 2*. Angkasa, Bandung.
- Mizrahi, A. dan Sullivan, M. 1982. *Calculus and Analytic Geometry*. Wadsworth Publishing Company Belmont, California.
- Robert, G. Ronald R. 2000. *Introduction to Real Analysis*. John Wiley & Sons, inc, New York
- Yahya, dkk. 1990. *Matematika Dasar Untuk Perguruan Tinggi*. Ghalia Indonesia, Jakarta.