DIMENSI PARTISI PADA GRAF PETERSEN DIPERUMUM $P_{n,1}$, UNTUK n GENAP

(Skripsi)

Oleh

Rizka Fitriana Putri

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

ABSTRAK

DIMENSI PARTISI PADA GRAF PETERSEN DIPERUMUM $\boldsymbol{P_{n,1}}$ UNTUK $\boldsymbol{n}$ GENAP

Oleh

Rizka Fitriana Putri

Dimensi partisi diperkenalkan oleh Chartrand pada tahun 1998. Misalkan $G = (V, E)$, suatu graf, dengan $v \in V(G)$ dan $S \subset V(G)$. Jarak dari titik v ke himpunan S, dinotasikan dengan $d(v, S) = min\ \{d(v, x), x \in S\}$ dengan $d(v, x)$ adalah jarak dari titik v ke x. S_i adalah himpunan titik-titik yang diberi label ke-i , misalkan $\Pi = \{S_{1,}S_{2,\dots,}S_k\}$ adalah himpunan k-partisi terurut dari $V(G)$ dengan $S_{1,}S_{2,\dots,}S_k$ adalah partisi. Representasi v terhadap Π, dinotasikan dengan $r(v|\Pi) = (d(v, S_1), d(v, S_2) \dots d(v, S_k)\ )$. Π disebut partisi pembeda, jika $r(v|\Pi), v \in V(G)$ adalah berbeda. Kardinalitas minimum dari k-partisi pembeda terhadap $V(G)$ disebut dimensi partisi dari G, dinotasikan dengan $pd(G)$. Pada penelitian ini, dimensi partisi graf Petersen diperumum $P_{n,1}$ untuk n genap adalah 3. Dimensi partisi operasi tertentu graf Petersen diperumum $sP_{n,1}$ untuk layer $s = 1$ adalah 3, dan $s \geq 2$ adalah 4.

Kata Kunci: Graf, Dimensi Partisi, Graf Petersen Diperumum

ABSTRACT

PARTITION DIMENSION OF GENERALIZED PETERSEN GRAPHS $P_{n,1}$ FOR n EVEN

By

Rizka Fitriana Putri

The partition dimension was introduced by Chartrand in 1998. Let $G = (V, E)$, be a connected graph, with $v \in V(G)$ and $S \subset V(G)$. The distance from vertices v to the set S, denoted as $d(v, S) = min\ \{d(v, x), x \in S\}$ with $d(v, x)$ is a distance of a vertex v to x. S_i is the set of vertex labeled to i , let $\Pi = \{S_{1,}S_{2,\ldots,}S_k\}$ be an ordered set of k-partition from $V(G)$ with $S_{1,}S_{2,\ldots,}S_k$ is partition. The representation of v between Π, denoted by $r(v|\Pi) = (d(v, S_1), d(v, S_2) \ldots d(v, S_k)\ )$. Π is called resolving partition k-vectors $r(v|\Pi), v \in V(G)$ are distinct. The minimum k for which there is a resolving k-partition of $V(G)$ is the partition dimension $pd(G)$ of G. In this research, the partition dimension of generalized Petersen graph $P_{n,1}$ is 3 for n even. The certain operation of partition dimensions of generalized Petersen graph $sP_{n,1}$ for layers $s = 1$ is 3, and $s \geq 2$ is 4.

Keyword: Graph, Partition Dimention, Generalized Petersen Graph.

DIMENSI PARTISI PADA GRAF PETERSEN DIPERUMUM $P_{n,1}$, UNTUK n GENAP

Oleh
Rizka Fitriana Putri

Skripsi

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
SARJANA SAINS

Pada
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

Judul Skripsi : **DIMENSI PARTISI PADA GRAF PETERSEN DIPERUMUM $P_{n,1}$, UNTUK n GENAP**

Nama Mahasiswa : Rizka Fitriana Putri

No. Pokok Mahasiswa : 1517031182

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.
NIP 19760411 200012 2 001

Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si.
NIP 19731109 200012 2 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

   Ketua : **Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.** ....

   Sekretaris : **Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si.** ....

   Penguji
   Bukan Pembimbing : **Amanto, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Drs. Suratman, M.Sc.
NIP 19640604 199003 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **22 Juli 2019**

PERNYATAAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: Rizka Fitriana Putri
Nomor Pokok Mahasiswa	: 1517031182
Jurusan	: Matematika

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi saya yang berjudul **"DIMENSI PARTISI PADA GRAF PETERSEN DIPERUMUM $P_{n,1}$, UNTUK n GENAP"** adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau telah dibuat orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 22 Juli 2019
Penulis

Rizka Fitriana Putri
NPM. 1517031182

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama Rizka Fitriana Putri lahir pada tanggal 15 Februari 1997 di Bandar Lampung, anak perempuan dari empat bersaudara pasangan Bapak Sugiono dan Ibu Suwarni.

Penulis menempuh pendidikan di Taman Kanak-Kanak (TK) Al-Azhar 4 Bandar Lampung tahun 2002-2003, kemudian melanjutkan sekolah dasar di SD Al-Azhar 2 Bandar Lampung pada tahun 2003-2009. Lulus dari Sekolah Menengah Pertama tahun 2012 di SMPN 1 Bandar Lampung, dan lulus dari SMAN 15 Bandar Lampung pada tahun 2015.

Pada tahun 2015 penulis melanjutkan kuliah di Universitas Lampung mengambil Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur SBMPTN. Selama menjadi mahasiswi, penulis bergabung sebagai anggota Departemen Komunikasi dan Informasi (Kominfo) BEM FMIPA Unila periode 2015-2016, dan periode 2016-2017. Penulis juga pernah bergabung dalam UKMF (Unit Kegiatan Mahasiswa Fakultas) Natural sebagai sekertaris bidang Ruslan (Sirkulasi dan Periklanan) pada tahun 2016-2017.

Pada bulan Januari sampai dengan Februari 2018, penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di kantor PLN Rayon Tanjung dan pada tahun yang sama penulis juga telah melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Cahyou Randu, Kecamatan Pagar Dewa, Kabupaten Tulang Bawang Barat selama 40 hari pada bulan Juli sampai dengan Agustus.

KATA INSPIRASI

Life is unpredictable
And anything may happen in it
Even the most incredible something
That you cannot imagine.
(Anastasia Novykh)

Boleh jadi kamu membenci sesuatu
padahal ia amat baik bagimu
dan boleh jadi pula kamu menyukai sesuatu
padahal ia amat buruk bagimu,
Allah mengetahui
Sedang kamu tidak mengetahui.
(Q.S. Al-Baqarah : 216)

Bermimpilah setinggi langit.
Jika engkau jatuh,
engkau akan jatuh diantara bintang-bintang.
(Bung Karno)

PERSEMBAHAN

Dengan mengucap Alhamdulillah, puji syukur kehadirat Allah SWT
ku persembahkan karya kecil yang sederhana
dengan kerendahan hati kepada :

Orang tuaku atas tiap untaian kata untukku dalam tiap doanya,
kakak-kakakku yang selalu memberikan kasih,
dukungan baik moril maupun materil,
nasihat maupun motivasi disetiap langkah kaki .
Semoga bisa menjadi kebanggaan dalam keluarga.

Sahabat-sahabat
yang selalu membantu disaat-saat sulit,
motivasi dan semangat saat mulai patah,
serta dukungan disaat penulis goyah.

Dosen pembimbing, dan penguji yang berjasa dalam
mengarahkan, membimbing, dan memotivasi.

Teman –teman seperjuangan.

Almamater tercinta Universitas Lampung.

SANWACANA

Puji syukur penulis ucapkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa, yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah, sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Skripsi yang berjudul "*Dimensi Partisi pada Graf Petersen Diperumum* $P_{n,1}$ *untuk* n *Genap*" adalah salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains di Universitas Lampung. Dalam kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terimakasih kepada:

1. Ibu Dr. Asmiati, S.Si., M.Si., selaku dosen pembimbing pertama yang telah membimbing, mengarahkan, memberikan ide, kritik, saran, dan motivasi, selama proses penyusunan skripsi, sehingga dapat menyelesaikan skripsi dengan baik.
2. Ibu Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si., selaku dosen pembimbing kedua yang juga telah memberikan pengarahan, koreksi, masukan, dan saran dalam proses penyusunan skripsi ini.
3. Bapak Amanto, S.Si., M.Si., selaku penguji atas saran, kritik, dan kesediaannya untuk menguji dalam penyelesaian skripsi ini.
4. Bapak Nusyirwan, S.Si., M.Si., selaku dosen pembimbing akademik yang telah memberikan arahan dan masukkan selama menempuh pendidikan di Jurusan Matematika.

5. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, MA., Ph.D., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Bapak Drs. Suratman, M.Sc., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Orang tuaku atas perjuangannya yang telah menyekolahkan, hingga menempuh jenjang sarjana. Kakak, sepupu, dan saudara atas dukungan dan doa agar penulis cepat menyelesaikan tugasnya.
8. Teman-teman seperjuangan, Mona, Yuni, Tiwi, Akika, Desun, Dai, atas dukungan dan pertemanan, Pipin, Anggun, Birgita, Cepia, Rio, dan juga teman sepermbimbingan atas bantuannya dalam proses menyelesaikan skripsi.
9. Seluruh rekan Matematika angkatan 2015, serta kakak dan adik tingkat atas bantuan, informasi, dan dukungannya selama menjadi keluarga dijurusan, organisasi, maupun Universitas Lampung.
10. Semua pihak yang berperan dalam menyelesaikan skripsi ini.

Akhir kata, penulis menyadari bahwa banyak kekurangan atas skripsi ini. Namun, penulis mengharapkan semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi kita semua, terkhusus bagi yang membaca.

Bandar Lampung, 22 Juli 2019
Penulis

Rizka Fitriana Putri
NPM. 1517031182

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi sampai saat ini terus mengalami kemajuan. Salah satunya adalah cabang ilmu matematika yang sampai saat ini mengalami perkembangan yang berguna untuk kemajuan teknologi. Para peneliti terus melakukan penelitian untuk selalu menemukan penemuan-penemuan baru. Penemuan tersebut menjadi salah satu penunjang berkembangnya ilmu-ilmu lain. Teori graf merupakan salah satu dari contoh ilmu matematika yang semakin lama semakin berkembang. Daya tarik teori graf adalah penerapannya yang sangat luas, mulai dari ilmu komputer, kimia, fisika, ilmu biologi, linguistik, pemecahan teka-teki, permainan asah otak, dan lainnya. Contoh aplikasi dari teori graf antara lain navigasi robot dan jaringan, perancangan sensor, klasifikasi senyawa kimia, bahkan dalam permainan rubik.

Salah satu kajian ilmu dalam teori graf adalah dimensi partisi. Dimensi partisi berawal dari konsep himpunan pembeda. Konsep himpunan pembeda sebelumnya dikenalkan secara terpisah oleh Slater (1975) dan oleh Harry dan Melter (1976). Selanjutnya, konsep partisi pembeda yang merupakan bentuk serupa dari himpunan pembeda suatu graf dikenalkan oleh Chartrand, dkk. (1998).

Chartrand, dkk, melakukan pengelompokkan titik pada graf G, ke dalam sejumlah kelas partisi, dan menghitung jarak setiap titik di G, terhadap semua kelas partisi untuk mempresentasikan setiap titik pada graf G.

Dimensi memiliki keterkaitan dengan titik, garis, bidang, maupun ruang. Partisi merupakan himpunan bagian yang berbeda (terpisah). Setiap himpunan bagian tidak memiliki elemen yang sama. Dimensi partisi merujuk pada pengelompokkan titik, yang telah dilakukan Chartrand, dkk (1998), dengan partisi seminimum mungkin. Sejauh penelusuran literatur, penelitian yang terkait dengan penentuan dimensi partisi pada graf masih terbatas. Namun, hal ini menjadi permasalahan yang menarik untuk dibahas, dan sering mendapat perhatian dari kalangan peneliti.

Graf Petersen merupakan salah satu kelas graf yang terkenal. Graf Petersen diambil dari nama Peter Christian Julius Petersen untuk menghargainya. Graf Petersen sangat populer untuk dipelajari, karena keunikannya. Banyak topik pada teori graf yang bisa dikaitkan dengan graf Petersen, antara lain masalah Planaritas, Eulerian, Hamiltonian dan Hipohamiltonian, suatu graf.

Dalam hal ini, belum terdapat algoritma atau perumusan yang dapat digunakan untuk menentukan dimensi partisi pada graf Petersen. Penulis tertarik untuk menemukan bagaimana cara menentukan dimensi partisi pada graf Petersen $P_{n,1}$ diperumum untuk n genap.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah mendapatkan dimensi partisi graf Petersen diperumum $P_{n,1}$ untuk n genap dan dimensi partisi dari operasi tertentu graf Petersen diperumum untuk $sP_{n,1}$ untuk n genap.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah :

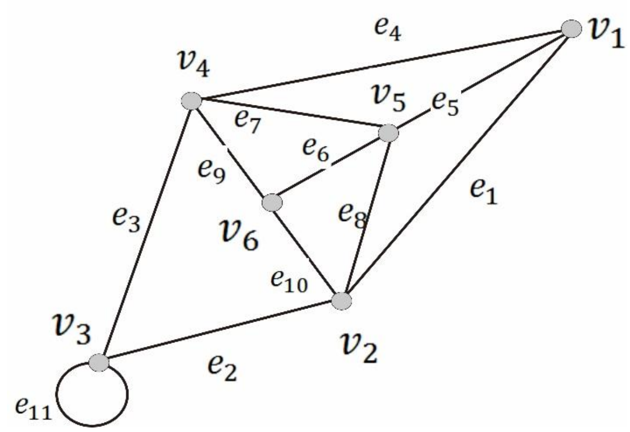
1. Mengembangkan wawasan tentang teori graf terutama tentang dimensi partisi pada graf.
2. Sebagai referensi untuk penelitian lanjutan tentang cara menentukan dimensi partisi dari graf Petersen.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Graf

Graf G adalah himpunan terurut $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ menyatakan himpunan titik $(vertex)$ $\{v_{1,}v_{2,\ldots,}v_n\}$ dari G dengan $(V(G) \neq \emptyset)$, dan $E(G)$ menyatakan himpunan sisi $(edge)$ $\{e_{1,}e_{2,\ldots,}e_n\}$, yakni pasangan tak terurut dari $V(G)$. Banyaknya himpunan titik $V(G)$ disebut orde dari graf G. Misalkan v dan w adalah titik pada graf G, jika v dan w dihubungkan oleh sisi e, maka v dan w dikatakan bertetangga $(adjacent)$, sedangkan titik v dan w dikatakan menempel $(incident)$ dengan sisi e, demikian juga sisi e dikatakan menempel dengan titik v dan w. Himpunan tetangga $(neighborhood)$ dari suatu titik v, dinotasikan dengan $N(v)$ adalah himpunan titik-titik yang bertetangga dengan v (Deo, 1989).

Gelung *(loop)* adalah sisi yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. Sisi paralel *(parallel edges)* adalah sisi-sisi yang memiliki dua titik ujung yang sama. Graf yang tidak mempunyai sisi paralel dan *loop* disebut graf sederhana *(simple graph)*. Graf pada Gambar 1, bukan merupakan graf sederhana, karena pada graf tersebut terdapat *loop*, yaitu pada titik v_3.



Gambar 1. Contoh graf dengan 6 titik dan 11 sisi.

Pada Gambar 1, Graf $G(V,E)$ dengan $V(G) = \{v_1, v_{2,} v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_{2,} e_3, e_4, e_5, e_{6,} e_7, e_{8,} e_9, e_{10}\}$. Titik v_1 bertetangga dengan titik v_2, v_4, v_5, dinotasikan dengan $N(v_1) = \{v_2, v_4, v_5\}$, sedangkan v_1 dan v_2 menempel dengan e_1. Sebaliknya, sisi e_1 menempel pada titik v_1 dan v_2.

Derajat suatu titik v pada graf G adalah banyaknya sisi yang menempel pada titik v, dinotasikan dengan $d(v)$. Dalam graf titik yang berderajat 1 disebut daun *(pendant vertex)*. Sedangkan pada Gambar 1, tidak ada titik yang berderajat 1, berarti graf pada Gambar 1 tersebut, tidak ada titik *pendant* atau daun. Pada Gambar 1, derajat v_1, v_6 adalah 3, derajat $v_{2,} v_{3,} v_4 v_5$ adalah 4.

Lemma yang menyatakan kaitan antara jumlah derajat semua titik pada graf G dengan banyaknya sisi adalah sebagai berikut:

Lemma 2.1 *Misalkan* $G(V,E)$ *adalah graf terhubung, maka*:

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2|E|$$

Bukti :

Dalam sebarang graf, masing-masing sisi menghubungkan dua titik, sehingga setiap sisi dihitung dua kali, pada ujung kiri sebagai bagian dari simpul (titik) kiri, dan pada ujung kanan dihitung sebagai bagian dari simpul (titik) kanan. Layaknya orang berjabat tangan, maka jumlah tangan yang berjabatan adalah genap, dan jumlah tangan yang berjabatan adalah dua kali jumlah jabatan tangan yang terjadi.

Misalkan graf G dengan sisi *e* dan n titik, $v_1, v_2, \dots, v_n$ karena setiap sisi mempunyai dua derajat, maka jumlah derajat dari semua titik di G adalah dua kali jumlah sisi di G.

Sebagai contoh pada graf Gambar 1, adalah

$$\sum_{i=1}^{6} (v_i) = d(v_1) + d(v_2) + d(v_3) + d(v_4) + d(v_5) + d(v_6)$$

$$\sum_{i=1}^{6} (v_i) = 3 + 4 + 4 + 4 + 4 + 3$$

$$\sum_{i=1}^{6} (v_i) = 2.11$$

$$\sum_{i=1}^{6} (v_i) = 22$$

$$\sum_{i=1}^{6}(v_i) = 2e$$

Sama dengan dua kali jumlah sisi pada graf tersebut, selalu bernilai genap **(**Deo, 1989).

Teorema 2.1 *Untuk sembarang graf G, banyaknya titik yang berderajat ganjil, selalu genap.*

Bukti :

Misalkan V_{genap}dan V_{ganjil} masing-masing adalah himpunan-himpunan titik yang berderajat genap dan berderajat ganjil pada $G(V, E)$. Maka persamaan dapat ditulis sebagai berikut :

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = \sum_{Vgenap} d(v_j) + \sum_{Vganjil} d(v_k)$$

Karena $d(v_j)$ untuk setiap $v_j \in V_{genap}$, maka suku pertama dari ruas kanan persamaan harus bernilai genap. Ruas kiri persamaan juga harus bernilai genap. Nilai genap pada ruas kiri hanya benar bila suku kedua dari ruas kanan juga harus genap. Karena $d(v_k)$ untuk setiap $v_k \in V_{ganjil}$, maka banyaknya titik v_k di dalam V_{ganjil} harus genap, agar jumlah seluruh derajatnya bernilai genap. Jadi banyaknya titik yang berderajat ganjil selalu genap (Deo, 1989).

Istilah lain yang sering muncul pada pembahasan graf adalah jalan $(walk)$, lintasan $(path)$, dan lingkaran atau siklus $(cycle)$. Jalan $(walk)$ adalah barisan berhingga dari titik dan sisi, dimulai dan diakhiri dengan titik, sedemikian sehingga setiap sisi menempel dengan titik sebelum dan sesudahnya. Contoh jalan berdasarkan Gambar 1, adalah $v_4 - e_3 - v_3 - e_{11} - v_3 - e_2 - v_2 - e_{10} - v_6 - e_9 - v_4 - e_4 - v_1 - e_1 - v_2 - e_8 - v_5 - e_5 - v_1$.

Lintasan *(path)* adalah walk yang melewati titik yang berbeda-beda, dimana titik–titik yang dilewati tepat satu kali pada suatu graf. Contoh lintasan berdasarkan pada Gambar 1, adalah $v_3 - e_3 - v_4 - e_9 - v_6 - e_{10} - v_2 - e_1 - v_1 - e_5 - v_5$. Lingkaran atau siklus *(cycle)* adalah lintasan tertutup *(closed path)*, yaitu lintasan yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. Lingkaran dapat disebut juga dengan sirkuit. Sirkuit dibedakan menjadi dua macam, yaitu genap dan ganjil. Sirkuit genap adalah sirkuit yang memuat banyaknya titik genap, dan sirkuit ganjil adalah sirkuit yang memuat banyaknya titik ganjil. Sirkuit dengan n titik dilambangkan dengan C_n. Contoh sirkuit berdasarkan pada Gambar 1, adalah $v_1 - e_1 - v_2 - e_8 - v_5 - e_7 - v_4 - e_4 - v_1$, yang merupakan sirkuit genap. Sedangkan berdasarkan Gambar 1, $v_2 - e_{10} - v_6 - e_6 - v_5 - e_8 - v_2$ adalah contoh sirkuit ganjil.

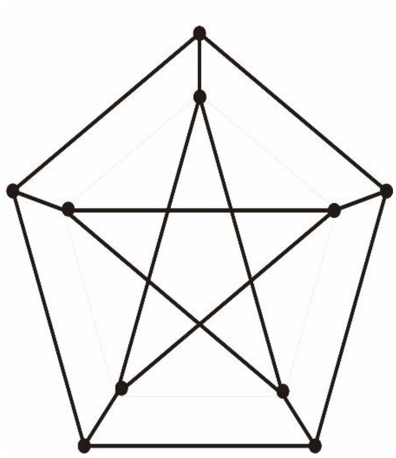
Suatu graf G disebut graf terhubung *(connected graph)* jika terdapat suatu lintasan yang menghubungkan setiap pasang titik di G. Jika ada satu pasang atau lebih titik di G yang tidak memiliki lintasan yang menghubungkan pasangan titik-titik tersebut, maka graf G disebut graf-tak terhubung *(disconnected graph)*.

Pada graf G, jarak *(distance)* di antara dua titik v_i dan v_j adalah panjang lintasan terpendek di antara kedua titik tersebut, dinotasikan dengan $d(v_i, v_j)$. Panjang lintasan adalah jumlah sisi dalam lintasan tersebut. Diameter dari suatu graf G, ditulis diam(G), adalah jarak maksimum dari sembarang dua titik pada graf terhubung G. Jika suatu graf terhubung, maka sisi e di $E(G)$ disebut jembatan (bridge), jika graf yang diperoleh dari graf G dengan menghapus sisi e, $G\backslash\{e\}$, merupakan graf tak terhubung.

2.2 Graf Petersen

Berikut ini diberikan beberapa contoh graf Petersen :

Graf Petersen, graf yang memiliki 10 titik, 15 sisi, dan setiap titiknya berderajat 3, dengan 5 titik di luar dan 5 titik di dalam yang dihubungkan dengan 5 sisi (Watkins, 1969).

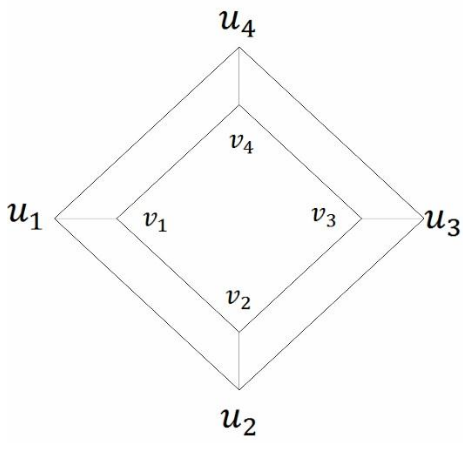


Gambar 2. Graf Petersen $(P_{5,2})$

2.3 Graf Petersen Diperumum

Misalkan $\{u_1, \ldots, u_n\}$ adalah titik-titik pada lingkaran luar dan $\{v_1, \ldots, v_n\}$ titik-titik pada lingkaran dalam. Graf Petersen $P_{n,k}$ adalah graf dengan $2n$ titik $\{u_1, \ldots, u_n\} \cup \{v_1, \ldots, v_n\}$ dan sisi $u_i \to u_{i+1}$ modulo n, $v_i \to v_{i+k}$ modulo n, dan $u_i \to v_i$ (Holton and Sheehan, 1993).

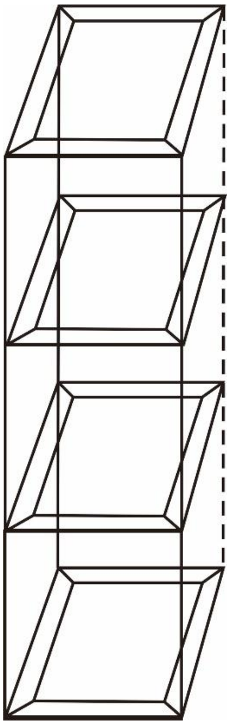
Graf Petersen diperumum *(generalized petersen graph)* merupakan graf teratur (graf yang setiap simpul atau titiknya berderajat sama) berderajat tiga $(r = 3)$ pada semua titiknya, dan graf yang telah diperumum. Misalkan $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ menyatakan banyaknya titik lingkaran luar dan $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ menyatakan banyaknya titik lingkaran dalam untuk $n \geq 3$. Graf Petersen $P_{n,k}$ dengan n banyaknya titik di luar sama dengan banyak titik di dalam. Graf Petersen diperumum dinotasikan sebagai $P_{n,k}$, $n \geq 3, 1 \leq k \leq \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil, 1 \leq i \leq n$ adalah graf yang memiliki $2n$ titik $\{u_i\} \cup \{v_i\}$ dan sisi $\{u_i u_{i+1}\} \cup \{v_i v_{i+k}\} \cup \{u_i v_i\}$ (Watkins, 1969).



Gambar 3. Graf Petersen $(P_{4,1})$

2.3 Operasi Tertentu Graf Petersen Diperumum

Misalkan terdapat s buah graf Petersen diperumum $P_{n,k}$. Titik luar $u_i, i = 1,2, \dots, n$ untuk graf Peteresen yang ke-t, $t = 1,2, \dots, s, s \geq 1$ dinotasikan dengan u_i^t. Titik dalam $v_i, i = 1,2, \dots, n$ untuk graf Petersen diperumum yang ke-t, $t = 1,2, \dots, s, s \geq 1$ dinotasikan dengan v_i^t. Graf Petersen diperumum $sP_{n,k}$ diperoleh dari $s \geq 1$ graf $P_{n,k}$ yang mana setiap titik luar $u_i^t, i \in [1, n], t \in [1, s]$ dihubungkan oleh suatu lintasan $(u_i^t u_i^{t+1}), t = 1,2, \dots, s-1, s \geq 2$.



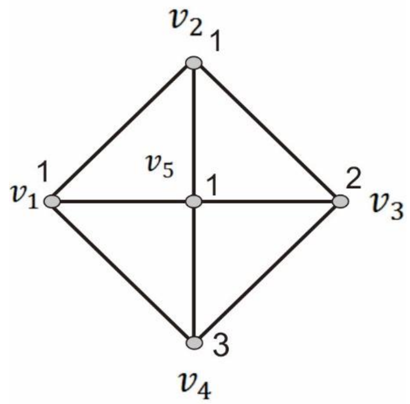
Gambar 4. Graf Petersen $\left(4P_{4,1}\right)$

2.4 Dimensi Partisi

Misalkan $G = (V, E)$, suatu graf, dengan $v \in V(G)$ dan $S \subset V(G)$. Jarak dari titik v ke himpunan S, dinotasikan dengan $d(v, S)$ adalah min $\{d(v, x), x \in S\}$ dengan $d(v, x)$ adalah jarak dari titik v ke x. S_i adalah himpunan titik-titik yang diberi label ke-i , misalkan $\Pi = \{S_{1,} S_{2,\ldots,} S_k\}$ adalah k-pasang terurut dari $V(G)$ dengan $S_{1,} S_{2,\ldots,} S_k$ adalah partisi-partisi. Representasi v terhadap Π, dinotasikan dengan $r(v|\Pi)$ adalah $(d(v, S_1), d(v, S_2) \ldots d(v, S_k))$. Selanjutnya, Π disebut partisi pembeda dari $V(G)$ jika $r(v|\Pi) \neq r(u|\Pi)$ untuk setiap dua titik berbeda $u, v \in V(G)$. Dimensi partisi dari G , dinotasikan dengan $pd(G)$ adalah nilai k terkecil, sehingga G mempunyai partisi pembeda dengan k kelas (Chartrand, dkk,1998).

Contoh 1:

Berikut akan diberikan contoh dimensi partisi pada suatu graf.



Gambar 5. Minimum resolving partisi dari G.

Graf G dipartisi sedemikian sehingga diperoleh $\Pi = \{S_{1,}S_{2,}S_3\}$ dengan $S_{1,} = \{v_1, v_2, v_5\}$, $S_{2,} = \{v_3\}$, $S_3 = \{v_4\}$. Perhatikan bahwa $d(v, S)$, maka

$r(v_1\Pi) = (d(v_1, S_1),\ d(v_1, S_2),\ d(v_1, S_3))$,

$r(v_2|\Pi) = (d(v_2, S_1),\ d(v_2, S_2),\ d(v_2, S_3))$,

$r(v_3|\Pi) = (d(v_3, S_1),\ d(v_3, S_2),\ d(v_3, S_3))$,

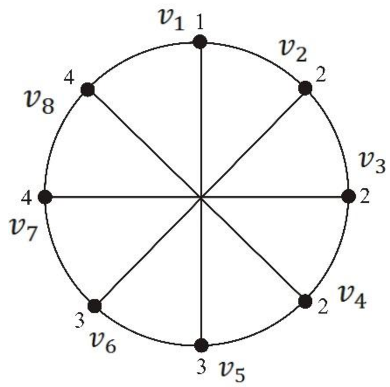
$r(v_4|\Pi) = (d(v_4, S_1),\ d(v_4, S_2),\ d(v_4, S_3))$,

$r(v_5|\Pi) = (d(v_5, S_1),\ d(v_5, S_2),\ d(v_5, S_3))$,

diperoleh $r(v_1|\Pi) = (0,2,1)$, $r(v_2|\Pi) = (0,1,2)$, $r(v_3|\Pi) = (1,0,1)$, $r(v_4|\Pi) = (1,1,0)$, $r(v_5|\Pi) = (0,1,1)$ karena representasi semua titik pada graf G berbeda, maka Π adalah partisi pembeda dari graf G dan $pd(G) \leq 3$.

Contoh 2:

Berikut ini diberikan graf G, dan akan ditentukan dimensi partisi dari graf tersebut.



Gambar 6. Minimum resolving partisi dari G.

Graf G dipartisi sedemikian sehingga diperoleh $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$, dengan $S_1 = \{v_1\}$, $S_2 = \{v_2, v_3, v_4\}$, $S_3 = \{v_5, v_6\}$ dan $S_4 = \{v_7, v_8\}$. Perhatikan bahwa

$r(v_1|\Pi) = (0,1,1,1)$; $r(v_5|\Pi) = (1,1,0,2)$;

$r(v_2|\Pi) = (1,0,1,2)$; $r(v_6|\Pi) = (2,1,0,1)$;

$r(v_3|\Pi) = (2,0,2,1)$; $r(v_7|\Pi) = (2,1,1,0)$;

$r(v_4|\Pi) = (2,0,1,1)$; $r(v_8|\Pi) = (1,1,2,0)$;

karena representasi dari semua titik adalah berbeda maka Π adalah partisi pembeda dari G dan $pd(G) \leq 4$.

Untuk menunjukkan $pd(G) \geq 4$, andaikan terdapat partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$, dengan $S_1 = \{v_1\}$,$S_2 = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $S_3 = \{v_6, v_7, v_8\}$. Representasi dari graf G adalah

$r(v_1|\Pi) = (0,1,1)$; $r(v_5|\Pi) = (1,0,1)$;

$r(v_2|\Pi) = (1,0,1)$; $r(v_6|\Pi) = (2,1,0)$;

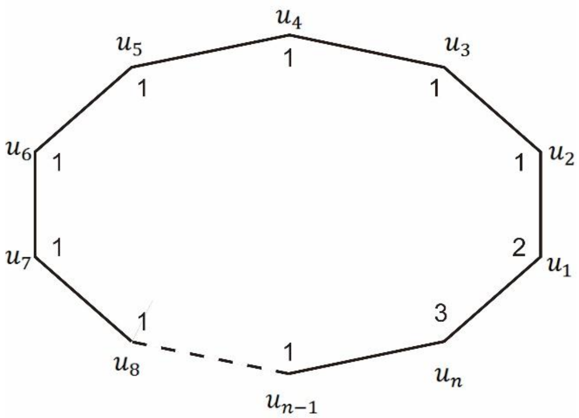
$r(v_3|\Pi) = (2,0,1)$; $r(v_7|\Pi) = (2,1,0)$;

$r(v_4|\Pi) = (2,0,1)$; $r(v_8|\Pi) = (1,1,0)$;

Terlihat bahwa $r(v_2|\Pi) = r(v_5|\Pi)$, $r(v_3|\Pi) = r(v_4|\Pi)$, $r(v_6|\Pi) = r(v_7|\Pi)$. Akibatnya, terdapat representasi yang sama, karena mempunyai jarak yang sama terhadap titik-titik lainnya pada graf G. Jadi, $pd(G) = 4$.

Teorema 2.2 *Dimensi partisi graf siklus* C_n *untuk* $n \geq 3$ *adalah 3 (Chartrand dkk., 1998).*

Bukti :



Gambar 7. Minimum resolving partisi dari C_n

Graf siklus C_n dipartisi sedemikian sehingga diperoleh $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$, dengan $S_1 = \{u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, \dots, u_{n-1}\}$, $S_2 = \{u_1\}$, $S_3 = \{u_n\}$. Perhatikan bahwa $r(u_1|\Pi) = (1{,}0{,}1)$, $r(u_2|\Pi) = (0{,}1{,}2)$, $r(u_3|\Pi) = (0{,}2{,}3)$, $r(u_4|\Pi) = (0{,}3{,}4)$, $r(u_5|\Pi) = (0{,}4{,}5)$, $r(u_6|\Pi) = (0{,}5{,}4)$, $r(u_7|\Pi) = (0{,}4{,}3)$, $r(u_8|\Pi) = (0{,}3{,}2)$, $r(u_{n-1}|\Pi) = (0{,}2{,}1)$, $r(u_n|\Pi) = (1{,}1{,}0)$. Karena representasi dari semua titik berbeda, maka Π adalah partisi pembeda dari siklus C_n dan $pd(C_n) \leq 3$.

Untuk menunjukkan $pd(C_n) \geq 3$, andaikan terdapat partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2\}$, dari C_n dengan $S_1 = \{u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, \dots, u_{n-1}, u_n\}$, $S_2 = \{u_1\}$, maka titik u_2 dan u_n akan memiliki representasi yang sama yaitu $(0{,}1)$, hal ini kontradiksi dengan pengandaian. Jadi $pd(C_n) \geq 3$, akibatnya $pd(C_n) = 3$.

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Adapun waktu dan tempat penelitian, yaitu pada semester genap tahun akademik 2018/2019 bertempat di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Dalam penelitian ini, langkah-langkah yang dilakukan adalah sebagai berikut :

1. Mempelajari materi dimensi partisi, dan graf Petersen.
2. Mengkonstruksi graf Petersen $P_{n,1}$ untuk n bilangan genap.
3. Memberi label pada kelas kelas partisi dengan partisi seminimal mungkin.
4. Menentukan dimensi partisi pada graf Petersen $P_{n,1}$ diperumum untuk n genap, dengan menentukan batas bawah dan batas atas.
   a. Batas bawah dari $pd\left(P_{n,1}\right)$ diperoleh dari dimensi partisi $\left(P_{n,1}\right)$. Apabila di dalamnya tidak ada yang masuk ke dalam kelas partisi yang sama, atau kontradiksi dengan pengandaian.
   b. Batas atas dari $pd\left(P_{n,1}\right)$ diperoleh dengan mengkonstruksi pelabelan titik-titik pada graf. Himpunan titik-titik pada graf $P_{n,1}$ dikelompokkan ke dalam

kelas partisi pembeda. Minimum banyaknya partisi pembeda merupakan dimensi partisi dari graf $P_{n,1}$.

5. Menentukan dimensi partisi dari operasi tertentu beberapa graf Petersen diperumum $sP_{n,1}$ untuk n genap
   a. Mendefinisikan graf Petersen dengan operasi tertentu $sP_{n,1}$. Misalkan terdapat s buah graf Petersen diperumum $P_{n,k}$. Titik luar $u_{i,} i = 1,2, \dots, n$ untuk graf Petersen yang ke-t, $t = 1,2, \dots, s, s \geq 1$ dinotasikan dengan u_i^t. Titik dalam $v_{i,} i = 1,2, \dots, n$ untuk graf Petersen diperumum yang ke-t, $t = 1,2, \dots, s, s \geq 1$ dinotasikan dengan v_i^t. Graf Petersen diperumum $sP_{n,k}$ diperoleh dari $s \geq 1$ graf $P_{n,1}$, yang mana setiap titik luar $u_i^t, i \in [1, n], t \in [1, s]$ dihubungkan oleh suatu lintasan $(u_i^t u_i^{t+1}), t = 1,2, \dots$, $s - 1, s \geq 2$. Notasi s dapat juga disebut layer dari graf Petersen diperumum $sP_{n,1}$.
   b. Menentukan dimensi partisi operasi tertentu graf Petersen diperumum $sP_{n,1}$ untuk n genap, dengan menentukan batas bawah dan batas atas.
   c. Batas bawah dari $pd\ (sP_{n,1})$ diperoleh dari dimensi partisi $(sP_{n,1})$. Apabila di dalamnya tidak ada yang masuk ke dalam kelas partisi yang sama, atau kontradiksi dengan pengandaian.
   d. Batas atas dari $pd\ (sP_{n,1})$ diperoleh dengan mengkonstruksi pelabelan titik-titik pada graf. Himpunan titik-titik pada graf $sP_{n,1}$ dikelompokkan ke dalam kelas partisi pembeda. Minimum banyaknya partisi pembeda merupakan dimensi partisi dari graf $sP_{n,1}$.

6. Memformulasikan hasil yang didapat dalam bentuk pernyataan matematika.

7. Membuktikan hasil yang sudah didapat pada langkah 6.

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Dimensi partisi graf Petersen diperumum $P_{n,1}$ untuk $n \geq 4$ genap adalah 3. Sedangkan dimensi partisi operasi tertentu graf Petersen diperumum $sP_{n,1}$ dengan $n \geq 4$ genap dan $s = 1$ adalah 3 dan untuk $s \geq 2$ adalah 4.

5.2 Saran

Penelitian ini dapat digunakan sebagai referensi untuk penelitian selanjutnya, yaitu menentukan dimensi partisi graf Petersen $P_{n,k}$ dengan $k > 1$.

DAFTAR PUSTAKA

Asmiati. 2016. *Graf dan Aplikasinya pada Jarak Terpendek*. Graha Ilmu, Yogyakarta.

Chartrand, E. Salehi, dan P. Zhang. 1998. On The Partition Dimension of Graph. *Congressus Numerantum*. **130**, 157-168.

Deo, N. 1989. *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*. Prentice Hall of India Private Limited, New Delhi.

Harry, F. and Melter, R. 1976. On The Metric Dimention of a Graph. *Ars Combinatoria*. **2,**191-195.

Holton, D.A. and Sheehan, J. 1993. *The Petersen Graph*. Cambridge University Press, Cambridge.

Slater, P. 1975. Leaves of trees. *Congressus Numerantum*. **14,** 549-559.

Watkins, M.E. 1969. A Theorem on Tait Colorings with Application to The Generalized Petersen Graphs. *Journal of Combinatorial*. **6**,152-164.