

**PENDUGAAN MODEL *TIME VARYING PARAMETER* (TVP)  
MENGUNAKAN ALGORITMA KALMAN *FILTER***

**(Skripsi)**

**Oleh  
Riza Umami**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS LAMPUNG  
BANDAR LAMPUNG  
2019**

## ABSTRAK

### PENDUGAAN MODEL *TIME VARYING PARAMETER* (TVP) MENGUNAKAN ALGORITMA KALMAN *FILTER*

Oleh

Riza Umami

Model *Time Varying Parameter* (TVP) adalah model deret waktu univariat, dimana parameternya bervariasi terhadap waktu. Model TVP dispesifikasikan pada model *state space* dan diduga dengan algoritma Kalman *Filter*. Pendugaan model pada algoritma Kalman *Filter* menggunakan *maximum likelihood*. Dengan cara ini, algoritma Kalman *Filter* dapat digunakan dengan *maximum likelihood* tepat dalam domain waktu untuk menduga parameter model TVP dan vektor *state*  $\bar{\beta}_t$  melalui fungsi dekomposisi kesalahan prediksi. Contoh kasus dari penelitian ini adalah menduga model TVP dari data penjualan batubara ( $y_t$ ) berdasarkan data harga acuan batubara ( $x_t$ ). Hasil pendugaan menunjukkan bahwa model TVP optimal karena memenuhi asumsi bahwa residual berdistribusi normal dan residual antara persamaan pengukuran dan persamaan transisi tidak berkorelasi. Model ini memiliki nilai *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE) dan *Root Mean Square Percentage Error* (RMSPE) lebih kecil dari 10% yang berarti tingkat keakuratan model sangat baik.

**Kata Kunci:** model *time varying parameter*, *state space*, Kalman *Filter*, penduga *maximum likelihood*

## **ABSTRACT**

### **ESTIMATION TIME VARYING PARAMETER (TVP) MODEL USING THE KALMAN FILTER ALGORITHM**

By

Riza Umami

*Time varying parameter (TVP) model is a univariate time series model, whose parameter varies with time. TVP model is specified in a state space model and estimated by Kalman Filter algorithm. In the estimation stage, maximum likelihood estimator is used. In this way the Kalman Filter algorithm can be used with exact maximum likelihood in the time domain to estimate the parameter of the TVP model and state vector  $\bar{\beta}_t$  via prediction error decomposition function. Sample case for this research is to estimate TVP models from coal sales data ( $y_t$ ) based coal reference price data ( $x_t$ ). The result shows that the TVP model is optimal because it fulfills assumption that residuals are normally distributed and the residuals in the measurement and transition equation are not correlated. This model has the value of Mean Absolute Percentage Error (MAPE) and Root Mean Square Percentage Error (RMSPE) less than 10%, which means the accuracy of the model is very good.*

**Keyword:** *time varying parameter model, state space, Kalman Filter, maximum likelihood estimator.*

**PENDUGAAN MODEL *TIME VARYING PARAMETER* (TVP)  
MENGUNAKAN ALGORITMA KALMAN *FILTER***

Oleh

**RIZA UMAMI**

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar  
**SARJANA SAINS**

Pada

**Jurusan Matemaika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS LAMPUNG  
BANDAR LAMPUNG  
2019**

Judul Skripsi : **PENDUGAAN MODEL *TIME VARYING*  
PARAMETER (TVP) MENGGUNAKAN  
ALGORITMA KALMAN *FILTER***

Nama Mahasiswa : **Riza Umami**

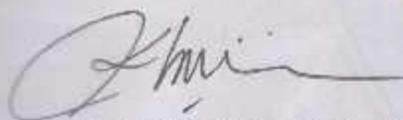
No. Pokok Mahasiswa : 1517031171

Jurusan : Matematika

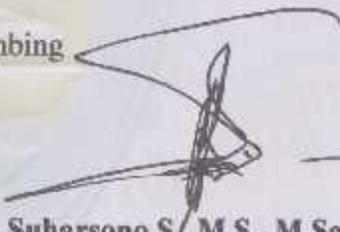
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

**MENYETUJUI**

**1. Komisi Pembimbing**

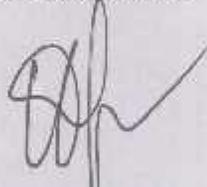


**Dr. Khoirin Nisa, S.Si., M.Si.**  
NIP 19740726 200003 2 001



**Drs. Suharsono S, M.S., M.Sc., Ph.D.**  
NIP 19620513 198603 1 003

**2. Ketua Jurusan Matematika**

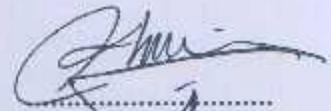


**Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.**  
NIP 19631108 198902 2 001

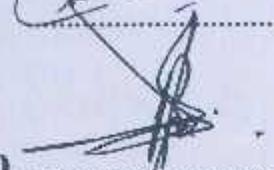
**MENGESAHKAN**

**1. Tim Penguji**

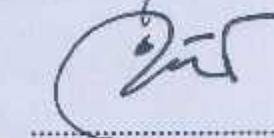
**Ketua : Dr. Khoirin Nisa, S.Si., M.Si.**



**Sekretaris : Drs. Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D.**



**Penguji  
Bukan Pembimbing : Drs. Eri Setiawan, M.Si.**



**Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**



**Drs. Suratman, M.Sc.  
NIP. 19640604 199003 1 002**

**Tanggal Lulus Ujian Skripsi : 16 April 2019**

## PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini, menyatakan bahwa skripsi saya yang berjudul "**PENDUGAAN MODEL *TIME VARYING PARAMETER (TVP) MENGGUNAKAN ALGORITMA KALMAN FILTER***" merupakan karya saya sendiri dan bukan karya orang lain. Semua tulisan yang tertuang di skripsi ini telah mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung. Apabila di kemudian hari terbukti skripsi saya merupakan hasil penjiplakan atau dibuat orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 16 April 2019

Penulis,



Riza Umami  
NPM 1517031171

## **RIWAYAT HIDUP**

Penulis dilahirkan pada tanggal 09 Juli 1996 di Panjang, Bandar Lampung. Penulis adalah anak kedua dari dua bersaudara dari pasangan Bapak Khairul Komarudin dan Ibu Rubayani. Penulis menempuh pendidikan formal pertama kali di Madrasah Ibtidaiyah Islamiyah Pidada Panjang pada tahun 2003 sampai tahun 2009. Pendidikan menengah pertama di SMP Negeri 23 Bandar Lampung diselesaikan penulis pada tahun 2012. Pendidikan menengah atas di SMA Negeri 6 Bandar Lampung diselesaikan penulis pada tahun 2015.

Pada tahun 2015 penulis terdaftar sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN) dengan program beasiswa Bidik Misi. Selama menjadi mahasiswa beberapa kegiatan yang dilakukan penulis antara lain:

1. Pada bulan Januari 2018 penulis melaksanakan kerja praktik di PT. Bukit Asam, Tbk. Ubit Pelabuhan Tarahan, Bandar Lampung.
2. Pada bulan Juli penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Sidomakmur, Kec. Melinting, Kabupaten Lampung Timur.

3. Aktif dalam Organisasi Badan Eksekutif Mahasiswa (BEM) FMIPA Universitas Lampung dengan menjabat sebagai Bendahara Departemen Pengembangan Sumber Daya Mahasiswa (PSDM) pada tahun 2017.
4. Aktif dalam Organisasi Himpunan Mahasiswa Jurusan Ilmu Matematika (Himatika) Universitas Lampung dengan menjabat sebagai Anggota Biro Dana dan Usaha pada tahun 2016.

## MOTTO

“Sesungguhnya bersama kesulitan itu ada kemudahan”

**(Q.S. Al-Insyirah: 6)**

*“Karena itu, ingatlah kamu kepada-Ku niscaya Aku ingat (pula) kepadamu, dan bersyukurlah kepada-Ku, dan janganlah kamu mengingkari nikmat-Ku”  
(Q.S. Al-Baqarah: 152)*

**“Kamu terpelajar, cobalah bersetia pada kata hati”  
(Pramoedya Ananta Toer)**

“Tidak ada yang perlu dikhawatirkan, lakukan yang yang terbaik.  
Kamu punya waktumu sendiri untuk mencapai apapun itu dalam hidupmu”  
(Riza Umami)

## PERSEMBAHAN

Dengan mengucap puji dan syukur kehadirat Allah SWT atas segala nikmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan studi ini.

*Kupersembahkan karya ini untuk:*

*Pilar hidupku:*

*Bapak Khairul Komarudin (Alm) dan Ibu Rubayani*

*Kakakku, Agus Basri*

Terimakasih untuk segala hal terbaik yang selalu diusahakan dan diberikan.

*Dosen Pembimbing dan Penguji*

Terimakasih untuk bimbingan, saran serta motivasi yang diberikan.

*Sahabat dan teman-temanku*

Terimakasih untuk kebersamaan selama ini.

*Semua yang menjadi bagian selama perkuliahan.*

*Almamater Universitas Lampung*

## SANWACANA

Puji syukur penulis hanturkan kehadiran Allah SWT atas berkat rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini. Skripsi ini disusun sebagai syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung dengan Judul skripsi yaitu “*Pendugaan Model Time Varying Parameter (TVP) Menggunakan Algoritma Kalman Filter*”.

Terima kasih penulis ucapkan kepada semua pihak yang telah membantu penulis memberikan bimbingan, dukungan, dan semangat sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Dengan segala ketulusan dan kerendahan hati pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu Dr. Khorin Nisa, M.Si., sebagai pembimbing utama yang telah membimbing penulis dan memberikan ide, kritik serta saran sehingga penulisan skripsi ini dapat diselesaikan.
2. Bapak Drs. Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D., sebagai pembimbing kedua yang telah membimbing penulis dan memberikan bantuan, kritik serta saran dalam pembuatan skripsi ini.

3. Bapak Drs. Eri Setiawan, M.Si., sebagai pembahas yang telah memberikan kritik dan saran yang bermanfaat dalam perbaikan dalam penyusunan skripsi ini.
4. Ibu Notiragayu, M.Si., selaku pembimbing akademik selama penulis menjadi mahasiswa Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.
5. Ibu Prof. Dra.Wamiliana, M.A., Ph.D., sebagai Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.
6. Bapak Amanto, S.Si., M.Si., sebagai Sekretaris Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.
7. Bapak Drs. Suratman, M.Sc., sebagai Dekan FMIPA Universitas Lampung.
8. Bapak dan Ibu Dosen serta Staf Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.
9. Kedua orang tua, Bapak Khairul Komarudin (Alm) dan Ibu Rubayani, Papa Abdul Jumar Pawe dan Mama Mariana (Alm), Kakakku Agus Basri, Mba Septi, Mba Dianur Pawe dan Keluarga Besar.
10. Sahabat dan teman berbagi Tri Iriani Pawe dan Desy Kartika Sari.
11. Teman-teman seperjuangan Matematika 2015, diantaranya Anggun, Dhenty, Liza, Pipin, Ulfa dan Wilda serta yang tidak bisa disebutkan satu per satu.
12. Keluarga Kerja Praktek, KKN Desa Sidomakmur, KWI'16, KWI'17, yang telah memberikan warna selama masa perkuliahan.
13. Keluarga Besar HIMATIKA dan BEM FMIPA Universitas Lampung atas kebersamaan dan perjuangan dalam memperbaiki dan mengembangkan kemampuan.
14. Almamater Tercinta, Universitas Lampung.

Semoga dibalik kelebihan dan kekurangan skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi semua pihak yang membutuhkan. Akhir kata penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, karena pada hakikatnya kesempurnaan hanyalah milik Allah SWT. Untuk itu, penulis mohon maaf atas segala kekurangan dan keterbatasan pada skripsi ini. Kritik dan saran yang membangun sangat diharapkan untuk perbaikan dimasa yang akan datang.

Bandar Lampung, 16 April 2019

Penulis,

Riza Umami

## DAFTAR ISI

	Halaman
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	xvi
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xvii
<b>I. PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang dan Masalah .....	1
1.2 Batasan Masalah.....	3
1.3 Tujuan Penelitian.....	3
1.4 Manfaat Penelitian.....	4
<b>II. TINJAUAN PUSTAKA</b>	
2.1 Pengertian Deret Waktu .....	5
2.2 Bentuk <i>State Space</i> .....	7
2.3 Model <i>Time Varying Parameter (TVP)</i> .....	9
2.4 Kalman <i>Filter</i> .....	11
2.5.1 Inisialisasi dari Kalman <i>Filter</i> .....	13
2.5 Penduga <i>Maximum Likelihood</i> .....	14
2.6 Algoritma .....	17
2.7 Kriteria Kesesuaian Model .....	19
2.8 <i>Akaike Information Criterion (AIC)</i> .....	20
2.9 Uji Diagnostik .....	21
2.10.1 Uji Normalitas .....	21
2.10.2 Uji Autokorelasi .....	22
<b>III. METODOLOGI PENELITIAN</b>	
3.1 Tempat dan Waktu Penelitian .....	25
3.2 Data dan Spesifikasi <i>Software</i> yang Digunakan .....	25
3.3 Metode Penelitian.....	27
<b>IV. HASIL DAN PEMBAHASAN</b>	
4.1 Model TVP dan Pendugaan Menggunakan Algoritma Kalman <i>Filter</i> .....	29
4.1.1 Model TVP .....	29

4.1.2	Pendugaan Menggunakan Algoritma Kalman <i>Filter</i> .....	31
4.2	Penduga <i>Maximum Likelihood</i> .....	33
4.3	Penerapan Algoritma Kalman <i>Filter</i> Pada Model TVP .....	36
4.3.1	Identifikasi Model TVP .....	36
4.3.2	Pendugaan Parameter .....	38
4.3.3	Data Vektor <i>State</i> .....	40
4.3.4	Kriteria Kesesuaian Model .....	41
4.3.5	Uji Diagnostik .....	41
4.3.5.1	Uji Normalitas .....	41
4.3.5.2	Uji Autokorelasi .....	43
4.3.6	Analisis Hasil Transformasi Data.....	44

## V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1	Kesimpulan.....	51
5.2	Saran.....	52

## DAFTAR PUSTAKA

## DAFTAR TABEL

Tabel	Halaman
2.1. Kriteria MAPE.....	20
2.2. Kaidah Keputusan Identifikasi Autokorelasi .....	23
2.3. Interpretasi Nilai $r$ (koefisien korelasi).....	23
3.1. Data Penjualan Batubara .....	26
3.2. Data Harga Acuan Batubara (HAB) .....	26
4.1. Hasil Pendugaan Nilai Vektor <i>State</i> .....	39
4.2. Data Transformasi Penjualan Batubara.....	45
4.3. Hasil Pendugaan Nilai Vektor <i>State</i> Data Transformasi.....	46

## DAFTAR GAMBAR

Gambar	Halaman
2.1. Jenis-jenis Pola Data.....	6
2.2. Diagram Alur Algoritma Kalman <i>Filter</i> .....	19
4.1. Plot Deret Penjualan Batubara PT Bukit Asam, Tbk. Unit Pelabuhan Tarahan .....	36
4.2. Plot Data Harga Acuan Batubara (HAB).....	37
4.3. Plot $\bar{\beta}_t$ Bulan Januari 2012 – Desember 2017 .....	40
4.4. Histogram Residual Data .....	42
4.5. Plot Data Transformasi Penjualan Batubara .....	45
4.6. Plot $\bar{\beta}_t$ Data Transformasi.....	47
4.7. Histogram Residual Data Transformasi .....	49

## I. PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang dan Masalah

Peramalan merupakan suatu proses untuk meramalkan sesuatu yang akan terjadi pada masa yang akan datang berdasarkan data pada masa lalu dengan menggunakan teknik atau cara tertentu (Siswanto, 2007). Peramalan menjadi suatu hal yang penting bila ingin mengetahui gambaran yang terjadi di masa mendatang. Salah satu cara meramalkan suatu kejadian di masa mendatang adalah dengan analisis deret waktu. Analisis deret waktu secara umum bertujuan untuk mempelajari atau membuat mekanisme model stokastik yang mampu menganalisis deret pengamatan dan meramalkan nilai deret waktu yang akan datang didasarkan pada histori deret itu sendiri.

Secara umum terdapat empat macam pola data deret waktu yaitu *mean* konstan, *trend*, siklis, dan musiman. Umumnya, kelemahan dari beberapa metode peramalan deret waktu tidak dapat meramalkan suatu data deret waktu yang mempunyai efek kecenderungan (*trend*) dan musiman (*seasonal*). Untuk mengatasi hal tersebut maka munculah metode dekomposisi. Metode ini didasarkan pada kenyataan bahwa apa yang telah terjadi akan berulang kembali

melalui pola yang sama, dengan pola data deret waktu seperti unsur kecenderungan, musiman, siklus, ataupun perubahan yang bersifat acak.

Model *state space* merupakan suatu pendekatan untuk memodelkan dan memprediksi secara bersama beberapa deret waktu yang saling berhubungan serta variabel-variabel tersebut mempunyai interaksi dinamis. Model *state space* menggambarkan data deret waktu melalui variabel tambahan (*state vector*). *State vector* berisi ringkasan nilai sekarang dari suatu deret waktu yang sesuai dengan prediksi nilai yang akan datang (SAS User' Guide, 2002).

Salah satu contoh model yang ditetapkan dalam suatu model *state space* adalah model *Time Varying Parameter* (TVP). Pada model TVP perubahan struktural berubah sepanjang waktu, sehingga parameternya adalah fungsi waktu. Algoritma Kalman *Filter* (Kalman, 1960) mendeskripsikan solusi rekursif untuk masalah pemfilteran linear dari data diskrit. Dalam prosesnya, model yang telah ditransformasikan ke dalam representasi *state space*, selanjutnya dilakukan perhitungan berdasarkan algoritma Kalman Filter untuk mendapatkan prediksi dari data deret waktu. Penelitian yang berkaitan dengan model TVP telah dilakukan oleh beberapa peneliti, diantaranya *Statistical Learning With Time Varing Parameter* (McGough, 2000), *Estimation Of Time-Varying Parameters In Deterministic Dynamic Models* (Chen dan Wu, 2008), *Spurious Regression Problem Kalman Filter EtimationOf Time Varying Parameter Models* (Eroglu, 2010), *Time Varying Coefficient Models And The Kalman Filter* (Punales, 2011), *An Alternative Estimation of a Time Varying Parameter Model* (Ito, dkk, 2017).

Berdasarkan uraian di atas, peneliti mencoba untuk mempelajari dan memperoleh penduga model TVP menggunakan algoritma Kalman *Filter*.

## 1.2 Batasan Masalah

Penulis membatasi permasalahan sebagai berikut:

1. Pendugaan model *Time Varying Parameter* dilakukan dalam representasi *state space* untuk diduga menggunakan Kalman *Filter*.
2. Model *Time Varying Parameter* diduga menggunakan algoritma Kalman *Filter* tanpa menganalisis pengoptimalan numerik *Maximum Likelihood Estimator* secara lanjut.

## 1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini yaitu:

1. Mempelajari model *Time Varying Parameter* dan Kalman *Filter* dalam pendugaan model TVP.
2. Memperoleh pendugaan model *Time Varying Parameter* menggunakan algoritma Kalman *Filter*.

#### **1.4 Manfaat Penelitian**

Manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memberikan sumbangan pemikiran dalam memperluas wawasan ilmu statistika khususnya pada analisis deret waktu.
2. Sebagai bahan pertimbangan dan masukan bagi peneliti lain yang ingin melakukan penelitian serupa serta dapat dijadikan sebagai salah satu sumber informasi.

## II. TINJAUAN PUSTAKA

### 2.1 Pengertian Deret Waktu

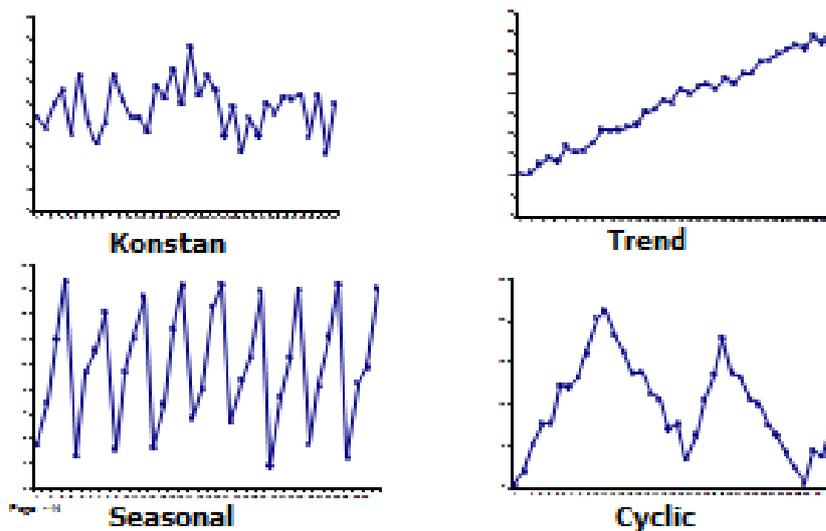
Menurut Aswi & Sukarna (2006), deret waktu merupakan serangkaian data pengamatan yang terjadi berdasarkan indeks waktu secara berurutan dengan interval waktu tetap. Analisis deret waktu adalah salah satu prosedur statistika yang diterapkan untuk meramalkan struktur probabilistik keadaan yang akan terjadi di masa yang akan datang dalam rangka pengambilan keputusan.

Menurut Makridakis (1999) langkah penting dalam memilih suatu metode deret waktu yang tepat adalah dengan mempertimbangkan jenis pola data, sehingga metode yang paling tepat dengan pola data tersebut dapat diuji. Pola data dapat dibedakan menjadi empat, yaitu:

1. Pola data *mean* konstan terjadi pada saat nilai data berfluktuasi di sekitar rata-rata yang konstan, deret seperti itu adalah stasioner terhadap nilai rata-ratanya. Suatu deret yang tidak meningkat dan tidak menurun selama waktu tertentu.
2. Pola data *trend* terjadi pada saat terdapat kenaikan atau penurunan sekular jangka panjang dalam data.

3. Pola musiman terjadi bila suatu deret dipengaruhi oleh faktor musiman (misalnya kuartal tahun tertentu, bulanan, atau harian pada minggu-minggu tertentu).
4. Pola data siklis terjadi bila datanya dipengaruhi oleh fluktuasi ekonomi jangka panjang seperti yang berhubungan dengan siklus bisnis.

Gambar di bawah ini menunjukkan jenis pola data konstan, *trend*, musiman dan siklis.



Gambar 2.1. Jenis-jenis Pola Data

Deret waktu adalah catatan dari nilai-nilai yang diamati dari sebuah proses atau fenomena yang diambil secara berturut-turut dari waktu ke waktu.

## 2.2 Bentuk *State Space*

Bentuk *state space* adalah alat yang sangat ampuh untuk menanggapi berbagai macam model deret waktu. Setelah model dimasukkan ke dalam bentuk *state space*, Kalman *Filter* dapat diterapkan untuk mendapatkan algoritma prediksi dan pemulusan (Harvey, 1989). Bentuk umum *state space* diaplikasikan untuk deret waktu multivariat  $y_t$ , yang mengandung unsur  $N$ . Bentuk *state space* terdiri dari dua komponen dasar yaitu persamaan pengukuran dan persamaan transisi. Persamaan pengukuran menghubungkan  $y_t$  yang teramati dengan  $m \times 1$  vektor *state*  $\beta_t$ :

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{X}_t \boldsymbol{\beta}_t + \mathbf{d}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad (2.1)$$

dimana  $\mathbf{X}_t$  adalah matriks  $N \times m$ ,  $\mathbf{d}_t$  adalah vektor  $N \times 1$ , dan  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  adalah  $N \times 1$  dari vektor deret residual tidak berkorelasi dengan *mean*  $\mathbf{0}$  dan kovarians matrik  $\mathbf{H}_t$ . Persamaan berikut merangkum sifat dari istilah residual pengukuran yaitu:

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbf{0} \quad \text{dan} \quad \text{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbf{H}_t$$

Pada model univariat,  $N = 1$  dan persamaan pengukuran dapat ditulis sebagai:

$$y_t = \mathbf{X}_t' \boldsymbol{\beta}_t + d_t + \varepsilon_t, \quad \text{Var}(\varepsilon_t) = h_t \quad (2.2)$$

Selanjutnya, persamaan transisi menentukan pergerakan vektor *state*  $\boldsymbol{\beta}_t$ , melalui:

$$\boldsymbol{\beta}_t = \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\beta}_{t-1} + \mathbf{c}_t + \mathbf{R}_t \boldsymbol{\eta}_t \quad (2.3)$$

dimana  $\boldsymbol{\Phi}$  adalah matriks  $m \times m$ ,  $\mathbf{c}_t$  adalah vektor  $m \times 1$ ,  $\mathbf{R}_t$  adalah matriks  $m \times g$ , dan  $\boldsymbol{\eta}_t$  adalah  $g \times 1$  dari vektor deret residual tidak berkorelasi dengan *mean*  $\mathbf{0}$  dan kovarians matrik  $\mathbf{Q}_t$ , yaitu:

$$E(\boldsymbol{\eta}_t) = \mathbf{0} \quad \text{dan} \quad \text{Var}(\boldsymbol{\eta}_t) = \mathbf{Q}_t$$

Dimasukkannya matriks  $\mathbf{R}_t$  di depan istilah residual untuk batas tertentu, secara bebas. Dalam banyak model *state space*  $\mathbf{R}_t$  hanyalah matriks identitas  $m \times m$ . Namun, dalam berbagai hal memodelkannya dalam urutan  $m \times g$  dengan  $g < m$ , dan terdiri dari r kolom pertama dari matriks identitas  $\mathbf{I}_m$ . Dalam hal ini  $\mathbf{R}_t$  disebut sebagai matriks seleksi karena memilih baris persamaan *state* yang memiliki residual nol. Akhirnya, vektor  $g \times 1$   $\boldsymbol{\eta}_t$  berisi residual status  $g$  nol, dan varians tidak diketahui dikumpulkan dalam matriks diagonal  $m \times g$   $\mathbf{Q}_t$  (Commandeur dan Koopman, 2007).

Spesifikasi sistem *state space* dilengkapi oleh dua asumsi lanjutan, yaitu:

1. Vektor *state* awal  $\boldsymbol{\beta}_0$ , mempunyai *mean*  $\bar{\boldsymbol{\beta}}_0$  dan kovarians matriks  $\boldsymbol{\Sigma}_0$ , yaitu:

$$E(\boldsymbol{\beta}_0) = \bar{\boldsymbol{\beta}}_0 \quad \text{dan} \quad \text{Var}(\boldsymbol{\beta}_0) = \boldsymbol{\Sigma}_0$$

2. Residual dari  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  dan  $\boldsymbol{\eta}_t$  tidak berkorelasi satu sama lain dan vektor awal *state* di semua periode waktu,

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\eta}_t') = \mathbf{0} \tag{2.4}$$

dan

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\beta}_0') = \mathbf{0} \quad \text{dan} \quad E(\boldsymbol{\eta}_t \boldsymbol{\beta}_0') = \mathbf{0}$$

Matriks  $\mathbf{X}_t$ ,  $\mathbf{d}_t$ , dan  $\mathbf{H}_t$  pada persamaan pengukuran dan matriks  $\boldsymbol{\Phi}$ ,  $\mathbf{c}_t$ ,  $\mathbf{R}_t$  dan  $\mathbf{Q}_t$  pada persamaan transisi akan dirujuk sebagai sistem matriks.

### 2.3 Model *Time Varying Parameter* (TVP)

Dalam kasus yang berurusan dengan data time series, model regresi konvensional dapat ditulis sebagai berikut:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{X}_t \boldsymbol{\beta}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

untuk  $t = 1, 2, \dots, T$ , dimana  $T$  merupakan ukuran sampel.

$\mathbf{y}_t$  = variabel dependen

$\mathbf{X}_t$  = matriks  $T \times m$  dari variabel penjelas

$\boldsymbol{\beta}_t$  = vektor  $m \times 1$  dari parameter yang tidak diketahui

$\boldsymbol{\varepsilon}_t$  = vektor residual,  $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\sigma}^2 \mathbf{I})$

Ada beberapa metode pendugaan persamaan (2.1), misalnya *Ordinary Least Square* (OLS), *Generalized Least Square* (GLS), penduga instrumental variabel, dan sebagainya. Dalam kasus apapun, pendugaan parameter bersifat konstan dari waktu ke waktu. Model ini dikenal sebagai parameter model tetap. Namun, perubahan struktural, kesalahan spesifikasi, nonlinier, variabel proxy dan agregasi semua merupakan sumber dari variansi parameter. Oleh karena itu, dipertimbangkan model dimana parameter adalah fungsi waktu, yang disebut model TVP (Tanizaki, 2000).

Model TVP merupakan suatu model yang ditetapkan ke dalam suatu model *state space* dan diduga dengan algoritma Kalman Filter. Model *state space* ini mampu merepresentasikan variabel yang tidak teramati untuk ikut masuk ke dalam model dan diperkirakan bersama dengan model yang tampak.

Penggunaan metode Kalman *Filter* memberikan pendugaan dengan cara yang dapat meminimumkan *mean square error* sehingga memungkinkan mendapatkan hasil estimasi yang optimal (Welch & Bishop, 2001). Model TVP dengan Kalman *Filter* tidak membutuhkan asumsi bahwa data harus bersifat stasioner atau independen (Guo,1990). Menggunakan representasi *state space*, model TVP dinyatakan dalam bentuk dua persamaan berikut:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{X}_t\boldsymbol{\beta}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad (2.5)$$

$$\boldsymbol{\beta}_t = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\beta}_{t-1} + \mathbf{R}_t\boldsymbol{\eta}_t \quad (2.6)$$

dengan

$\mathbf{y}_t$  = vector  $T \times 1$  dari variabel terikat

$\mathbf{X}_t$  = matriks  $T \times m$  dari variabel penjelas

$\boldsymbol{\beta}_t$  = vektor  $m \times 1$  dari parameter (vektor *state*)

$\boldsymbol{\Phi}$  = matriks transisi ( $m \times m$ )

$\mathbf{R}_t$  = matriks input yang menentukan struktur varians dari persamaan transisi berukuran ( $m \times m$ )

$\boldsymbol{\varepsilon}_t$  = vektor residual  $T \times 1$  dengan *mean*  $\mathbf{0}$  dan matriks kovarians  $\mathbf{H}_t$

$\boldsymbol{\eta}_t$  = vektor residual  $T \times 1$  dengan *mean*  $\mathbf{0}$  dan matriks kovarians  $\mathbf{Q}_t$

Persamaan (2.5) disebut sebagai persamaan pengukuran, di mana persamaan ini memungkinkan parameter untuk tergantung waktu, sementara persamaan (2.6) merupakan persamaan transisi, menentukan pergerakan parameter. Ini memungkinkan  $\boldsymbol{\beta}_t$  mengikuti AR(p) untuk persamaan transisi. Parameter  $\boldsymbol{\beta}_t$  adalah variabel acak yang tidak teramati, yang harus diestimasi menggunakan data

yang diamati  $\mathbf{y}_t$  dan  $\mathbf{X}_t$ . Untuk menduga variabel *state*, ada tiga jenis pendugaan, yaitu prediksi, penyaringan dan pemulusan (Tanizaki, 2000).

## 2.4 Kalman Filter

Metode Kalman *Filter* awalnya dikembangkan oleh Kalman (1960) dalam konteks sistem linear adalah prosedur algoritma rekursif untuk menghitung estimator optimal dari *state vector* pada waktu  $t$  berdasarkan pada informasi yang tersedia pada waktu  $t$  dan untuk perkiraan variansi dalam model deret waktu (Harvey, 1989)

Kalman *Filter* menyediakan metode pendugaan linier untuk model deret waktu apapun yang direpresentasikan dalam bentuk *state space* (Punales, 2011). Kalman *Filter* bergantung pada asumsi residual dan inisial vektor *state* berdistribusi normal, sehingga memungkinkan fungsi *likelihood* dapat dihitung melalui prediksi dekomposisi residual yang diperoleh dari Kalman *Filter*. Ini menjadi langkah untuk menduga parameter yang tidak diketahui dalam model.

Kalman *Filter* terdiri dari serangkaian persamaan rekursif berikut:

$$\bar{\boldsymbol{\beta}}_{t|t-1} = \boldsymbol{\Phi}\bar{\boldsymbol{\beta}}_{t-1} + \mathbf{c}_t \quad (\text{prediksi state})$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{t|t-1} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Sigma}_{t-1}\boldsymbol{\Phi}' + \mathbf{R}_t\mathbf{Q}_t\mathbf{R}_t' \quad (\text{prediksi varians})$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{t|t-1} = \mathbf{X}_t\bar{\boldsymbol{\beta}}_{t|t-1}$$

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{y}_t - \hat{\mathbf{y}}_{t|t-1} \quad (\text{prediksi residual})$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_t &= \mathbf{X}_t \boldsymbol{\Sigma}_{t|t-1} \mathbf{X}_t' + \mathbf{H}_t && \text{(residual varians)} \\
\mathbf{K}_t &= \boldsymbol{\Sigma}_{t-1} \mathbf{X}_t' \mathbf{F}_t^{-1} && \text{(Kalman gain)} \\
\bar{\boldsymbol{\beta}}_t &= \bar{\boldsymbol{\beta}}_{t|t-1} + \boldsymbol{\Sigma}_{t|t-1} \mathbf{X}_t' \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{v}_t && \text{(penduga state)} \\
\boldsymbol{\Sigma}_t &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \mathbf{X}_t) \boldsymbol{\Sigma}_{t|t-1} && \text{(penduga varians)} \quad (2.7)
\end{aligned}$$

dimana  $\boldsymbol{\Sigma}_{t|t-1}$  adalah matriks kovarians dari  $\bar{\boldsymbol{\beta}}_{t|t-1}$ .  $\mathbf{v}_t$  adalah prediksi residual satu periode untuk  $\mathbf{y}_t$ , yang disebut inovasi,  $\mathbf{F}_t^{-1}$  adalah invers dari matriks kovarians dari inovasi pada waktu  $t$  sementara  $\mathbf{K}_t$  disebut gain dari Kalman *Filter* (*Kalman gain*).

Vektor *Kalman gain* tergantung pada  $\boldsymbol{\Phi}$ ,  $\mathbf{H}_t$ ,  $\mathbf{Q}_t$ ,  $\mathbf{R}_t$  dan vektor data masa lalu  $\mathbf{X}_t$ . *Kalman gain* memiliki peran penting dalam memperbarui penduga karena menentukan seberapa besar inovasi tertimbang. Ketika sistem linier dan asumsi normal valid, bentuk spesifik *Kalman gain* secara optimal menimbang inovasi, yang menghasilkan  $\bar{\boldsymbol{\beta}}_t = \hat{\boldsymbol{\beta}}_t$ . Ini adalah *Minimum Mean Square Estimator* (MMSE). Jika asumsi yang disebutkan di atas dilanggar maka penaksir Kalman *Filter* tidak lagi menjadi MMSE. Namun, itu masih penduga *Minimum Mean Square Linier Estimator* (MMSLE), yang berarti itu adalah yang optimal di antara semua penduga yang terdiri dari kombinasi linear dari pengamatan. Ketika  $\boldsymbol{\Phi}$ ,  $\mathbf{H}_t$ ,  $\mathbf{Q}_t$ ,  $\mathbf{R}_t$  tidak diketahui akan digunakan *log-likelihood* inovasi digabungkan dengan pendekatan Kalman *Filter* untuk mendapatkan yang konsisten dan tanpa gejala penduga efisien dari  $\boldsymbol{\Phi}$ ,  $\mathbf{H}_t$ ,  $\mathbf{Q}_t$ ,  $\mathbf{R}_t$ , jika tidak *filter* tidak dapat optimal.

Ketika Kalman *Filter* diterapkan pada deret univariat sebagai persamaan seperti (2.2) terdapat sedikit perubahan dalam notasi untuk persamaan penyaringan, dengan  $N \times N$  matriks  $\mathbf{F}_t$  digantikan oleh skalar

$$f_t = \mathbf{X}_t \boldsymbol{\Sigma}_{t|t-1} \mathbf{X}_t' + h_t \quad (2.8)$$

Aspek lain dari pemfilteran deret univariat adalah mengatur model *state space* dengan membiarkan varians gangguan menjadi proporsional ke skalar positif  $\sigma_*^2$ , sehingga

$$\text{Var}(\boldsymbol{\epsilon}_t) = \sigma_*^2 \mathbf{h}_t \quad \text{dan} \quad \text{Var}(\boldsymbol{\eta}_t) = \sigma_*^2 \mathbf{Q}_t \quad (2.9)$$

Menerapkan rekursi menjadi salah satu alasan untuk melanjutkan dengan cara ini bahwa jika  $\sigma_*^2$  adalah salah satu parameter yang tidak diketahui dalam  $\boldsymbol{\Psi}$  dapat dikonsentrasikan keluar dari fungsi *likelihood* yang mengikuti varians dalam persamaan (2.9) (Harvey, 1989).

#### 2.4.1 Inisialisasi dari Kalman *Filter*

Untuk memulai algoritma rekursif Kalman Filter, memerlukan nilai awal untuk *state space* dan matriks varians-kovarians residual estimasi. Hamilton (1994) menyarankan untuk menggunakan rata-rata tanpa syarat dan MSE terkait untuk kondisi awal  $\bar{\boldsymbol{\beta}}_0$  dan  $\boldsymbol{\Sigma}_0$  masing-masing. Nilai-nilai ini dapat diperoleh dengan persamaan (2.10) dan (2.11).

$$\bar{\boldsymbol{\beta}}_0 = E[\boldsymbol{\beta}_0] = \mathbf{0} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_0 &= \left\{ E \left[ (\boldsymbol{\beta}_1 - E(\bar{\boldsymbol{\beta}}_1)) (\boldsymbol{\beta}_1 - E(\bar{\boldsymbol{\beta}}_1))' \right] \right\} \\ &= [\mathbf{I} - \boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\Phi}]^{-1} \times \text{vec}(\mathbf{Q}) \end{aligned} \quad (2.11)$$

di mana  $\mathbf{I}$  adalah matriks identitas dengan dimensi  $m \times m$ ,  $\otimes$  adalah produk Kronecker dan  $\text{vec}(\mathbf{Q})$  adalah operator vektorisasi (Eroglu, 2010). Namun, metode ini hanya berlaku untuk *state vector* stasioner. Dalam persamaan (2.11) istilah  $[\mathbf{I} - \Phi \otimes \Phi]^{-1}$  akan berbeda jika nonstasioner. Jika tidak memungkinkan *state* akan diperlakukan sebagai difus. *Diffuse prior* adalah metode yang diadopsi oleh Koopman, dkk.(1999) dalam pengaturan  $\bar{\beta}_0 = \mathbf{0}$  dan varians  $\Sigma_0 = \begin{bmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & \kappa \end{bmatrix}$ , dimana  $\kappa = 10^6$ .

## 2.5 Penduga *Maximum Likelihood*

Teori klasik dari *maximum likelihood* didasarkan pada situasi dimana  $T$  serangkaian dari observasi  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_T$  adalah didistribusikan secara independen dan identik. Fungsi densitas bersama diatur oleh :

$$L_{\Psi|\mathbf{y}} = \prod_{t=1}^T f(\mathbf{y}_t|\Psi)$$

dimana  $f(\mathbf{y}_t|\Psi)$  adalah fungsi densitas peluang bersama dari serangkaian  $t$  pengamatan. Setelah pengamatan dilakukan oleh  $L_{\Psi|\mathbf{y}}$  ditafsirkan kembali sebagai fungsi *likelihood* dan nilai dugaan *maximum likelihood* ditemukan dengan memaksimalkan fungsi  $L_{\Psi|\mathbf{y}}$  terhadap  $\Psi$ .

Karakteristik utama dari model deret waktu adalah observasi tidak independen. Dengan demikian, fungsi *likelihood* klasik dalam konteks analisis deret waktu

tidak dapat diaplikasikan. Oleh karena itu, definisi fungsi peluang densitas bersyarat digunakan untuk menulis fungsi densitas bersama sebagai berikut:

$$L_{\Psi|y} = \prod_{t=1}^T f(\mathbf{y}_t | \mathbf{Y}_{t-1}, \Psi)$$

dimana  $f(\mathbf{y}_t | \mathbf{Y}_{t-1}, \Psi)$  menunjukkan distribusi dari  $\mathbf{y}_t$  tergantung pada informasi yang ditetapkan pada waktu  $t - 1$ , yaitu  $\mathbf{Y}_{t-1} = \{y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1\}$ . Jika residual dan vektor awal *state* pada model berdistribusi normal multivariat, maka distribusi dari  $\mathbf{y}_t$  tergantung pada  $\mathbf{Y}_{t-1}$  itu sendiri normal. Berdasarkan asumsi bahwa nilai awal dan inovasi terdistribusi secara normal multivariat, dan  $y_t | Y_{t-1}$  adalah multivariat normal dengan  $E(\mathbf{y}_t | \mathbf{Y}_{t-1}) = \mathbf{X}_t \bar{\boldsymbol{\beta}}_{t|t-1} + \mathbf{H}_t$  dan  $\text{cov}(\mathbf{y}_t | \mathbf{Y}_{t-1}) = \mathbf{F}_t = \mathbf{X}_t \boldsymbol{\Sigma}_{t|t-1} \mathbf{X}_t' + \mathbf{H}_t$ . Oleh karena itu, seperti yang didefinisikan sebelumnya:

$$\mathbf{y}_t - E(\mathbf{y}_t | \mathbf{Y}_{t-1}) = \mathbf{y}_t - \mathbf{X}_t \bar{\boldsymbol{\beta}}_{t|t-1} = \mathbf{v}_t$$

dan  $\mathbf{F}_t$  adalah matriks kovarians  $\mathbf{v}_t$ , maka fungsi *likelihood* dapat ditulis sebagai fungsi inovasi sebagai berikut:

$$L_{\Psi|y} = \prod_{t=1}^T (2\pi)^{-\frac{N}{2}} |\mathbf{F}_t|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{v}_t' \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{v}_t}$$

dimana  $|\mathbf{F}_t|$  adalah determinan dari matrix  $\mathbf{F}_t$ . Misalkan sekarang didefinisikan,

$$l_{\Psi|y} = \log(L_{\Psi|y}) \tag{2.12}$$

sebagai fungsi *log-likelihood*. Kemudian, dengan sifat-sifat logaritma dan (2.12)

$$l_{\Psi|y} = -\frac{TN}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \log(|\mathbf{F}_t|) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \mathbf{v}_t' \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{v}_t$$

dan itu dikenal sebagai bentuk dekomposisi residual prediksi dari *likelihood*.

Dengan rumus dekomposisi residual prediksi, (fungsi *log-likelihood* dari residual

prediksi) pada dasarnya didekomposisikan menjadi beberapa segmen waktu yang berbeda.

*Log-likelihood* pada setiap waktu dapat direpresentasikan oleh inovasi  $\mathbf{v}_t$  dan varians  $\mathbf{F}_t$ , keduanya merupakan fungsi dari parameter yang tidak diketahui  $\boldsymbol{\Psi} = (\boldsymbol{\Phi}, \mathbf{H}_t, \mathbf{Q}_t, \mathbf{R}_t)$ . Karena  $\mathbf{v}_t$  dan  $\mathbf{F}_t$  melibatkan istilah rekursif, teknik Kalman *Filter* digunakan untuk memperkirakan pasangan parameter model tetap, dan didapatkan dari prediksi nilai masa depan. Di sisi lain, penduga *maximum likelihood* diperoleh dengan memaksimalkan penjumlahan dari *log-likelihood* sepanjang waktu sehubungan dengan didasarkan pada informasi dari seluruh deret waktu. Setelah memperkirakan vektor varians model prediksi berdasarkan model *state space* tetap dapat dibuat dan *mean square error* dapat diminimalkan.

Pada model univariat biasanya parameter dapat diatur ulang sehingga  $\boldsymbol{\Psi} = [\boldsymbol{\Psi}_* \quad \sigma_*^2]$ , di mana  $\boldsymbol{\Psi}_*$  adalah vektor yang berisi parameter  $t - 1$  dan  $\sigma_*^2$  adalah salah satu varians residual dalam model. Varians dari residual yang dapat dinyatakan sebagai (2.9), yaitu  $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma_*^2 \mathbf{h}_t$  dan  $\text{Var}(\boldsymbol{\eta}_t) = \sigma_*^2 \mathbf{Q}_t$ , dimana  $\mathbf{h}_t$  dan  $\mathbf{Q}_t$  tergantung pada  $\boldsymbol{\Psi}_*$  tetapi tidak  $\sigma_*^2$ . Sebagai aturan  $\mathbf{h}_t$  atau salah satu elemen diagonal dalam  $\mathbf{Q}_t$  akan diatur menjadi satu. Pengaturan ulang parameter model memungkinkan  $\sigma_*^2$  dikonsentrasi keluar dari fungsi kemungkinan. Sehingga dekomposisi residual prediksi menghasilkan:

$$\log L = -\frac{T}{2} \log 2\pi - \frac{T}{2} \log \sigma_*^2 - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \log f_t - \frac{1}{2\sigma_*^2} \sum_{t=1}^T \mathbf{v}_t^2 / f_t$$

Jika algoritma untuk menghitung fungsi *likelihood* telah didapatkan, fungsi itu harus dimaksimalkan terhadap parameter yang tidak diketahui  $\Psi$ . Ini biasanya akan dilakukan menggunakan beberapa jenis prosedur pengoptimalan numerik (Harvey,1989).

## 2.6 Algoritma

Algoritma yang digunakan untuk memperkirakan parameter model TVP didasarkan pada persamaan rekursif Kalman *Filter* untuk persamaan *state space* model dengan parameter *time varying*. Kalman dan Gaussian *maximum likelihood* berhubungan satu sama lain dalam algoritma ini. Untuk menerapkan Kalman *Filter*, sistem matriks harus diperbaiki dan *maximum likelihood* diduga. Di sisi lain, nilai *log-likelihood* dihitung dari produk dari nilai-nilai tersebut diperoleh oleh algoritma Kalman *Filter*. Prosedur mulai memberikan nilai awal untuk inovasi dan matriks kovarians, dan juga nilai awal dari parameter, untuk Kalman *Filter*, itu akan diduga (Punales, 2011).

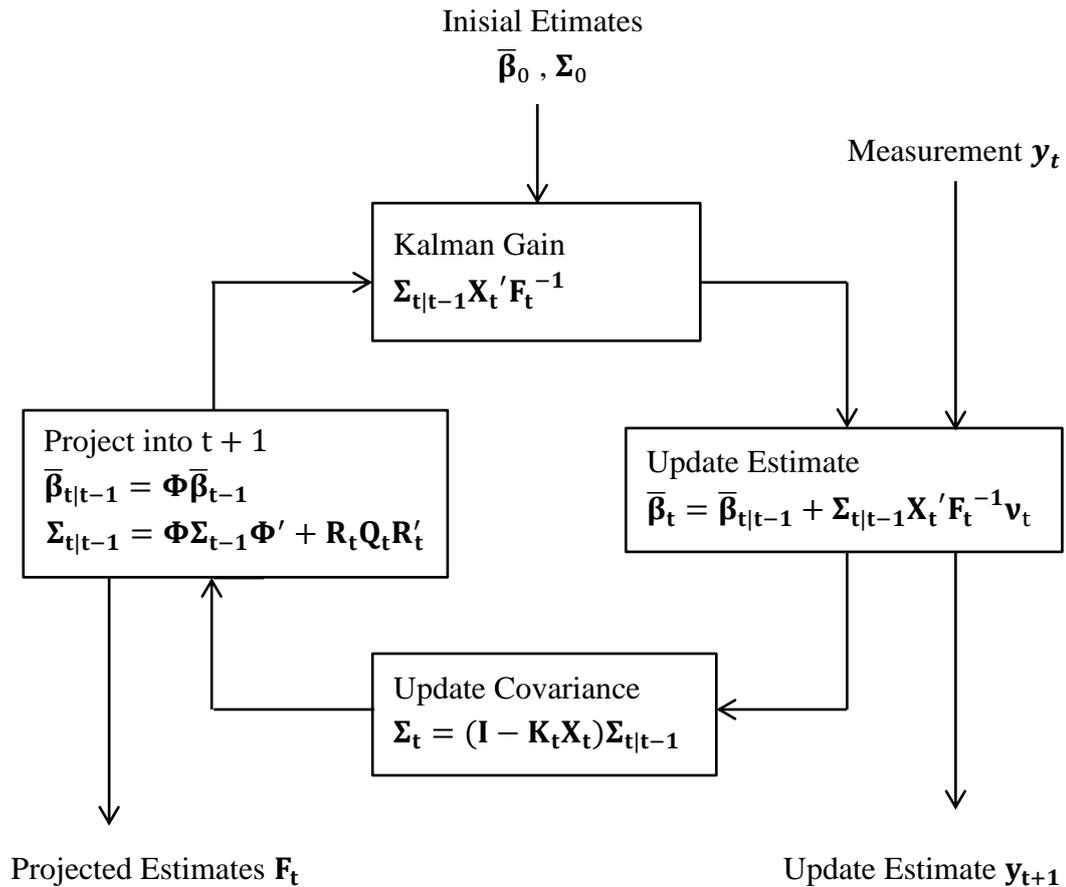
Kalman *Filter* menyediakan inovasi dan matriks kovarian inovasi yang diperlukan untuk menghitung *log-likelihood*. Kemudian, nilai awal dari parameter, diperbarui berdasarkan beberapa konvensional resep optimasi numerik. Setelah parameter diperbarui, Kalman *Filter* dilakukan lagi untuk menghitung kemungkinan log baru. Prosedur ini diulang sampai kriteria konvergensi tercapai. *State* dan penduga parameter terkait dengan maksimalisasi *log-likelihood* fungsi dianggap sebagai penduga akhir.

Langkah-langkah metode pendugaan:

1. Menginisialisasi variabel  $\Phi$ ,  $\mathbf{H}_0$ ,  $\mathbf{Q}_0$ ,  $\mathbf{R}_0$ ,  $\bar{\boldsymbol{\beta}}_0$  dan  $\boldsymbol{\Sigma}_0$ , dimana  $\boldsymbol{\Sigma}_0$  adalah matriks kovarians dari vektor  $\bar{\boldsymbol{\beta}}_0$ .
2. Terapkan Kalman *Filter* ke  $\hat{\mathbf{y}}_{t|t-1}$  untuk menghasilkan  $\mathbf{v}_t$ , residual prediksi, dan  $\mathbf{F}_t$ , inovasi-kovarians. untuk menentukan fungsi *log-likelihood*.
3. Dengan menggunakan pengoptimalan numerik, maksimalkan fungsi *likelihood* sehubungan dengan parameter yang tidak diketahui, volatilitas residual,  $\mathbf{v}_t$ , dan volatilitas komponen stokastik,  $\mathbf{F}_t$ . Dilangkah ini kita perlu menemukan

$$l_{\Psi^*|y} = \max_{\Psi} l_{\Psi|y}$$

di mana  $\Psi$  adalah vektor dari varians untuk menduga yang merepresentasikan varians dari setiap persamaan model. Dengan demikian, wilayah di mana varians harus diestimasi adalah semua nilai real positif. Secara singkat, loop algoritmik dapat diringkas dalam diagram berikut:



Gambar 2.2. Diagram Alur Algoritma Kalman Filter

## 2.7 Kriteria Kesesuaian Model

Kriteria yang digunakan untuk menguji ketepatan ramalan adalah *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE) dan *Root Mean Square Percentage Error* (RMSPE). Sebagai suatu kriteria dalam menguji ketepatan model, MAPE dan RMSPE merepresentasikan model yang dibuat bahwa semakin kecil nilai MAPE dan RMSPE, maka semakin baik model yang digunakan. MAPE dan RMSPE dapat dituliskan sebagai berikut:

$$MAPE = \frac{\sum_{t=1}^T \frac{|\varepsilon_t|}{y_t}}{m}$$

$$RMSPE = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{t=1}^T \left(\frac{\varepsilon_t}{y_t}\right)^2}$$

dengan  $t$  merupakan banyak data pada periode yang digunakan,  $\varepsilon_t$  merupakan residual dari peramalan,  $Y_t$  dan merupakan nilai sebenarnya dari variabel jumlah data. Menurut Chang, dkk (2007), kriteria MAPE sebagai berikut:

Tabel 2.1. Kriteria MAPE

MAPE	Kategori Kemampuan Peramalan
< 10%	Sangat Baik
10% – 20%	Baik
20% – 50%	Cukup
> 50%	Buruk

## 2.8 Akaike Information Criterion (AIC)

Kriteria informasi digunakan untuk pemilihan model terbaik yang dipilih berdasarkan *Akaike Info Criterion* (AIC) karena kriteria ini konsisten dalam menduga parameter model. Tujuan AIC adalah menemukan prediksi yang terbaik. Menurut Azam (2007), kriteria tersebut dirumuskan sebagai berikut:

$$AIC = -2 \left(\frac{l}{T}\right) + 2 \left(\frac{k}{T}\right)$$

dengan  $l$  adalah fungsi *log-likelihood*,  $k$  adalah jumlah parameter yang diestimasi,  $T$  adalah jumlah observasi. Semakin besar nilai *log-likelihood* yang dimiliki suatu

model, maka model tersebut akan semakin baik. Kriteria AIC memuat fungsi *log-likelihood*, sehingga model yang dipilih untuk meramalkan data adalah model dengan nilai AIC terkecil karena lebih konsisten dalam menduga parameter model.

## 2.9 Uji Diagnostik

Uji diagnostik dilakukan untuk mengetahui residual dari model berdistribusi normal dan tidak terdapat korelasi antara residual pada persamaan pengukuran dan residual pada persamaan transisi. Pengujian ini dilakukan karena Kalman *Filter* bergantung pada asumsi residual data berdistribusi normal (Bernard, dkk, 2011).

### 2.9.1 Uji Normalitas

Uji normalitas residual adalah uji yang digunakan untuk mengetahui kenormalan residual pada suatu model. Karena Kalman *Filter* bergantung pada asumsi normalitas, pengujian normalitas biasanya sebagai kunci spesifikasi pemeriksaan. Menggunakan deret dari residual, perubahan dari normalitas dinilai dari koefisien *skewness* (S) dan kurtosis (K), digabungkan pada kriteria Jarque-Bera (JB) sebagai berikut :

$$JB = \frac{n}{6} \left( S^2 + \frac{(K - 3)^2}{4} \right)$$

dimana,

$$S = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right)^{3/2}}, \quad K = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right)^2}$$

dengan

JB = Jaque Bera

n = jumlah sampel

S = Skewness

K = Kutosis

Pengujian menggunakan statistik Jarque-Bera dengan hipotesis sebagai berikut:

$H_0$  : Residual berdistribusi normal

$H_1$  : Residual tidak berdistribusi normal

Uji Jarque-Bera (JB) *Test of Normality* berdistribusi *chi-square* dengan derajat bebas 2 ( $\chi_2^2$ ). Jika hasil Jarque-Bera lebih besar dari distribusi *chi-square* maka Tolak  $H_0$  yang berarti tidak berdistribusi normal (Setiawan, dkk, 2013).

## 2.9.2 Uji Autokorelasi

Untuk autokorelasi residual pada persamaan pengukuran dan persamaan transisi digunakan uji-*d* Durbin Watson. Statistik uji yang digunakan yaitu:

$$d = \frac{\sum_2^n (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2}{\sum_1^n \varepsilon_t^2}$$

Nilai  $d$  akan dibandingkan dengan nilai  $d$  Durbin Watson pada tabel ( $d_L$  dan  $d_U$ ),  $d_L$  merupakan batas bawah dan  $d_U$  merupakan batas atas. Menurut Gujarati (2004) kaidah ada tidaknya autokorelasi seperti yang dijelaskan Tabel 2.2.

Tabel 2.2. Kaidah Keputusan Identifikasi Autokorelasi

Hipotesis Nol	Jika	Keputusan
Tidak terdapat autokorelasi positif	$0 < d < d_L$	Tolak
Tidak terdapat autokorelasi positif	$d_L < d < d_U$	Tidak ada keputusan
Terdapat autokorelasi negatif	$4 - d_L < d < 4$	Tolak
Terdapat autokorelasi negatif	$4 - d_U < d < 4 - d_L$	Tidak ada keputusan
Terdapat autokorelasi positif maupun negatif	$d_U < d < 4 - d_U$	Tolak

Model TVP mengasumsikan tidak terdapat korelasi antara residual pada persamaan pengukuran dan persamaan transisi. Untuk melihat korelasi antara residual pada persamaan pengukuran dan persamaan transisi digunakan koefisien korelasi Pearson. Rumus korelasi Pearson adalah sebagai berikut:

$$r_{\varepsilon_t, \eta_t} = \frac{n \sum_{t=1}^n \varepsilon_t \eta_t - \sum_{t=1}^n \varepsilon_t \sum_{t=1}^n \eta_t}{\sqrt{(n \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2 - (\sum_{t=1}^n \varepsilon_t)^2)} \sqrt{(n \sum_{t=1}^n \eta_t^2 - (\sum_{t=1}^n \eta_t)^2)}}$$

Interpretasi terhadap koefisien korelasi diberikan oleh Guilford (1956) sebagai berikut:

Tabel 2.3. Interpretasi Nilai  $r$  (koefisien korelasi)

Interval Koefisien	Tingkat hubungan
0,00 - 0,199	Sangat rendah
0,20 - 0,399	Rendah
0,40 - 0,599	Sedang
0,60 - 0,799	Kuat
0,80 - 1,00	Sangat kuat

Untuk menguji signifikansi nilai  $r$  (koefisien korelasi) yang diperoleh maka dapat dilakukan sebagai berikut:

1. Dengan mengacu pada kriteria  $r$  (koefisien korelasi) yang diberikan oleh Guilford (1956).
2. Dengan membandingkan nilai  $r$  (koefisien korelasi) dengan nilai  $r$  dengan taraf signifikansi ( $\alpha = 0,05$ ) atau ( $\alpha = 0,01$ ) dan  $db = N - 2$ .
3. Dengan menghitung nilai  $t_{hitung}$  berdasarkan nilai  $r_{hitung}$  dengan hipotesis sebagai berikut:

$H_0$  : Tidak terdapat korelasi antara  $\epsilon_t$  dan  $\eta_t$

$H_1$  : Terdapat korelasi antara  $\epsilon_t$  dan  $\eta_t$

Statistik uji  $t$  dengan rumus sebagai berikut:

$$t_{hitung} = \frac{r_{\epsilon_t, \eta_t} \sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - r_{\epsilon_t, \eta_t}^2}}$$

Harga  $t_{hitung}$  yang diperoleh selanjutnya dibandingkan dengan harga  $t_{tabel}$  dengan taraf signifikansi ( $\alpha = 0,05$ ) atau ( $\alpha = 0,01$ ) dan  $db = N - 2$ . Jika  $t_{hitung} > t_{tabel}$ , maka tolak  $H_0$ . Jika  $t_{hitung} < t_{tabel}$ , maka tidak tolak  $H_0$ .

### **III. METODOLOGI PENELITIAN**

#### **3.1 Tempat dan Waktu Penelitian**

Penelitian ini dilakukan di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung. Waktu penelitian pada semester ganjil Tahun Ajaran 2018/2019.

#### **3.2 Data dan Spesifikasi *Software* yang Digunakan**

Penelitian ini menggunakan data sekunder yaitu data penjualan batubara yang diperoleh dari PT. Bukit Asam (Persero), Tbk. Unit Pelabuhan Tarahan, Bandar Lampung dan data Harga Acuan Batubara dari Januari 2012 sampai dengan Desember 2017 yang diperoleh dari [www.indonesia-investments.com](http://www.indonesia-investments.com) yang diakses tanggal 04 Oktober 2018 pukul 12.58 WIB. Program komputer yang digunakan untuk mendukung proses penelitian ini adalah *software* Eviews 8.

Tabel 3.1. Data Penjualan Batubara

Bulan	Tahun					
	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Januari	1009195	1067091	1000845	1061504	1062465	1411706
Februari	966689	841557	925759	1015166	1316502	1367251
Maret	890895	1040909	1009423	1156088	1439194	1578226
April	920174	953900	1017947	983374	1250171	1511876
Mei	816478	808575	1010817	1180967	1171692	1527410
Juni	907645	859569	1138764	1168254	930929	1476449
Juli	1127903	939837	1027579	1311322	977955	1723339
Agustus	1005641	1013133	1159085	1326774	1238525	1354625
September	683661	865756	1167210	1286823	1455453	1355406
Oktober	993852	1107954	1237869	1165301	1422695	1893915
November	930086	1096461	1236354	1048897	1272370	1426745
Desember	1011174	1060182	1100056	1210615	1609138	1719534

Tabel 3.2. Data Harga Acuan Batubara (HAB)

Bulan	Tahun					
	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Januari	109.29	87.55	81.90	63.84	53.20	86.23
Februari	111.58	88.35	80.44	62.92	50.92	83.32
Maret	112.87	90.09	77.01	67.76	51.62	81.90
April	105.61	88.56	74.81	64.48	52.32	82.51
Mei	102.12	85.33	73.60	61.08	51.20	83.81
Juni	96.65	84.87	73.64	59.59	51.87	75.46
Juli	87.56	81.69	72.45	59.16	53.00	78.95
Agustus	84.65	76.70	70.29	59.14	58.37	83.97
September	86.21	76.89	69.69	58.21	63.93	92.03
Oktober	86.04	76.61	67.26	57.39	69.07	93.99
November	81.44	78.13	65.70	54.43	84.89	94.84
Desember	81.75	80.31	69.23	53.51	101.69	94.04

### 3.3 Metode Penelitian

Tahapan analisis yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Mempelajari model *Time Varying Parameter* (TVP) dan *Kalman Filter*
  - a. Identifikasi model TVP dinyatakan dalam bentuk *state space*, yaitu persamaan pengukuran dan persamaan transisi yang memiliki asumsi tambahan.
  - b. Pendugaan model TVP menggunakan algoritma *Kalman Filter* yang dibagi menjadi tiga tahap. Pertama, inialisasi *state* dengan memberi nilai awal  $\bar{\beta}_0$  dan  $\Sigma_0$ . Kedua, prediksi *state* dengan memulai pendugaan. Ketiga, memperbarui *state* yang merupakan proses pembaruan dengan menggunakan *Kalman gain* ( $K_t$ ).
  - c. Pendugaan *Maximum Likelihood* menggunakan *Kalman Filter* untuk memperkirakan parameter model dan vektor *state space*  $\beta_t$  melalui fungsi dekomposisi residual prediksi.
2. Penerapan algoritma *Kalman Filter* pada model TVP
  - a. Identifikasi model TVP dilakukan dengan melihat plot data. Setelah model diidentifikasi maka dilakukan pendugaan menggunakan algoritma *Kalman Filter* hingga diperoleh vektor *state space*  $\beta_t$ .
  - b. Kriteria peramalan digunakan untuk menguji ketepatan ramalan adalah *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE) dan *Root Mean Square Percentage Error* (RMSPE). Tahap ini dilakukan sebagai suatu kriteria untuk menguji ketepatan model.

- c. Uji diagnostik terhadap hasil pendugaan. Dalam tahap ini akan diperiksa apakah residual dari model berdistribusi normal dengan uji Jarque-Bera dan memeriksa apakah terdapat autokorelasi pada residual persamaan pengukuran dan persamaan transisi menggunakan uji Durbin Watson dan korelasi antara residual pada persamaan pengukuran dan residual pada persamaan transisi menggunakan uji korelasi Pearson.
- d. Melakukan transformasi data jika asumsi pada model *state space* dan algoritma Kalman *Filter* tidak terpenuhi.

## V. KESIMPULAN DAN SARAN

### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan, dapat disimpulkan beberapa hal diantaranya:

1. Model *Time Varying Parameter* merupakan model deret waktu univariat dengan parameter *time varying* yang dapat direpresentasikan dalam bentuk *state space* dan diduga menggunakan Kalman *Filter*.
2. Kalman *Filter* merupakan algoritma rekursif yang digunakan untuk menduga model yang dibentuk ke dalam bentuk *state space*. Kalman *Filter* menggunakan pengoptimalan numerik untuk mengoptimalkan fungsi *maximum likelihood* dalam proses pendugaan parameter melalui fungsi dekomposisi residual prediksi.
3. Analisis contoh kasus model TVP dari data penjualan batubara berdasarkan harga acuan batubara pada penelitian ini menghasilkan nilai vektor *state* ( $\bar{\beta}_t$ ) yang dapat dilihat pada Tabel 4.3 dan varians dari vektor *state* adalah 0,009886, dengan model TVP sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \vdots \\ \hat{y}_{72} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & & & 0 \\ & X_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & X_{72} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\beta}_1 \\ \bar{\beta}_2 \\ \vdots \\ \bar{\beta}_{72} \end{bmatrix}$$

Model  $\hat{\mathbf{y}}_t$  tersebut memiliki nilai MAPE dan RMSPE lebih kecil dari 10% yang berarti tingkat keakuratan model sangat baik. Hasil uji diagnostik menunjukkan residual model berdistribusi normal. Sehingga asumsi Kalman *Filter* terpenuhi dan parameter  $\bar{\boldsymbol{\beta}}_t$  merupakan penduga optimal bagi  $\boldsymbol{\beta}_t$ .

## 5.2 Saran

Adapun saran untuk penelitian berikutnya, yaitu:

1. Menggunakan model yang lebih kompleks baik univariat maupun multivariat.
2. Membandingkan Algoritma Kalman Filter dengan metode lain dalam pendugaan parameter model.
3. Menganalisis lebih lanjut pengoptimalan numerik untuk memaksimalkan fungsi *log-likelihood* dalam Kalman *Filter*.
4. Memodifikasi Kalman Filter untuk mengatasi korelasi antara residual persamaan pengukuran dan persamaan transisi.

## DAFTAR PUSTAKA

- Aswi dan Sukarna. 2006. *Analisis Deret Waktu*. Andira Publisher, Makasar.
- Azam, I. 2007. The Effect of Model Selection Uncertainty on Autoregressive Model Estimates. *International Reserach Journal of Finance and Economics*. (11): 80-99.
- Bernard, J.T., Dufour, J.M., Khalaf. L., dan Kichian, M. 2011. An Identification Robust Test for Time Varying Parameter in the Dynamic of Energy Prices. *Journal of Applied Econometrics*. 24(4): 10-11.
- Chang, P.C., Wang, Y.W., dan Liu, C.H. 2007. The Development of a Weighted Evolving Fuzzy Neural Network For PBC sales Forecasting. *Journal Expert System with Application*. 32: 86-96.
- Chen, J. dan Wu, H. 2008. Estimation of Time Varying Parameters in Deterministic Dynamic Models. *Statistica sinica*. 18: 987-1006.
- Commandeur, J. dan Koopman, S.J. 2007. *An Introduction to State Space Time Series Analysis*. Oxford University Press, Oxford.
- Eroglu, B.A. 2010. Spurious Regression Problem in Kalman Filter Estimation of Time Varying Parameter Models. Tesis. Departement Of Economics Bilkent University, Ankara.
- Gujarati, D. 2004. *Basic Econometrics*. Ed.ke-4. McGraw-Hill, Singapore.
- Guilford, J.P. 1956. *Fundamental Statistic in Psychology and Education*. Ed.ke-3. McGraw-Hill, New York.

- Guo, L. 1990. Estimating Time-Varying Parameter by the *Kalman Filter* Based Algorithm: Stability and Convergence. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 35(2): 141-147.
- Hamilton, J.D. 1994. State Space Models. *Hanbook of Econometrics*. 4(50): 3048-3049.
- Harvey, A.C. 1989. *Forecasting, Structural Time Series and The Kalman Filter*. Cambridge University Press.
- Ito, M., Noda, A., dan Wada, T. 2017. *An Alternative Estimation of a Time Varying Parameter Model*. Keiko University.
- Kalman, R.E. 1960. A New Approach to Linier Filtering and Prediction Problems. *Journal of Basic Engineering, Transaction ASME*. 82: 95-108.
- Koopman, S.J., Shephard, N., dan Doornik, J.A. 1999. Statistical Algorithms for Models in State Space Using SsfPack 2.2. *Econometrics Journal*. 2: 117.
- Makridakis, S., Wheelwright, S.C., dan Mc Gee, V.E. 1992. *Metode dan Aplikasi Peramalan*. Ed.ke-2. Terjemahan Untung Susu Andriyanto. Erlangga, Jakarta.
- McGough, Bruce. 2000. *Statistical Learning with Time Varying Parameters*. Oregon State University.
- Punales, A.G.S. 2011. Time Varying Coefficient Modeels and The Kalman Filter: Application to Hedge Funds. Tesis. Bachelor of Science Ryerson University, Canada.
- SAS Intitute Inc. 2002. SAS User Guide Version 9.1 SAS Intitute Inc., Cary, NC, USA.
- Siswanto. 2007. *Operations Research*. Erlangga, Jakarta.

Setiawan, A., Kasabarang, D.C., dan Susanto, B. 2013. *Uji Normalitas Menggunakan Statistik Jarque-Bera Berdasarkan Metode Bootstrap*. Seminar Nasional. Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Kristen Satya Wacana, Salatiga.

Soejati, Z. 1987. *Analisis Runtun Waktu*. Kurnia Universitas Terbuka, Jakarta.

Tanizaki, H. 2000. The Time Varying Parameter Model Revisited. *Journal Economic Review*. 45: 41-57.

Welch, G. dan Bishop, G. 2001. *An Introduction to the Kalman Filter*. Siggraph 2001 Course 8.