KARAKTERISTIK FUNGSI PHI (∅) EULER

(Skripsi)

Oleh

RINI KARINA AGUSTINI

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

ABSTRAK

KARAKTERISTIK FUNGSI PHI ($\emptyset$) EULER

OLEH

RINI KARINA AGUSTINI

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan karakteristik fungsi phi ($\emptyset$) Euler dan mempelajari sifat-sifatnya. Diperoleh kesimpulan bahwa untuk $fpb(m,n) = 1$, dengan *m* dan *n* adalah bilangan bulat positif, berlaku $\emptyset(\mathrm{mn}) = \emptyset(\mathrm{m})\emptyset(\mathrm{n})$.

Kata Kunci : Fungsi phi, fungsi Euler, persamaan karakteristik.

ABSTRACT

THE CHARACTERISTICS OF EULER'S PHI ($\emptyset$) FUNCTION

By

RINI KARINA AGUSTINI

This study aims to determine the charasteristics of Euler's phi ($\emptyset$**)** function and to prove the properties of Euler's phi ($\emptyset$**)** function. We conclude that if $\gcd(\mathrm{m},\mathrm{n}) = 1$, for *m* and *n* are positive integers, then $\emptyset(\mathrm{mn}) = \emptyset(\mathrm{m})\emptyset(\mathrm{n})$.

Keyword : Phi's function, Euler's function, charateristics equation.

KARAKTERISTIK FUNGSI PHI (∅) EULER

Oleh

RINI KARINA AGUSTINI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

Judul skripsi : **KARAKTERISTIK FUNGSI PHI (∅) EULER**

Nama mahasiswa : *Rini Karina Agustini*

Nomor pokok mahasiswa : **1517031164**

Program studi : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi pembimbing

Drs. Suharsono. S, M.S., M.Sc., Ph.D.	**Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.**
NIP. 19620513 198603 1 003	NIP. 19631108 198902 2 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP. 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Drs. Suharsono. S, M.S., M.Sc., Ph.D.** ....

Sekretaris : **Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Drs. Suratman Umar, M.Sc.
NIP 19640604 199003 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **6 Maret 2019**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama mahasiswa	: RINI KARINA AGUSTINI
Nomor pokok mahasiswa	: 1517031164
Jurusan	: Matematika
Judul skripsi	: KARAKTERISTIK FUNGSI PHI (ϕ) EULER

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, Maret 2019

Yang menyatakan,

Rini Karina Agustini
NPM. 1517031164

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Rini Karina Agustini, anak pertama dari tiga bersaudara yang dilahirkan di Kotabumi pada tanggal 07 Agustus 1997 oleh pasangan Bapak Bambang Karyanto dan Alm. Ibu Santi Tisnawati.

Penulis menempuh pendidikan di Taman Kanak-Kanak (TK) DEPAG pada tahun 2002- 2003, kemudian bersekolah di SD Negeri 3 Kotabumi pada tahun 2003-2009, setelah itu melanjutkan sekolah di SMP N 01 Abung Selatan pada tahun 2009-2012, dan bersekolah di SMA N 3 Kotabumi pada tahun 2012-2015.

Pada tahun 2015 penulis terdaftar sebagai mahasiswi S1 Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui Jalur SBMPTN.

Pada tahun 2018 penulis melakukan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Setia Agung Kecamatan Gunung Terang, Kabupaten Tulang Bawang Barat, Provinsi Lampung dan pada tahun yang sama penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Kantor Badan Pengelola Pajak dan Retribusi Daerah Kota Bandar Lampung.

KATA INSPIRASI

"Allah tidak membebani seseorang itu melainkan sesuai dengan kesanggupannya."

(Q.S. Al-Baqarah:286)

"Maka sesungguhnya bersama kesulitan itu ada kemudahan. Sesungguhnya bersama kesulitan itu ada kemudahan."

(Q.S. Al-Insyirah: 5-6)

"Berpikirlah positif, tidak peduli seberapa keras kehidupanmu."

(Ali bin Abi Thalib)

"Kesabaran adalah kunci kesuksesan."

(Bill Gates)

"Jika diberikan kegagalan sekali, maka kita harus bisa bangkit berkali-kali. Teruslah memotivasi diri agar selalu sabar dan semangat. Karena tidak ada proses yang akan mengkhianati sebuah hasil."

(Rini Karina Agustini)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirabbil'alamin

Dengan kerendaan hati dan rasa bersukur kepada Allah SWT

Kupersembakan karya ini kepada :

Orang tua tercinta Bapak Bambang Karyanto dan Alm. Ibu Santi Tisnawati atas doa, dukungan dan kasih sayang yang terus diberikan serta kerja keras dalam merawat, membesarkan penulis hingga sekarang, serta kembaran dan adik saya Rina dan Ovi yang selalu memberi semangat dan kasih sayang

Para pendidik, guru – guru, serta dosen yang telah meluangkan waktu untuk menurunkan ilmunya kepada penulis.

Semua sahabat terbaik yang terus mendukung, menolong, memberikan semangat dalam proses hidup penulis.

Almamater Unila dan Negeriku Indonesia.

SANWACANA

Dengan mengucapkan *Alhamdulillah* penulis panjatkan puji syukur kehadirat Allah SWT atas rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “KARAKTERISTIK FUNGSI PHI ($\emptyset$) EULER”. Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si.) di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Dengan ketulusan hati penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada :

1. Bapak Drs. Suharsono. S, M.S., M.Sc., Ph.D., selaku Dosen Pembimbing I, dan pembimbing akademik yang telah memberikan arahan, masukkan, ide, kritik, dan saran kepada penulis selama menempuh pendidikan di Jurusan Matematika dan penyusunan skripsi ini.
2. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, MA., Ph.D., selaku Dosen Pembimbing II, dan Ketua Jurusan Matematika yang telah memberikan arahan dan masukannya selama penyusunan skripsi ini.
3. Ibu Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si., selaku Dosen Penguji, terima kasih atas kesediannya untuk menguji, memberikan saran dan kritik yang membangun dalam penyelesaian skripsi ini.

4. Bapak Prof. Dr. Sutopo Hadi, S.Si., M.Sc., selaku Dekan FMIPA Universitas Lampung.
5. Seluruh Dosen dan Karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Bapak Bambang Karyanto dan Alm. Ibu Santi Tisnawati tercinta yang tak pernah berhenti memberi semangat, doa, dorongan, nasehat dan kasih sayang serta pengorbanan yang tak tergantikan hingga penulis selalu kuat menjalani setiap rintangan yang ada di depan.
7. Rina, Ovi dan keluarga besarku yang selalu berbagi canda dan tawa serta selalu menyemangati hingga terselesaikannya skripsi ini.
8. Sahabat – sahabat seperjuangan menuju wisuda yaitu Aura, Luthfi, Sela, Litta, Siska, Deby, Farida, Atuy, Salma, Rani, Irma, Yulia, Habib yang selalu siap sedia dari usul, hasil sampai ujian skripsi serta semangat hingga dapat diselesaikannya skripsi ini.
9. Para Pejuang S.Si yaitu Anita, Cintya, Dhenty, Intan, Natasha, Indraswari, Moni yang selalu mendukung dan memberi nasihat kepada penulis untuk menulis skripsi ini.
10. Teman-teman angkatan 2015 jurusan matematika, serta Abang dan Yunda Matematika 2014 yang telah memberikan semangat dan saran kepada penulis.
11. Almamater tercinta Universitas Lampung.

Bandar Lampung,   Maret 2019
Penulis

Rini Karina Agustini

DAFTAR ISI

Halaman

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Matematika adalah pola berpikir, mengorganisasikan, pembuktian yang logik. Matematika adalah bahasa yang menggunakan istilah yang didefinisikan dengan cermat, jelas, dan akurat, representasinya dengan simbol.

Dalam matematika, terdapat banyak cabang pembagian ilmu matematika, salah satunya adalah teori bilangan. Teori bilangan adalah cabang dari matematika murni yang mempelajari sifat-sifat bilangan bulat dan mempunyai berbagai masalah terbuka yang dapat dengan mudah dimengerti sekalipun bukan oleh ahli matematika. Teori bilangan pertama kali diperkenalkan oleh Phytagoras dan murid-muridnya. Mereka percaya bahwa penjelasan pada bilangan terdapat tentang alam semesta. Tesis mereka adalah “segalanya adalah bilangan “ dan matematika adalah suatu cara menuju akhir yaitu Filsafat (Burton, 1980).

Awal kebangkitan teori bilangan modern dipelopori oleh Pierre de Fermat (1601-1665), dan Leonhard Euler (1707-1783). Ahli matematika mendefinisikan sistem bilangan yang lebih mudah dimengerti dan diaplikasikan diberbagai disiplin ilmu. Seperti dalam penjabaran berikut, bilangan bulat adalah bilangan yang terdiri atas bilangan bulat positif, bilangan nol, dan bilangan bulat negatif. Bilangan prima adalah bilangan yang tepat mempunyai dua faktor yaitu bilangan 1 (satu) dan bilangan itu sendiri (Burton, 1980).

Dalam teori bilangan, Leonhard Euler memperkenalkan fungsi phi Euler yang hanya memperhitungkan bilangan bulat. Meskipun fungsi ini memiliki nama phi, namun fungsi ini dalam perhitungannya sama sekali tidak menggunakan phi (ϕ) yang bernilai 1,61803399. Penggunaan phi (ϕ) hanya untuk suatu 'fungsi'. Dalam teori bilangan, ada beberapa macam fungsi yakni fungsi Mobius, fungsi Tau, fungsi sigma, dan fungsi phi Euler. Dari beberapa fungsi tersebut yang belum terbukti memiliki karakteristik atau sifat multiplikatif adalah fungsi phi Euler. Sehingga, pada penelitian ini penulis tertarik untuk menentukan apakah fungsi phi Euler juga memiliki karakteristik atau sifat multiplikatif.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan karakteristik fungsi phi (ϕ) Euler.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat yang didapat dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Mengetahui fungsi phi (ϕ) Euler.
2. Mengembangkan wawasan tentang teori bilangan terutama tentang karakteristik fungsi phi (ϕ) Euler.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bagian ini diterangkan materi yang berkaitan dengan penelitian, diantaranya konsep bilangan bulat, bilangan prima, pasangan relatif prima dan kekongruenan.

2.1 Bilangan Bulat

Sifat Pembagian pada Bilangan Bulat

Secara umum, apabila *a* adalah bilangan bulat dan adalah *b* bilangan bulat positif, maka ada tepat satu bilangan *q* dan *r* sedemikian hingga :

$$a = qb + r \, , 0 \leq r < b$$

dalam hal ini, *q* disebut hasil bagi dan *r* sisa pada pembagian "*a* dibagi dengan *b* ". Jika $r = 0$ maka dikatakan a habis dibagi *b* dan ditulis $b \mid a$. Untuk a tidak habis dibagi *b* ditulis $b \nmid a$ (Burton, 1980).

Contoh :

1987 dibagi dengan dengan 97 memberikan hasil bagi 20 dan sisa 47 :

$$1987 = 20 \cdot 97 + 47$$

Teorema 1 (Burton, 1980)

Untuk bilangan-bilangan bulat a, b, c dan d berikut :

1. $a \mid 0$, $1 \mid 0$, $a \mid a$
2. $a|1$, jika dan hanya jika $a = 1$ atau $a = -1$.
3. jika $a \mid b$ dan $b \mid c$ maka $a \mid c$.
4. jika $a \mid b$ dan $a \mid c$ maka $a \mid (b + c)$.
5. jika $ab \mid c$, maka $a \mid c$ dan $b \mid c$.
6. Jika $d \mid b$ maka $d \mid -b$.
7. Jika $a \mid b$ dan $c \mid d$ maka $ac \mid bd$.
8. Jika $a \mid b$ maka $a \mid cb$, untuk bilangan bulat c sebarangan.
9. Jika $a \mid b$ dan $a \mid c$ maka $a \mid (bm + cn)$, untuk sebarang bilangan bulat *m* dan *n*.

Bukti :

1. Untuk $a \mid 0$, ada suatu bilangan bulat *m* sehingga *am = 0*. Karena *a ≠ 0*, maka haruslah *m = 0* sehingga $a \mid 0$. Untuk $1 \mid a$, ada bilangan bulat *m* sehingga *1 · m =a* , maka haruslah *m = a* sehingga $1 \mid a$. Untuk $a \mid a$, ada bilangan bulat *m* sehingga *am* = *a*, maka haruslah *m* = 1 sehingga $a \mid a$.
2. Misalkan $a \neq 1$, atau $a \neq -1$ maka $am = 1$, karena *a* dan *m* bilangan bulat , maka *a* dan *m* sama dengan ± 1.
3. Jika $a \mid b$ maka ada suatu bilangan *m* sehingga *am = b* , dan jika $b \mid c$ maka ada suatu bilangan bulat *n* sehingga *bn* = *c*. Jika $a \mid b$ dan $b \mid c$ maka berlaku :

$am \cdot bn = bc$

$ab \cdot mn = bc$ ($mn = k$, untuk setiap k bilangan bulat)

$ak = c$

Dengan demikian , benar bahwa $a \mid c$.

4. Jika $a \mid b$ maka ada suatu bilangan m sehingga $am = b$, dan jika $a \mid c$ maka ada suatu bilangan bulat n sehingga $an = c$. Jika $a \mid b$ dan $a \mid c$ maka berlaku :

   $am + an = (b + c)$

   $a(m+n) = (b+c)$

   $ak = (b+c)$ ($m+n = k$, untuk setiap k bilangan bulat)

   $ak = (b+c)$

   Dengan demikian , benar bahwa $a \mid (b + c)$.

5. Jika $ab \mid c$, ada suatu bilangan bulat m sehingga dapat ditulis dengan

   $ab \cdot m = c$

   $a \cdot bm = c$ ($bm = k$, untuk setiap k bilangan bulat)

   $a \cdot k = c$, dapat ditulis dengan $a \mid c$

   $b \cdot am = c$ ($am = l$, untuk setiap l bilangan bulat)

   $b \cdot l = c$

   Dengan demikian , benar bahwa $b \mid c$.

6. Misalkan $d \neq b$ atau $d \neq -b$, karena d dan m bilangan bulat maka haruslah d dan m sama dengan –b.

7. Jika $a \mid b$, maka terdapat bilangan bulat m sehingga $am = b$ dan jika $c \mid d$, maka terdapat bilangan bulat n sehingga $cn = d$.

Jika $a \mid b$ dan $c \mid d$ maka :

$am \cdot cn = bd$

$ac \cdot mn = bd$ ($mn = k$, untuk setiap k bilangan bulat)

$ac \cdot k = bd$

Dengan demikian, jika $a \mid b$ dan $c \mid d$ maka $ac \mid bd$.

8. Jika $a \mid b$, maka terdapat bilangan bulat m sehingga $am = b$

   $am = b$

   $am \cdot c = b \cdot c$ (untuk c bilangan bulat)

   $a \cdot cm = c \cdot b$ ($cm = k$, untuk setiap k bilangan bulat)

   $a \cdot k = c \cdot b$

   Dengan demikian jika $a \mid b$ maka $a \mid cb$ untuk setiap c bilangan bulat sebarang.

9. Jika $a \mid b$, maka terdapat bilangan bulat k sehingga $ak = b$ dan jika $a \mid c$, maka terdapat bilangan bulat l sehingga $al = c$. Maka berlaku :

   $bm + cn = akm + aln = a(km + ln)$

   $a(km + ln) = bm + cn$

   Dengan demikian jika $a \mid b$ dan $a \mid c$ maka $a \mid (bm + cn)$.

Definisi 1 (Sukirman, 1997)

Jika a, b, dan c bilangan bulat, dan $a \cdot b = c$ disebut faktor c, atau pembagi c, sedangkan c disebut kelipatan a atau b . Jadi $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15$ dan ± 30 adalah faktor dari 30. Bilangan bulat dengan bilangan dua sebagai salah satu faktornya dinamakan dengan bilangan bilangan bulat genap.

Bilangan bulat genap dapat dinyatakan dengan 2k, dimana k adalah bilangan bulat.

Contoh :

Contoh bilangan bulat genap yaitu $6 = 2 \cdot 3$, $(-14) = 2 \cdot (-7)$ dan $120 = 2 \cdot 60$. Sehingga bilangan bulat ganjil dapat dinyatakan $2k + 1$, misalnya $11 = 2 \cdot 5 + 1$ dan $17 = 2 \cdot 8 + 1$.

2.2 Bilangan Prima

Definisi 2 (Burton, 1980)

Sebuah bilangan $p > 1$ disebut bilangan prima, atau prima sederhana jika faktor-faktornya hanya bilangan positif 1 dan p. Bilangan bulat lebih besar dari 1 yang tidak prima dinamakan bilangan komposit.

Contoh :

23 adalah bilangan prima karena bilangan tersebut hanya habis dibagi 1 dan bilangan itu sendiri yaitu 23.

Definisi 3 (Sukirman, 1997).

Setiap bilangan bulat *n*, $n > 1$ dapat dinyatakan sebagai hasil kali bilangan-bilangan prima (mungkin hanya memiliki satu faktor).

Hasil kali bilangan-bilangan prima dari bilangan bulat *n* dapat ditulis sebagai berikut:

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}$$

Definisi 4 (Sukirman, 1997)

Bentuk $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$ disebut representasi *n* sebagai hasil kali bilangan-bilangan prima, dan bentuk itu disebut bentuk kanonik *n*.

Contoh :

Untuk $n = 180$, representasi *n* sebagai hasil kali bilangan-bilangan prima adalah $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Maka bentuk itu disebut bentuk kanonik dari 180.

Teorema 2 (Burton, 1980)

Jika *f* adalah suatu fungsi multiplikatif, dan $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$ adalah pemfaktoran prima dari bilangan bulat positif *n*, maka :

$f(n) = f\left(p_1^{k_1}\right) f\left(p_2^{k_2}\right) \dots f(p_r^{k_r})$.

Bukti :

Karena *f* disebut multiplikatif jika $fpb\left(p_1^{k_1}\right)\left(p_2^{k_2}\right) \dots \left(p_r^{k_r}\right) = 1$. Maka $f(n)$ dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} f(n) &= f\left(p_1^{k_1}\right) f\left(p_2^{k_2}\right) \dots f\left(p_r^{k_r}\right) \\ &= f(p_1^{k_1}\left(p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}\right)) \\ &= f\left(p_1^{k_1}\right) f\left(p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}\right) \end{aligned}$$

Karena *f* adalah multiplikatif, jika $fpb\left(p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}\right) = 1$, diketahui bahwa $f\left(p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}\right) = f\left(p_2^{k_2}\right) f\left(p_3^{k_3} \dots p_r^{k_r}\right)$. Maka $f(n)$ dapat dituliskan sebagai berikut :

$$f(n) = f\left(p_1^{k_1}\right) f\left(p_2^{k_2}\right) f\left(p_3^{k_3} \dots p_r^{k_r}\right)$$

Jika $fpb\left(p_3^{k_3} \ldots p_r^{k_r}\right) = 1$, diketahui bahwa $f\left(p_3^3 \ldots p_r^{k_r}\right) = f\left(p_3^{k_3}\right)f(p_4^4) \ldots f\left(p_r^{k_r}\right)$.

Oleh karena itu dapat disimpulkan sebagai berikut :

$$f(n) = f\left(p_1^{k_1}\right)f\left(p_2^{k_2}\right)f\left(p_3^{k_3}\right) \ldots f\left(p_r^{k_r}\right)$$

Contoh :

Misalkan $n = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ dan $f(n) = n$. Maka $f(2^2) = 2^2$, $f(3^2) = 3^2$, dan $f(5) = 5$. Karena $fpb(2^2, 3^2) = 1$ dan $fpb(2^2, 5) = 1$ dan f adalah fungsi multiplikatif, maka $f(n)$ dapat dituliskan sebagai berikut :

$$f(2^2 3^2 5) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = f(2^2)f(3^2)f(5)$$

2.3 Saling Prima

Definisi 5 (Stark, 1970)

Misalkan a_1 , a_2 , ..., a_n adalah bilangan bulat tidak nol. Bilangan tersebut adalah saling prima jika faktor persekutuan terbesarnya adalah 1.

Contoh :

Bilangan bulat 4, 15, dan 77 saling prima karena Faktor Persekutuan Terbesar (FPB) dari (4, 15) = FPB dari (4,77) = 1.

2.4 Faktor Persekutuan Terbesar (FPB)

Definisi 6 (Stark, 1998)

Misalkan *a* dan *b* bilangan-bilangan bulat yang tidak sama dengan nol. Jika *d* adalah faktor persekutuan yang sama dan terbesar dari faktor persekutuan *a* dan *b*, maka *d* disebut Faktor Persekutuan Terbesar (fpb) dari *a* dan *b.* Dinotasikan dengan $d = fpb(a,b)$. Jika $d = fpb(a,b) = 1$, maka dikatakan *a* saling prima dengan *b* .

Contoh :

FPB dari 12 dan 20:

Faktor dari 12 = 1, 2, 3, 4, 6 dan 12 .

Faktor dari 20 = 1, 2, 4, 5, 10 dan 20 .

Sehingga, FPB dari 12 dan 20 adalah faktor persekutuan yang sama dan terbesar, yaitu 4.

2.5 Bilangan Komposit

Definisi 7 (Sukirman, 1997)

Bilangan komposit adalah bilangan asli lebih besar sama dengan 1, yang bukan merupakan bilangan prima. Bilangan komposit dapat dinyatakan sebagai faktorisasi bilangan bulat, atau hasil perkalian dua bilangan prima atau lebih.

Contoh sepuluh bilangan komposit yang pertama adalah 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18.

2.6 Aritmetika Modulo

Definisi 8 (Stewart, 1952)

Misalkan m adalah bilangan bulat positif, didenisikan bilangan bulat a yang kongruen terhadap bilangan bulat b modulo m. Dapat dituliskan sebagai berikut :

$$a \equiv b(mod\ m)$$

Dapat dibaca "*a* kongruen *b* mod *m*" jika dan hanya jika

$$a - b = km$$

Contoh :

$17 \equiv 2(mod\ 5)$

Penyelesaian : 5 habis membagi $17 - 2 = 15$

Teorema 3 (Stewart, 1952)

Didefinisikan $a \equiv b(mod\ m)$, jika dan hanya jika a dan b memiliki sisa pembagian yang sama yaitu *r*, dengan syarat $0 \leq r < m$ dan terbagi oleh *m*.

Bukti :

Jika $a \equiv b(mod\ m)$ maka $a - b = km$, dengan k adalah bilangan bulat. Jika $b = qm + r$, dengan syarat $0 \leq r < m$ maka $a = b + km = (q + k)m + r$, yang memiliki sisa pembagian yang sama dengan b. Sebaliknya, jika $a = Qm + r$ dan $b = qm + r$, dengan syarat $0 \leq r < m$ maka $a - b = (Q - q)m$, dimana $Q - q$ adalah bilangan bulat. Sehingga terbukti $a \equiv b(mod\ m)$.

2.7 Kekongruenan

Teorema 4 (Stark, 1970)

Misalkan *n* bilangan bulat positif. Untuk semua bilangan-bilangan bulat *a*, berlaku :

1. $a \equiv a(mod\, n)$

2. Jika $a \equiv b(mod\, n)$ maka $b \equiv a(mod\, n)$

3. Jika $a \equiv b(mod\, n)$ dan $b \equiv c(mod\, n)$ maka $a \equiv c(mod\, n)$.

Bukti:

1. Untuk setiap bilangan bulat *a*, terdapat $a - a = 0 \cdot n$, sehingga

   $a \equiv a(mod\, n)$.

2. Jika $a \equiv b(mod\, n)$ maka $a - b = kn$, untuk setiap bilangan bulat

   k. Sehingga $a - b = -k(n))$ dan *k* adalah bilangan bulat, maka :

   $b \equiv a\ (mod\, n)$

3. Misalkan $a \equiv b(mod\, n)$ dan $b \equiv c(mod\, n)$, maka terdapat bilangan bulat k_1 dan k_2. Memenuhi $a - b = k_1 n$ dan $b - c = k_2 n$. Maka berlaku :

   $a - c = (a - b) + (b - c) = k_1 n + k_2 n = (k_1 - k_{2)} n,$ yang dapat dinyatakan dengan $a \equiv c(mod\, n)$

   Maka teorema tersebut terbukti.

Contoh :

$17 \equiv 2\ (mod\ 3)$ atau dapat ditulis $17 \equiv (3\ mod\ 2)$

Penyelesaian: 3 habis membagi $17 - 2 = 15$

$-7 \equiv 15\ (mod\ 11)$ atau dapat ditulis $-7 \equiv (11\ mod\ 15)$

Penyelesaian : 11 habis membagi $(-7) - 15 = -22$

Definisi 9 (Sistem Pengkongkruenan Linear) (Sukirman, 1997)

Bentuk umum pengkongkruenan linear:

$x \equiv a_1 (mod\ m_1)$

$x \equiv a_2 (mod\ m_2)$

$x \equiv a_3 (mod\ m_3)$

. .

. .

. .

$x \equiv a_i (mod\ m_i)$

Dengan $m_1, m_2, \ldots., m_j$ adalah bilangan bulat positif dan fpb$(m_i, m_j) = 1$ untuk $i \neq j$.

2.8 Fungsi Euler

Teorema 5 (Stewart, 1952)

Untuk *p* bilangan prima, maka berlaku :

$$a^{p-1} \equiv 1\ (mod\ p)$$

Bukti:

Asumsikan *p* adalah bilangan prima, *a* adalah bilangan bulat positif dimana $p \nmid a$, dan asumsikan pula terdapat barisan berikut :

$$a, 2a, 3a, 4a, \ldots, (p-1)a \tag{2.1}$$

Tidak ada bilangan dari barisan diatas yang habis dibagi p. Karena barisan terbentuk dengan pola ka dimana $1 \leq k \leq p - 1$. Karena $p \nmid a$ dan $p \nmid k$, maka $p \nmid ka$. Kemudian, dapat dilihat bahwa dari barisan itu tidak ada dua bilangan yang kongruen modulo p. Atau dapat dikatakan bahwa jika bilangan-bilangan tersebut dibagi dengan p, maka sisa pembagiannya selalu berbeda. Berikut pembuktiannya :

Asumsikan bahwa ada dua bilangan yang kongruen modulo p, yaitu ja dan ka dimana $1 \leq j < k \leq p - 1$

$ja \equiv ka \ mod \ p$ (2.2)

Karena $\text{fpb}(a, p) = 1$, maka

$j \equiv k \ mod \ p$ (2.3)

Karena j dan k harus lebih besar dari 1 dan harus lebih kecil dari p, maka dapat dikatakan bahwa $j = k$. Pernyataan ini kontradiksi dengan asumsi awal bahwa j dan k harus berbeda. Jadi, terbukti bahwa dari barisan itu tidak ada dua bilangan yang kongruen modulo p. Berdasarkan kedua asumsi diatas diperoleh:

$$a.2a.3a.\dots.(p-1)a \equiv 1.2.3.\dots.(p-1)(mod\ p)$$

$$a^{p-1}(p-1)! \equiv (p-1)!\,(mod\ p)$$

Karena fpb $\left((p-1)!, p\right) = 1$, maka:

$$a^{p-1} \equiv 1\ (mod\ p)$$

Contoh.

Jika $p = 5$ dan $a = 2$ sehingga $\text{fpb}(2,5) = 1$. Maka

$a^{p-1} - 1 = 2^{5-1} - 1$

$= 2^4 - 1$

$= 16 - 1$

$= 15$

15 dapat dibagi oleh $p = 5$ atau dapat ditulis dengan $16 \equiv 1 \ (mod\ 5)$.

Teorema 6 (Teorema Sisa Cina) (Stark, 1970)

Misalkan $m_1, m_2, \ldots, m_i$ adalah bilangan bulat positif yang saling prima dengan pasangannya, maka *i* persamaan

$x \equiv a_1 (mod\ m_1)$

$x \equiv a_2 (mod\ m_2)$

$x \equiv a_3 (mod\ m_3)$

. .

. .

. .

$x \equiv a_i (mod\ m_i)$

Mempunyai solusi modulo $(M = m_1, m_2, \ldots, m_i)$ yang tunggal yaitu $x \equiv a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2 + \cdots + a_r M_r y_r (mod\ M)$. Jika $M_i = \frac{M}{m_i}$ dan $y_i M_i = 1 (mod\ m_i)$ untuk $1 \leq i \leq r$.

Bukti :

Misalkan fpb$(M_i, m_i) = 1$ untuk $1 \leq i \leq r$.

Akan ditunjukkan $x_0 \equiv a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2 + \cdots + a_r M_r y_r$ adalah solusinya.

Diketahui $y_i M_i = 1 (mod\ m_i)$, maka $a_i y_i M_i = a_i (mod\ m_i)$ untuk $1 \leq i \leq r$.

Namun di sisi lain jika j $\neq$ i, maka $m_j \mid M_i$ yang berakibat $a_i y_i M_i = 0 (mod\ m_i)$.

Maka terbukti bahwa $x_0 \equiv a_i (mod\ m_i)$ untuk $1 \leq i \leq r$.

Selanjutnya akan ditunjukkan solusi tunggalnya.

Andaikan ada solusi lain yaitu untuk x_1, maka

$x_0 \equiv a_i(mod\, m_i)$ dan

$x_1 \equiv a_i(mod\, m_i)$

Maka berakibat $x_0 - x_1 \equiv 0(mod\, m_i)$ untuk semua i.

Jadi, $x_0 - x_1 \equiv 0(mod\, m_i)$ dan terbukti keduanya mempunyai modulo yang sama.

Contoh :

Bentuk pengkongkruenan linear :

$x \equiv 2\ (mod\ 3)$

$x \equiv 3\ (mod\ 5)$

$x \equiv 2\ (mod\ 7)$

Carilah solusi dari bentuk pengkongkruenan linear tersebut.

Penyelesaian :

Berdasarkan Teorema Sisa Cina (Teorema 2.8.2)

Misalkan diambil $M = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$, akan diperoleh :

$M_1 = \frac{105}{3} = 35,$ $y_1 = 2 = \frac{1}{35}(mod\ 3)$

$M_2 = \frac{105}{5} = 21,$ $y_2 = 1 = \frac{1}{21}(mod\ 5)$

$M_3 = \frac{105}{7} = 15,$ $y_3 = 1 = \frac{1}{15}(mod\ 7)$

Kemudian diperoleh solusi sebagai berikut :

$sx \equiv 2 \cdot 35 \cdot 2 + 3 \cdot 21 \cdot 1 + 2 \cdot 15 \cdot 1\ (mod\ 105)$

$$x \equiv 233\ (mod\ 105)$$

$$x = 23$$

Definisi 10 (Fungsi Phi Euler) (Burton, 1980)

Jika *n* merupakan bilangan bulat positif, fungsi phi Euler $\emptyset(n)$ menyatakan banyaknya bilangan yang kurang dari atau sama dengan *n* dan saling prima terhadap *n*.

Contoh :

Bilangan bulat positif yang ≤ 9 adalah 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Diantara bilangan-bilangan tersebut yang saling prima terhadap 9 adalah 1, 2, 4, 5, 7, 8, maka banyaknya bilangan yang saling prima terhadap 9 adalah sebanyak 6 sehingga $\emptyset(9) = 6$.

Definisi 11 (Fungsi Aritmetika) (Ziegenbalg, 2002)

Fungsi aritmetika (dalam bahasa Jerman : fungsi zahlentheoretische) adalah suatu fungsi $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ atau $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$.

Fungsi aritmetika *f* disebut multiplikatif jika untuk semua bilangan bulat $m, n \in \mathbb{N}$ yang saling prima, maka :

$$f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$$

Contoh :

Misalkan diambil $n = 2^3 3^4$ dan $f(n) = n$.

Maka $f(n) = 2^3 3^4$, dan $f(2^3) = 2^3, dan\ f(3^4) = 3^4$, sehingga dapat ditulis

$f(2^3 3^4) = f(2^3)f(3^4)$ dan *fpb* $(2^3, 3^4) = 1$. Jadi, *f* adalah fungsi multiplikatif.

Contoh fungsi aritmetika (Ziegenbalg, 2002)

Beberapa contoh fungsi aritmetika dalam teori bilangan adalah sebagai berikut (untuk $n \in \mathbb{N}$) :

$\tau(n)$ = Banyaknya pembagi positif dari *n*.

$\sigma(n)$ = Jumlah semua pembagi positif dari *n*.

$\emptyset(n)$ = Banyaknya bilangan bulat positif yang kurang dari atau sama dengan *n* dan saling prima terhadap *n*.

III. METODE PENELITIAN

3.1 Tempat dan Waktu Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun akademik 2018/2019, bertempat di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam menyelesaikan penelitian ini adalah studi pustaka dari beberapa buku yang berkaitan dengan fungsi phi Euler. Kemudian mempelajari dan mengkaji teorema dan definisi yang berhubungan dengan karakteristik fungsi phi Euler. Adapun tahap-tahap yang dilakukan dalam melakukan penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Mengasumsikan bilangan bulat positif *n* ke dalam fungsi phi Euler terhadap *n* atau $(\emptyset(n))$.
2. Menentukan fungsi phi Euler untuk beberapa bilangan bulat positif *n* seperti bilangan prima dan bilangan genap.
3. Membuktikan sifat-sifat fungsi phi Euler terhadap *n* atau $(\emptyset(n))$.

4. Membuktikan apakah fungsi phi Euler memiliki karakteristik atau sifat fungsi multiplikatif.

V. KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Dari hasil dan pembahasan diperoleh kesimpulan bahwa untuk $fpb(m,n) = 1$, dengan m dan n adalah bilangan bulat positif, maka $\emptyset(\mathrm{mn}) = \emptyset(\mathrm{m})\emptyset(\mathrm{n})$. Sehingga terbukti bahwa karakteristik fungsi phi Euler adalah fungsi multiplikatif.

DAFTAR PUSTAKA

Burton, D.M. 1980. *Elementary Number Theory.* University Of New Hampshire, Durham, Amerika Serikat.

Grillet, P.A. 2007. *Graduate Text In Mathematics*. Second Edition. Springer. New York.

Rosen, Kenneth H. 1993. *Elementary Number Theory and its Application*. Addison Wesley Publishing Company, New York.

Stark, H.M. 1970. *Introduction to Number Theory*. Markam Publishing Company, Chicago.

Stewart, B.M. 1952. *Theory of Numbers*. The Macmillan Company, New York.

Sukirman, M.P. 1997. *Ilmu Bilangan.* Universitas Terbuka. Jakarta.

Ziegenbalg, J. 2002. *Elementare Zahlentheorie – Beispiele, Geschicte, Algorithmen*. Harri Deutsch Verlag, Frankfurt.