RUANG BARISAN SELISIH $l_2(\Delta_2)$

(Skripsi)

Oleh

RINA KARINA AGUSTINA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

ABSTRAK

RUANG BARISAN SELISIH $l_2(\Delta_2)$

OLEH

RINA KARINA AGUSTINA

Ruang barisan sebagai salah satu konsep dalam analisis, yang membahas tentang barisan dengan karakteristik tertentu salah satunya adalah ruang barisan $l_2(\Delta_2)$. Penulis akan membahas tentang ruang barisan l_2, $l_2(\Delta)$, dan $l_2(\Delta_2)$ adalah ruang bernorma, ruang bernorma lengkap dan merupakan ruang Banach.

Kata Kunci : Ruang Barisan, Ruang Norma, Ruang Banach.

ABSTRACT

DIFFERENCE SEQUENCE SPACES $\boldsymbol{l_2}(\Delta_2)$

By

RINA KARINA AGUSTINA

Sequence spaces as one concept of analysis, discussed about sequence with specific characteristics for example $l_2(\Delta_2)$. The authors will discuss about l_2, $l_2(\Delta)$, and $l_2(\Delta_2)$ sequence spaces that can be proved as norm spaces, complete norm spaces and Banach spaces.

Keyword : Sequences space, Norm space, Banach space.

RUANG BARISAN SELISIH $l_2(\Delta_2)$

Oleh

RINA KARINA AGUSTINA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

Judul Skripsi : **RUANG BARISAN SELISIH $l_2(\Delta_2)$**

Nama Mahasiswa : *Rina Karina Agustina*

No. Pokok Mahasiswa : 1517031169

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.
NIP 19720227 199802 1 001

Subian Saidi, S.Si., M.Si.
NIP 19800821 200812 1 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Subian Saidi, S.Si., M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **21 Januari 2019**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama mahasiswa : **RINA KARINA AGUSTINA**

Nomor pokok mahasiswa : **1517031169**

Jurusan : **Matematika**

Judul skripsi : **RUANG BARISAN SELISIH $l_2(\Delta_2)$**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, Januari 2019

Yang menyatakan,

Rina Karina Agustina
NPM. 1517033169

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Rina Karina Agustina, anak pertama dari tiga bersaudara yang dilahirkan di Kotabumi pada tanggal 07 Agustus 1997 oleh pasangan Bapak Bambang Karyanto dan Alm. Ibu Santi Tisnawati.

Menempuh pendidikan di Taman Kanak-Kanak (TK) DEPAG pada tahun 2002-2003, Sekolah Dasar (SD) diselesaikan di SD N 3 Kotabumi pada tahun 2003-2009, kemudian bersekolah di SMP N 01 Abung Selatan pada tahun 2009-2012, dan bersekolah di SMA N 3 Kotabumi pada tahun 2012-2015.

Pada tahun 2015 penulis terdaftar sebagai mahasiswi S1 Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui Jalur MANDIRI.

Pada tahun 2018 penulis melakukan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Tanjung Raja Kecamatan Cukuh Balak, Kabupaten Tanggamus, Provinsi Lampung dan pada tahun yang sama penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Kantor Badan Pengelola Pajak dan Retribusi Daerah Kota Bandar Lampung.

KATA INSPIRASI

"Dan Dia memberinya rejeki dari arah yang tidak disangka-sangkanya. Dan barangsiapa yang bertawakal kepada Allah niscaya Allah akan mencukupkan (keperluan)nya. Sesungguhnya Allah melaksanakan urusan (yang dikehendaki) Nya. Sesungguhnya Allah telah mengadakan ketentuan bagi tiap-tiap sesuatu. "

(Q.S Ath-Thalaq 65:3)

"Barang siapa yang menempuh jalan menuntut ilmu, niscaya Allah subhanahu wata'ala akan memudahkan baginya jalan menuju surga."

(H.R Muslim)

"Semangat akan terus muncul jika mendapatkan motivasi terus menerus. Motivasi yang paling kuat adalah motivasi yang muncul dari dalam diri sendiri."

(Rina Karina Agustina)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirabbil'alamin

Dengan kerendaan hati dan rasa bersukur kepada Allah SWT

Kupersembakan karya ini kepada :

Orang tua tercinta Bapak Bambang Karyanto dan Alm. Ibu Santi Tisnawati atas doa, dukungan dan kasih sayang yang terus diberikan serta kerja keras dalam merawat, membesarkan penulis hingga sekarang. Serta kembaran dan adik saya Rini dan Ovi yang selalu memberi semangat dan kasih sayang

Para pendidik, guru – guru, serta dosen yang telah meluangkan waktu untuk menurunkan ilmunya kepada penulis.

Semua sahabat terbaik yang terus mendukung, menolong, memberikan semangat dalam proses hidup penulis.

Almamater Unila dan Negriku Indonesia.

SANWACANA

Dengan mengucapkan *Alhamdulillah* penulis panjatkan puji syukur kehadirat Allah SWT atas rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “RUANG BARISAN SELISIH $l_2(\Delta_2)$”. Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si.) di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Dengan ketulusan hati penulis ingin mengucapkan terima kasih banyak kepada :

1. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing I, terima kasih untuk bimbingan dan kesedian waktunya selama penyusunan skripsi ini.
2. Bapak Subian Saidi, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing II, terima kasih untuk bantuan dan masukannya selama penyusunan skripsi.
3. Ibu Dr. Asmiati, S.Si., M.Si. selaku Dosen Penguji, terima kasih atas kesediannya untuk menguji, memberikan saran dan kritik yang membangun dalam penyelesaian skripsi ini.
4. Ibu Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing Akademik, terima kasih atas bimbingan dan pembelajarannya dalam menjalani perkuliahan.
5. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, MA., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

6. Bapak Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.,selaku Dekan FMIPA Universitas Lampung.
7. Seluruh Dosen dan Karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
8. Bapak Bambang Karyanto dan Alm. Ibu Santi Tisnawati tercinta yang tak pernah berhenti memberi semangat, doa, dorongan, nasehat dan kasih sayang serta pengorbanan yang tak tergantikan hingga penulis selalu kuat menjalani setiap rintangan yang ada di depan.
9. Rini, Ovi dan keluarga besarku yang selalu berbagi canda dan tawa serta selalu menyemangati hingga terselesaikannya skripsi ini.
10. Bangkit Diko Saputro yang selalu menemani, dan memberikan semangat serta perhatiannya selama menyelesaikan skripsi ini.
11. Sahabat – sahabat seperjuangan menuju wisuda Aura, Luthfi, Sela, Litta, Aulia, Della, Vina, Atuy, Deby, Farida yang selalu siap sedia dari usul, hasil sampai ujian skripsi serta semangat hingga terselesaikannya skripsi ini.
12. Para Pejuang S.Si. Anita, Cintya, Dhenty, Intan, Indraswari, Moni yang selalu mendukung dan memberi nasihat kepada penulis untuk menulis skripsi ini.
13. Teman-teman KKN Chelpa, Qeren, Karina, Agung, Julian, Rizky yang mendukung selama menyelesaikan skripsi ini.
14. Teman-teman angkatan 2015 jurusan matematika.
15. Almamater tercinta Universitas Lampung.

Bandar Lampung,   Januari 2019
Penulis

Rina Karina Agustina

DAFTAR ISI

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Matematika sebagai salah satu ilmu pasti memiliki peranan penting dalam perkembangan maupun kemajuan sains dan teknologi. Beberapa teori pemikiran ahli matematika digunakan sebagai dasar pemikiran pengambilan keputusan, dan sebagai bahan pertimbangan. Oleh karena itu, perkembangan ilmu matematika sangat dibutuhkan.

Salah satu bidang kajian matematika adalah bidang analisis, bidang ini merupakan bagian dari matematika, bidang ini membahas tentang konsep ruang barisan. Ruang barisan sebagai salah satu konsep yang ada di bidang analisis membahas tentang ruang barisan yang diantaranya adalah l_{∞}, c, c_0, dan l_p. Misalkan *X* koleksi semua ruang barisan, didefinisikan

$$c_0 = \{\tilde{x} = \{x_k\} \in X : \text{barisan } \{x_k\} \text{ konvergen ke } 0\}$$

$$c = \{\tilde{x} = \{x_k\} \in X : \text{barisan } \{x_k\} \text{ konvergen}\}$$

$$l_{\infty} = \{\tilde{x} = \{x_k\} \in X : \sup_{k \geq 1} |x_k| < \infty\}$$

$$l_p = \{\tilde{x} = \{x_k\} \in X : \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty\} \text{ dengan } 1 \leq p < \infty$$

Salah satu pakar matematika H. Kizmas (1981) meneliti syarat yang diperlukan oleh suatu matriks tak terhingga dari ruang barisan ke ruang barisan. Pemikiran tersebut digunakan oleh Rifat C. (1995) dan menambahkan suatu syarat kedalam ruang barisan tersebut sehingga menjadi ruang barisan $l_\infty(\Delta)$, $c(\Delta), c_0(\Delta)$ dan $l_p(\Delta)$. Dari pemikiran diatas penulis mencoba mengkaji lebih dalam tentang salah satu ruang barisan, yaitu ruang barisan $l_2(\Delta_2)$.

1.2 Batasan Masalah

Batasan masalah dari penelitian ini adalah hanya mengkaji dan mempelajari salah satu sifat ruang barisan $l_2, l_2(\Delta)$, $l_2(\Delta_2)$ adalah ruang Banach.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah

1. Mengkaji dan mempelajari sifat ruang barisan l_2
2. Mengkaji dan mempelajari sifat ruang barisan selisih $l_2(\Delta)$
3. Mengkaji dan mempelajari sifat ruang barisan selisih $l_2(\Delta_2)$

1.4 Manfaat penelitian

Manfaat penelitian ini adalah

1. Memahami sifat dan masalah pada ruang barisan l_2
2. Memahami sifat dan masalah pada ruang barisan selisih $l_2(\Delta)$
3. Memahami sifat dan masalah pada ruang barisan selisih $l_2(\Delta_2)$
4. Dapat memberi ide bagi penulis lain untuk meneliti lebih lanjut ruang barisan selisih.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Barisan

Definisi 2.1.1

Barisan adalah suatu fungsi yang domainnya adalah himpunan bilangan asli. Misal terdapat bilangan asli $1, 2, 3, \ldots, k, \ldots$ yang bersesuaian dengan bilangan real x_k tertentu, maka $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ dikatakan barisan (Mizrahi dan Sulivan, 1982).

Contoh :

$\left(\frac{1}{k}\right)$ merupakan barisan bilangan real dengan $k = 1,2,3, \ldots$.

Definisi 2.1.2

Barisan dikatakan **konvergen** (*convergent*) jika ada bilangan $x \in X$ sehingga untuk setiap bilangan asli $\varepsilon>0$ terdapat bilangan asli n_0 dan untuk setiap bilangan asli $n \geq n_0$ benar bahwa

$$|x_k - x| < \varepsilon$$

Pengertian tersebut ditulis singkat dengan

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x \text{ atau } \{x_k\} \to x \text{ untuk } k \to \infty$$

dan bilangan x disebut limit barisan (x_k), dan dikatakan barisan (x_k) konvergen ke x. Barisan yang tak konvergen dikatakan divergen (Darmawijaya,2007).

Contoh :

Akan ditunjukkan barisan $\left(\frac{1}{k}\right)$ konvergen sebab

$\forall \varepsilon > 0$ ada bilangan asli n_0 (bergantung pada ε), sehingga $k \geq n_0$ berlaku

$$\left|\frac{1}{k} - 0\right| < \varepsilon$$

Maka dikatakan barisan $\left(\frac{1}{k}\right)$ konvergen ke 0 atau barisan $\left(\frac{1}{k}\right)$ mempunyai limit 0 untuk k→∞ dan ditulis dengan

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{k} - 0\right| < \varepsilon$$

Atau dapat ditulis dengan $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k} = 0$.

Teorema 2.1.3

Setiap barisan bilangan real yang konvergen selalu terbatas (Robert and Donald, 2000).

Bukti :

Diketahui barisan (x_k) adalah barisan konvergen, katakan lim $(x_k) = x$. Ambil $\varepsilon = 1$, dan terdapat $n \in N$. Berdasarkan sifat nilai mutlak maka dari $|x_k - x| < \varepsilon$ diperoleh $|x_k| < |x| + 1$, untuk setiap $n \geq N$.

Pilih $M = sup\{|x_1|, |x_1|, |x_1|, \ldots |x| + 1\}$, karena $|x_k| < x + 1$ maka berlaku $|x_k| < M$ untuk semua $n \in N$. Maka terbukti (x_k) terbatas.

Contoh :

Diberikan barisan $(x_k) = \left(\frac{1}{k}\right)$ pilih $M = 1$ sehingga,

$$|x_k| = \left|\frac{1}{k}\right| = \frac{1}{k} \leq 1$$

Untuk setiap $k = 1,2,3, \ldots \ldots$

Dengan kata lain $(x_k) = \left(\frac{1}{k}\right)$ barisan terbatas.

Definisi 2.1.4

Diberikan X yaitu koleksi semua barisan bilangan *real* jadi :

$$X = \{\tilde{x} = (x_k): x_k \in \mathbb{R}\}$$

Untuk setiap bilangan *real* p dengan $1 \leq p < \infty$ didefinisikan

$$l_p = \left\{\tilde{x} = (x_k) \in X: \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty\right\}$$

dan norm pada l_p yaitu

$$\|\tilde{x}\|_p = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

(Darmawijaya, 2007).

Definisi 2.1.5

Misal $p, q \in (1, \infty)$ dengan $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (q konjugat p), untuk $x \in l_p$ dan $y \in l_p$

$(x_k y_k)_{k \in N} \in l_p$ dan $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \|x\|_p \|y\|_p$ (Darmawijaya, 2007).

Definisi 2.1.6

Ruang barisan, himpunan dari barisan bilangan yang memiliki syarat

$$l_p = \left\{ \tilde{x} = (x_k) \in X : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\}$$

l_p koleksi barisan bilangan yang $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$

$$l_p(\Delta) = \{\tilde{x} = (x_k) : \Delta x \in l_p\}$$

$l_p(\Delta)$ koleksi barisan bilangan yang $\Delta x \in l_p$

$$l_p(\Delta_2) = \{\tilde{x} = (x_k) : \Delta_2 x \in l_p\}$$

$l_p(\Delta_2)$ koleksi barisan bilangan yang $\Delta_2 x \in l_p$

(H.Kizmaz,1981).

2.2 Deret Bilangan Real

Definisi 2.2.1

Jika untuk setiap bilangan asli k diketahui bilangan real x_k, maka jumlahan

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots$$

Disebut deret bilangan real (*series of real numbers*) atau cukup disebut deret saja asalkan tak diberi penjelasan lebih lanjut ; x_k disebut suku ke – k deret tersebut.

(Darmawijaya, 2007)

Contoh :

Deret $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$

$a9 =$ atau suku ke-9 = $\frac{1}{9}$, $a_{100} =$ atau suku ke-100 = $\frac{1}{100}$

Definisi 2.2.2

Deret $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ dikatakan konvergen jika barisan jumlah parsialnya yaitu $\{S_n\}$ konvergen.(Darmawijaya, 2007)

Teorema 2.2.3

i. Deret $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergen jika dan hanya jika ada bilangan S sehingga

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S$$

ii. Deret $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergen jika dan hanya jika ada bilangan S sehingga

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} x_k = \lim_{n \to \infty} S_n = S$$

iii. Deret $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergen jika dan hanya jika ada bilangan S sehingga Untuk bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $n_0$dan jika bilangan asli $n \geq n_0$benar bahwa

$$|S_n - S| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k - S\right| < \varepsilon$$

iv. Deret $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergen jika dan hanya jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga

$$\left|\sum_{k > n_0} x_k\right| < \varepsilon$$

(Darmawijaya, 2007)

Bukti :

i. Menurut definisi 2.2.2 , deret $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergen jika dan hanya jika barisan jumlah parsial $\{S_n\}$ konvergen, artinya ada bilangan S sehingga barisan $\{S_n\}$ konvergen ke bilangan S ; jadi $\lim_{n \to \infty} S_n = S$

ii. Berdasarkan (i) diperoleh

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

iii. $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ artinya untuk sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga jika bilangan asli $n \geq n_0$ benar bahwa

$$\sum_{k=1}^{n} x_k - S = |S_n - S| < \varepsilon$$

iv. Berdasarkan iii dan ii diperoleh untuk $n \geq n_0$ benar bahwa

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k - S\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_k\right| = \left|\sum_{k>n_0} x_k\right| < \varepsilon$$

Berdasarkan teorema 2.2.3 (iv) tersebut diperoleh. Jika deret $\sum_{k=1}^{n} x_k$ konvergen maka,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k>n} a_k = 0$$

Contoh : (Uji Deret-p) Deret

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots$$

di mana p konstanta, disebut deret-p. Perlihatkan bahwa:

(a) Deret-p konvergen jika $p > 1$

(b) Deret-p divergen jika $p \leq 1$

PENYELESAIAN :

Jika $p \geq 0$, fungsi $f(x) = \frac{1}{x^p}$ kontinu, positif dan tak-menarik pada $[1, \infty)$ dan $f(k) = \frac{1}{k^p}$. Jadi, menurut Uji Integral, $\sum\left(\frac{1}{k^p}\right)$ konvergen jika dan hanya jika $\lim_{t\to\infty} \int_1^t x^{-p} dx$ ada (sebagai bilangan terhingga).

Jika $p \neq 1$,

$$\int_1^t x^{-p} = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^t = \frac{t^{1-p} - 1}{1-p}$$

Jika $p = 1$,

$$\int_1^t x^{-1}\, dx = [\ln x]_1^t = \ln t$$

Oleh karena $\lim_{t\to\infty} \int_1^t t^{1-p} = 0$ jika $p > 1$ dan $\lim_{t\to\infty} \int_1^t t^{1-p} = \infty$ jika $p < 1$ dan oleh karena $\lim_{t\to\infty} \ln t = \infty$, kita simpulkan bahwa deret-p konvergen jika $p > 1$ dan divergen jika $0 \leq p \leq 1$.

(Varberg,Purcell,Rigdon, 2007)

2.3 Ruang Bernorm

Definisi 2.3.1

Diberikan ruang linear X. Fungsi $\|\cdot\| : X \to R$ yang mempunyai sifat-sifat :

i. $\|x\| \geq 0$ untuk setiap $x \in X$
ii. $\|x\| = 0$, jika dan hanya jika $x = 0$, (0 vektor nol)
iii. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ untuk setiap skalar α dan $x \in X$.

iv. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ untuk setiap $x, y \in X$

disebut norma(*norm*) pada *X* dan bilangan nonnegatif $\|x\|$ disebut norma vektor *x*. Ruang linear *X* yang dilengkapi dengan suatu norma $\|\cdot\|$ disebut ruang bernorma (*norm space*) dan dituliskan singkat dengan $X, \|\cdot\|$ atau *X* saja asalkan normanya telah diketahui (Darmawijaya, 2007).

Contoh :

Akan dibuktikan bahwa l_2 merupakan ruang bernorma terhadap $\|.\|_2$. Untuk setiap skalar α dan $\tilde{x} = (x_k), (y_k) \in l_2$ diperoleh

i) $\|\tilde{x}\|_2 = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \geq 0$ karena $|x_k| \geq 0$ untuk setiap k.

$$\|\tilde{x}\|_2 = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right\}^{\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow |x_k| \geq 0 \text{ untuk setiap } k \Leftrightarrow \tilde{x} = \{0\} = \tilde{0}$$

ii) $\|\alpha\tilde{x}\|_2 = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha x_k|^2\right\}^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right\}^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \|x\|_2$

jelas bahwa $\|\alpha x\|_2 < \infty$

iii) $\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_2 \leq \|\tilde{x}\|_2 + \|\tilde{y}\|_2 = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2\right\}^{\frac{1}{2}} < \infty.$

Berdasarkan i), ii), dan iii) terbukti bahwa l_2 merupakan ruang linear dan $\|.\|_2$ norm pada l_2 . Dengan kata lain $(l_2, \|.\|_2)$ ruang bernorm.

Lemma 2.3.2

Dalam ruang linear bernorma X berlaku $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ untuk setiap $x, y \in X$ (Maddox, 1970).

Bukti :

untuk setiap $x, y \in X$ diperoleh :

$\|x\| - \|y\| = \|x - y + y\| - \|y\| \leq \|x - y\| + \|y\| - \|y\| = \|x - y\|.$

Teorema 2.3.3

$l_p\,(1 \leq p < \infty)$ merupakan ruang bernorma terhadap norm $\|.\|_p$

(Darmawijaya, 2007).

Bukti :

a) Untuk $1 \leq p < \infty$ diambil sebarang $\tilde{x} = (x_k), \tilde{y} = (y_k) \in l_p$ dan skalar α. Diperoleh :

i) $\|\tilde{x}\|_p = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \geq 0$ karena $|x_k| \geq 0$ untuk setiap k.

$$\|\tilde{x}\|_p = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = 0 \Leftrightarrow |x_k| \geq 0 \text{ untuk setiap } k \Leftrightarrow \tilde{x} = \{0\} = \tilde{0}$$

ii) $\|\alpha\tilde{x}\|_p = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \|x\|_p$

jelas bahwa $\|\alpha x\|_p < \infty$

iii) $\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_p \leq \|\tilde{x}\|_p + \|\tilde{y}\|_p = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty.$

Berdasarkan i), ii), dan iii) terbukti bahwa l_p merupakan ruang linear dan $\|.\|_p$ norm pada l_p . Dengan kata lain $(l_p, \|.\|_p)$ ruang bernorm.

Definisi 2.3.4 (Barisan Cauchy)

Barisan (x_n) di dalam ruang bernorma $(X, \|.\|)$ disebut barisan Cauchy atau **barisan fundamental** jika untuk setiap bilangan $\varepsilon>0$ terdapat bilangan asli n_0, sehingga untuk setiap dua bilangan asli $m, n \geq n_0$ berlaku $\|x_m - x_n\|<\varepsilon$ (Robert and Donald, 2000).

Contoh :

Barisan $\left(\frac{1}{n}\right)$ adalah barisan Cauchy. Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_o(bergantung pada ε) $\in N$ sehingga ada dua bilangan asli $m,n \geq n_0$ maka

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon$$

$m,n \geq n_0$

$\frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_o}, \qquad \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_o}$

$\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \left|\frac{1}{m}\right| + \left|-\frac{1}{n}\right|$

$\qquad \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_o} + \frac{1}{n_o} = \frac{2}{n_o} < \varepsilon$

Bukti:

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ pilih $n_0 \leq \frac{2}{\varepsilon}$ sehingga jika $m,n \geq n_0$ maka

$$\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_o} + \frac{1}{n_o} = \frac{2}{n_o} < \varepsilon$$

Jadi, barisan $\left(\frac{1}{n}\right)$ adalah barisan Cauchy.

Teorema 2.3.5

Setiap barisan yang konvergen di dalam ruang bernorma $(X, \|.\|)$ merupakan barisan Cauchy (Robert and Donald, 2000).

Bukti :

Misalkan (x_n) adalah barisan di X dengan $\lim_{k\to\infty} x_n = x$,dan misalkan $\varepsilon < 0$ maka terdapat bilangan asli $n \in N$ sedemikian hingga berlaku $d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $n \geq N$, akibatnya untuk $n, m \geq N$ berlaku $d(x_n, x_m) \leq d(x_m, x) + d(x_n) < \varepsilon$, jadi (x_n) barisan Cauchy.

Definisi 2.3.6

Ruang bernorma dikatakan lengkap (*complete*) jika setiap barisan Cauchy di dalamnya konvergen (Robert and Donald, 2000).

Teorema 2.3.7 (Ketidaksamaan Young)

Diketahui $0 < p, q < \infty$ sehingga $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ untuk sebarang dua bilangan α dan β

Benar bahwa

$$|\alpha\beta| \leq \frac{|\alpha|^p}{p} + \frac{|\beta|^q}{q}$$

(Darmawijaya, 2007).

Bukti:

Karena $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ diperoleh $p + q = pq$, $\frac{p}{q} = \frac{1}{q-1}$ dan $\frac{q}{p} = \frac{1}{p-1}$ diambil kurva $y = x^{p-1}$; jadi $x = y^{q-1}$. Oleh karena itu diperoleh $|\alpha\beta|$ =luas persegi panjang ≤ luas I+ luas II yaitu

$$|\alpha\beta| \leq \int_0^{|\alpha|} x^{p-1}dx + \int_0^{|\beta|} y^{q-1}dy = \frac{|\alpha|^p}{p} + \frac{|\beta|^q}{q}$$

Teorema 2.3.8 (**Ketaksamaan Ho'lder**)

i. Jika $\tilde{x} = (x_k) \in l_1$ dan $\tilde{y} = (y_k) \in l_\infty$ maka

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \|\tilde{x}\|_1 . \|\tilde{y}\|_\infty$$

ii. Diketahui $1 \leq p, q < \infty$ dan $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, maka

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \|\tilde{x}\|_p . \|\tilde{y}\|_q$$

(Darmawijaya, 2007)

Bukti :

i. Jika $\tilde{x} = (x_k) \in l_1$ dan $\tilde{y} = (y_k) \in l_\infty$ cukup jelas bahwa

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|.|y_k|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|. \sup_{k\geq 1} |y_k| = \|\tilde{x}\|_1. \|\tilde{y}\|_\infty$$

ii. Jika $\tilde{x} = (x_k) \in l_p$ dan $\tilde{y} = (y_k) \in l_p$ cukup jelas bahwa

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|.|y_k|$$

Karena $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

Tinggal membuktikan bahwa

$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|.|y_k| \leq \|\tilde{x}\|_p. \|\tilde{y}\|_q$ atau $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{\|\tilde{x}\|_p}.\frac{|y_k|}{\|\tilde{y}\|_k} \leq 1$

Dengan teorema young diperoleh

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{\|\tilde{x}\|_p}.\frac{|y_k|}{\|\tilde{y}\|_p} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left\{\left(\frac{1}{p}\left(\frac{|x_k|}{\|\tilde{x}\|_p}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{|y_k|}{\|\tilde{y}\|_p}\right)^q\right)\right\}$

$$=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{|x_k|}{\|\tilde{x}\|_p}\right)^p+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{q}\left(\frac{|y_k|}{\|\tilde{y}\|_p}\right)^q=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

Teorema 2.3.9 (Ketaksamaan Minkowski)

Jika $1 \leq p < \infty$ maka untuk setiap $\tilde{x} = (x_k)$, $\tilde{y} = (y_k) \in \ell_p$ benar bahwa

$$\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_p \leq \|\tilde{x}\|_p + \|\tilde{y}\|_p$$

(Darmawijaya, 2007).

Bukti :

Jika $p = \infty$, diperoleh

$$\begin{aligned}
\|\tilde{x}+\tilde{y}\|_\infty &= sup_{k\geq 1}|x_k + y_k| \\
&\leq sup_{k\geq 1}\{|x_k| + |y_k|\} \\
&\leq sup_{k\leq 1}|x_k| + sup_{k\geq 1}|y_k| \\
&= \|\tilde{x}\|_\infty + \|\tilde{y}\|_\infty
\end{aligned}$$

Jika $p = 1$ diperoleh

$$\begin{aligned}
\|\tilde{x}+\tilde{y}\|_1 &= \sum_{k=1}^{\infty}|x_k + y_k| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty}|x_k| + \sum_{k=1}^{\infty}|y_k| \\
&= \|\tilde{x}\|_1 + \|\tilde{y}\|_1
\end{aligned}$$

Jika $1 \leq p < \infty$

$$\begin{aligned}
|x_k + y_k|^p &= |x_k + y_k| . |x_k + y_k|^{p-1} \\
&\leq |x_k| . |x_k + y_k|^{p-1} + |y_k| . |x_k + y_k|^{p-1}
\end{aligned}$$

Untuk setiap k dijumlahkan untuk seluruh k dan kemudian memanfaatkan ketidaksamaan Holder, diperoleh

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|.|x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|.|x_k + y_k|^{p-1}$$

$$\leq \|x\|_p . \left\{\sum_{k=1}^{\infty} \{|x_k + y_k|^{p-1}\}^q\right\}^{\frac{1}{q}} + \|y\|_p . \left\{\sum_{k=1}^{\infty} \{|x_k + y_k|^{p-1}\}^q\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\|\tilde{x}\|_p + \|\tilde{y}\|_p\right). \sum_{k=1}^{\infty} \{|x_k + y_k|^p\}^{\frac{1}{q}}$$

Atau

$$\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_p = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} \left\{|x_k + y_k|^{p-1}\right\}^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \|\tilde{x}\|_p + \|\tilde{y}\|_p$$

2.4 Ruang Banach

Definisi 2.4.1

Ruang Banach (*Banach space*) adalah ruang bernorma yang lengkap (sebagai ruang metrik yang lengkap) jika dalam suatu ruang bernorma *X* berlaku kondisi bahwa setiap barisan Cauchy di *X* adalah konvergen (Darmawijaya, 2007).

Teorema 2.4.2

Jika bilangan *real p* dengan $1 \leq p < \infty$, maka $(l_p, \|.\|_p)$ merupakan ruang Banach (Darmawijaya, 2007).

2.5 Ruang Barisan Selisih

Definisi 2.5.1

Diperlihatkan barisan selisih bilangan sebagai berikut :

Jika $\tilde{x} = (x_k)$ suatu barisan bilangan dan

$\Delta\tilde{x} = \{x_{k+1} - x_k\}$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$

$\Delta\tilde{x}$ disebut barisan selisih pertama terhadap barisan $\tilde{x} = (x_k)$

$$\vdots$$

$\Delta_m\tilde{x} = \{\Delta_m\tilde{x}_k = \sum_{i=0}^{m}(-1)^i \binom{m}{i} x_{k+m-i}\}$, untuk setiap $k \in \mathbb{N}$

$\Delta_m\tilde{x}$ disebut barisan selisih ke-m terhadap barisan $\tilde{x} = (x_k)$

Berdasarkan gambaran di atas maka dibentuklah barisan bilangan

$\Delta\tilde{x} = \{\Delta x_k\}, \Delta_2\tilde{x} = \{\Delta_2 x_k\}, \dots$, $\Delta_n x_m = \{\Delta_n x_k\}$ yang disebut dengan barisan selisih pertama, barisan selisih kedua, dan seterusnya sampai barisan selisih ke-m (H.Kizmaz,1981).

Contoh 1 :

Diberikan barisan $(x_k) = \left(\frac{1}{k}\right)$

$$(x_k) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \dots\right)$$

Untuk setiap $k = 1,2,3, \dots.$

Akan dicari $\Delta\tilde{x} = \{x_{k+1} - x_k\}$

$$\Delta\tilde{x} = \{(x_{1+1} - x_1), (x_{2+1} - x_2), (x_{3+1} - x_3), \dots \dots \dots \dots\}$$

$$\Delta\tilde{x} = \{(x_2 - x_1), (x_3 - x_2), (x_4 - x_3), \dots \dots \dots\}$$

$$= \left\{\left(\frac{1}{2} - 1\right), \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right), \dots \dots \dots\right\}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \dots \dots \dots \dots\right)$$

Sehingga terbentuklah barisan selisih yang pertama yaitu

$$\Delta\tilde{x} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \dots \dots \dots \dots\right)$$

Contoh 2 :

Diberikan barisan $(x_k) = \left(\frac{1}{k}\right)$

$$(x_k) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \dots\right)$$

Untuk setiap $k = 1,2,3, \dots.$

$$\Delta_2\tilde{x} = \{(x_3 - 2x_2 + x_1), (x_4 - 2x_3 + x_2), (x_5 - 2x_4 + x_3), \dots \dots \dots\}$$

$$= \left\{\left(\frac{1}{3} - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1\right), \left(\frac{1}{4} - 2\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\right), \dots \dots \dots\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{12}, \dots \dots .\right)$$

Sehingga terbentuklah barisan selisih yang kedua yaitu

$$\Delta_2\tilde{x} = = \left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{12}, \dots \dots .\right)$$

III. METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2018/2019 di jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini antara lain :

1. Membuktikan bahwa ruang l_2 adalah ruang bernorma , ruang bernorma lengkap, dan merupakan ruang Banach
2. Membuktikan bahwa ruang $l_2(\Delta)$ adalah ruang bernorma, ruang bernorma lengkap, dan merupakan ruang Banach
3. Membuktikan bahwa ruang $l_2(\Delta_2)$ adalah ruang bernorma, ruang bernorma lengkap, dan merupakan ruang Banach

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan sebelumnya dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut :

1. Ruang barisan $(l_2, \|.\|_2)$ dengan norma $\|\tilde{x}\|_2 = \{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\}^{\frac{1}{2}}$ merupakan ruang Banach.
2. Ruang Barisan $(l_2(\Delta), \|.\|_{(\Delta,2)})$ dengan norma $\|\tilde{x}\|_{(\Delta,2)} = |x_1| + \|\Delta\tilde{x}\|_2$ merupakan ruang Banach.
3. Ruang Barisan $(l_2(\Delta_2), \|.\|_{(\Delta_2,2)})$ dengan norma $\|\tilde{x}\|_{(\Delta_2,2)} = |x_1| + |x_2| + \|\Delta\tilde{x}\|_2$ merupakan ruang Banach.

5.2 Saran

Selisih ruang barisan $l_2, l_2(\Delta), l_2(\Delta_2)$, yang telah dibahas dapat dilanjutkan kembali oleh pembaca yang tertarik meneliti bidang analisis matematika terutama ruang barisan. Karena peneliti hanya meneliti hingga $l_2(\Delta_2)$ pembaca dapat membuktikkan hingga $l_2(\Delta_m)$ ataupun membuktikkan ruang barisan selisih yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Bartle, Robert G. and Donald R. 2000. *Introduction to Real Analysis.* John Wiley and Sons,Inc, New York.

Colak, Rifat., and Mikail, Et. 2005. On Some Difference Sequence Sets And Their Topological Properties. *Bulletin Of The Malaysian Mathematical Sciences Society*. 125-130.

Darmawijaya, S. 2007. *Pengantar Analisis Abstrak*. Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.

Kizmaz, H. 1981. On Certain Sequance Spaces. *Canada Math Bulletin*. Vol. 24(2)

Maddox,I.J. 1970. *Element of Functional Analysis*.Cambridge Univercity Press, London.

Martono, K. 1984. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik 2*. Angkasa, Bandung.

Mizrahi, A. dan Sullivan, M. 1982. *Calculus and Analytic Geometry*. Wadsworth Publishing Company Belmont, California.

Varberg, D., Edwin J., Purcell and Steven E., Rigdon. 2007. *Kalkulus.* Edisi 9. Terjemahan oleh I Nyoman Susila. Erlangga, Jakarta.