SOLUSI HAMPIRAN NUMERIK PERPINDAHAN PANAS YANG MEMUAT TRANSFORMASI HANKEL DENGAN METODE SIMPSON, METODE TITIK TENGAH DAN METODE TRAPEZOIDAL

(Skripsi)

Oleh

PRATIWI RAMADANI

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

ABSTRAK

SOLUSI HAMPIRAN NUMERIK PERPINDAHAN PANAS YANG MEMUAT TRANSFORMASI HANKEL DENGAN METODE SIMPSON, METODE TITIK TENGAH DAN METODE TRAPEZOIDAL

Oleh

Pratiwi Ramadani

Transformasi Hankel adalah salah satu bentuk integral tak wajar karena batas atas dari Transformasi Hankel tak hingga. Persamaan perpindahan konduksi panas pada silinder merupakan bentuk persamaan yang memuat Transformasi Hankel. Secara umum, solusi analitik persamaan perpindahan konduksi panas pada silinder sulit untuk diselesaikan, oleh karena itu dibutuhkan metode numerik untuk menghampiri solusi persamaan tersebut. Pada penelitian ini metode yang digunakan adalah metode Simpson, metode Titik Tengah, dan metode Trapezoidal. Hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa hampiran penyelesaian persamaan perpindahan konduksi panas pada silinder yang memberikan galat terkecil adalah metode Simpson.

Kata kunci : Transformasi Hankel, Perpindahan panas, metode Simpson, metode Titik Tengah, metode Trapezoidal

ABSTRACT

NUMERICAL SOLUTIONS OF HEAT TRANSFER THAT CONTAINS HANKEL TRANSFORMATION WITH SIMPSON METHOD, MIDPOINT METHOD AND TRAPEZOIDAL METHOD

By

Pratiwi Ramadani

Hankel transformation is one form of improper integral because the upper limit of Hankel transformation is infinite. Heat conduction transfer equation in the cylinder is a form of equation that contains the Hankel transformation. In general, the analytic solution of heat conduction transfer equation in the cylinder is difficult to solve, therefore a numerical method is needed to approach the solution of the equation. In this research the method used is the Simpson method, Midpoint method and Trapezoidal method. The results obtained show that almost the completion of the heat conduction transfer equation in the cylinder which gives the smallest error is the Simpson method.

Key word : Hankel transformation, Heat transfer, Simpson method, Midpoint method, Trapezoidal method

SOLUSI HAMPIRAN NUMERIK PERPINDAHAN PANAS YANG MEMUAT TRANSFORMASI HANKEL DENGAN METODE SIMPSON, METODE TITIK TENGAH DAN METODE TRAPEZOIDAL

Oleh

Pratiwi Ramadani

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

Judul Skripsi : **SOLUSI HAMPIRAN NUMERIK PERPINDAHAN PANAS YANG MEMUAT TRANSFORMASI HANKEL DENGAN METODE SIMPSON, METODE TITIK TENGAH DAN METODE TRAPEZOIDAL**

Nama Mahasiswa : **Pratiwi Ramadani**

Nomor Pokok Mahasiswa : 1517031157

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Amanto, S.Si.,M.Si.	**Dr. Aang Nuryaman,S.Si., M.Si.**
NIP. 19730314 200012 1 002	NIP. 19740316 200501 1 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamilliana, M.A., Ph.D.
NIP. 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Amanto, S.Si.,M.Si.** ....

Sekretaris : **Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Drs. Suratman, M.Sc.
NIP 196406041990031002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **24 Juli 2019**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama	: **Pratiwi Ramadani**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1517031157**
Judul	: **SOLUSI HAMPIRAN NUMERIK PERPINDAHAN PANAS YANG MEMUAT TRANSFORMASI HANKEL DENGAN METODE SIMPSON, METODE TITIK TENGAH DAN METODE TRAPEZOIDAL**
Jurusan	: **Matematika**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan semua tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah karya penulisan ilmiah Universitas Lampung.

Bandar Lampung, 24 Juli 2019

METERAI TEMPEL
A6448AEF734546570
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Pratiwi Ramadani
NPM. 1517031157

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Terbanggi Besar Lampung Tengah pada tanggal 30 Januari 1997. Penulis merupakan anak pertama dari 2 bersaudara dari pasangan Bapak Bero dan Ibu Sundaryati serta mempunyai adik perempuan yang bernama Nova Laras Sita.

Penulis menempuh pendidikan pertama di Taman Kanak-Kanak Insan Kamil Lampung Tengah pada tahun 2002. Penulis melanjutkan pendidikan di Sekolah Dasar Islam Terpadu Insan Kamil pada tahun 2003 sampai tahun 2009. Selanjutnya pada tahun 2009 penulis melanjutkan pendidikan di Sekolah Menengah Pertama Negeri 3 Terbanggi Besar sampai 2012. Penulis melanjutkan pendidikan di Sekolah Menengah Atas Negeri 1 Terbanggi Besar sampai tahun 2015. Penulis tercatat sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam di Universitas Lampung tahun 2015 melalui jalur SBMPTN. Pada tahun 2018 penulis melaksanakan Kerja Praktik di Kantor Pajak Pratama Kedaton dan melaksanakan KKN (Kuliah Kerja Nyata) di Desa Negeri Katon Kecamatan Marga Tiga Kabupaten Lampung Timur.

Motto

"Jika orang lain bisa maka aku juga bisa"

"Jawaban sebuah keberhasilan adalah terus belajar dan tak kenal putus asa"

"Jika kamu bisa menghargai orang lain maka orang lain juga bisa menghargaimu"

PERSEMBAHAN

Alhamdullillahirobbil'alamiin

Segala Puji Bagi Allah SWT, Zat Yang Maha Sempurna

Sholawat Dan Salam Selalu Tercurahkan Kepada Uswatun Hasanah

Rosululloh Muhamad SAW

Kupersembahkan karya kecil ini sebagai tanda cinta & kasih sayangku kepada :

Bapak dan Ibu yang tidak pernah lelah memberiksn kasih sayang, dukungan, dan doanya sampai sekarang untuk anakmu ini dalam menggapai kesuksesan.

Keluarga besarku yang terus memberikan semangat untuk terus berjuang hingga saat ini. Para pendidik yang telah mengajar dan memberikan ilmu dengan penuh kesabaran.

Semua sahabat yang selalu ada dan begitu tulus menyayangiku dengan segala kekuranganku.

Serta Almamater Universitas Lampung Tercinta.

SANWACANA

Puji syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas segala rahmat dan hidayah-Nya penulis dapat menyelesaikan Skripsi dengan judul **"Solusi Hampiran Numerik Perpindahan Panas Yang Memuat Transformasi Hankel Dengan Metode Simpson, Metode Titik Tengah Dan Metode Trapezoidal"**

Penghargaan dan ucapan terimakasih penulis haturkan kepada semua pihak yang telah berperan atas dorongan, bantuan, saran, kritik dan bimbingannya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan, antara lain kepada :

1. Bapak Amanto, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing 1 yang telah dengan sabar membimbing, memberi perhatian, memberi masukan dan saran serta ilmu selama proses penulisan skripsi.
2. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing 2 yang telah sabar membimbing, memberi masukan dan saran serta membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi.
3. Bapak Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D. selaku Pembahas dan Pembimbing Akademik yang telah memberikan ilmu, bimbingan, dukungan, saran dan kritik selama penulisan skripsi.

.

4. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, MA, Ph.D selaku Ketua jurusan Matematika yang selalu memberikan semangat dan motivasinya untuk penulis.
5. Bapak dan Ibu Dosen yang tidak dapat penulis sebutkan satu-satu, terimakasih atas ilmu yang telah diberikan kepada penulis selama melaksanakan study di FMIPA Universitas Lampung.
6. Kepala Laboratorium Jurusan Matematika, Jurusan Matematika FMIPA Unila beserta seluruh staff yang telah memberikan izin, fasilitas dan bantuan kepada penulis selama melakukan penelitian.
7. Kedua orang tuaku tercinta Bapak Bero dan Ibu Sundaryati, yang selalu memberikan doa, memberikan kekuatan, mencurahkan kasih sayang, dan memberikan nasihat agar penulis selalu sabar dalam mengemban ilmu.
8. Kepada adikku tersayang Nova Larasita yang selalu memberikan semangat dan doa selama penulisan skripsi.
9. Akika Mega Fadilah, Yuniarti, Monalisa, Dewi Sundari, Diana Dwi Mafiro dan Ratri Bintang teman kuliah, teman dekat, teman sharing berbagai hal, terimakasih atas segala suka dan duka yang selalu kalian berikan.
10. Bunga Anggraini, Lili Mahmudah, Rosalia Apriyanti dan Reza Adelia rekan kosan yang selalu membuat bahagia dan tertawa. Terimakasih segala kenangannya.
11. Dwi Puspita Sari, Aghil Arthama Hidayat, Wulan Cikita, Novalia, Ramasta Nesya, Siti Farizka, Laily Nur Fauziah teman dekat, teman sepermainan yang selalu memberikan keceriaan, semangat, dan motivasi untuk penulis.
12. Jamil Suryadi Putra terimakasih untuk waktu, dukungan, kesabaran, semangat dan doa untuk penulis.

13. Sepupuku Ita Ratna Sari dan Bude Susanti yang telah memberikan semangat dan dukungannya kepada penulis selama menempuh studi di Universitas Lampung.

Penulis menyadari bahwa masih banyak kekurangan didalam penulisan skripsi ini. Akhir kata penulis berharap semoga skripsi ini dapat diterima dan bermanfaat bagi pihak yang memerlukan.

Bandar Lampung,   Juli 2019

Penulis,

Pratiwi Ramadani

DAFTAR ISI

Halaman

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

V. KESIMPULAN

DAFTAR PUSTAKA

DAFTAR TABEL

1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ilmu fisika merupakan salah satu disiplin ilmu yang menerapkan ilmu matematika. Dalam ilmu fisika terdapat banyak kajian yang menjelaskan tentang kejadian fisis dimuka bumi seperti fenomena perpindahan panas yang terjadi di alam. Masalah fenomena perpindahan panas yang terjadi dalam fisika seringkali sulit untuk diselesaikan karena banyak parameter yang terlibat. Sehingga penyelesaian persoalan perpindahan panas tersebut memerlukan asumsi-asumsi untuk menyederhanakannya.

Permasalahan perpindahan panas khususnya yang terjadi pada silinder dapat dimodelkan dalam bentuk persamaan differensial parsial. Persamaan differensial parsial merupakan persamaan differensial yang melibatkan turunan parsial dari dua variabel bebas atau lebih. Permasalahan tersebut memiliki dua variabel bebas r dan z serta satu variabel tak bebas T. Persamaan umum perpindahan panas pada ruang dimensi tiga dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\ \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \tag{1.1}$$

Solusi permasalahan 1.1 mengandung bentuk integrasi dari fungsi Bessel yang diboboti oleh suatu fungsi $f(x)$ yaitu :

$$g(x) = \int_0^\infty f(x) J_v(x) x \, dx \tag{1.2}$$

Persamaan tersebut dikenal dengan Transformasi Hankel(Transformasi Bessel). Transformasi tersebut termasuk kedalam jenis integral tak wajar, karena batas atas dari Transformasi Hankel tak hingga. Secara umum, solusi analatik Transformasi Hankel sulit diperoleh karena mengandung bentuk integral tak wajar dan berosilasi sepanjang sumbu x. Oleh karena itu dibutuhkan suatu metode numerik untuk menghampiri solusi persamaan tersebut.

Terdapat beberapa metode numerik untuk menyelesaikan persoalan integral diantaranya metode Romberg, metode titik tengah, metode Trapezoidal ($Trapezoidal\ rule$), metode kuadrat Gauss ($Gaussian$ *quadrature*), dan metode Simpson ($Simpson\ rule$). Metode Trapeziodal, metode Titik Tengah dan metode Simpson adalah tiga jenis metode numerik yang didasarkan pada penjumlahan segmen-segmen. Berdasarkan hal tersebut maka penulis tertarik untuk meneliti solusi hampiran numerik masalah perpindahan panas yang mengandung Transformasi Hankel dengan menggunakan metode Simpson, metode Titik Tengah dan metode Trapezoidal.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penilitian ini adalah sebagai berikut :

1. Mengetahui solusi hampiran numerik masalah perpindahan panas pada silinder yang mengandung Transformasi Hankel dengan metode Simpson, metode Titik Tengah dan metode Trapezoidal.
2. Membandingkan solusi hampiran numerik metode Simpson, metode Titik Tengah dan metode Trapezoidal pada masalah perpindahan panas yang mengandung Transfornasi Hankel.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Menyelesaikan solusi hampiran numerik masalah perpindahan panas pada silinder yang mengandung Transformasi Hankel dengan metode Simpson, metode Titik Tengah dan metode Trapezoidal.
2. Dapat menjadi salah satu referensi terhadap mata kuliah bidang analisis numerik.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Differensial

Persamaan differensial merupakan suatu persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas dengan satu atau lebih variabel bebas. Berdasarkan jumlah variabel bebasnya, persamaan differensial dibagi menjadi dua yaitu :

1. Persamaan Differensial Biasa

   Persamaan differensial biasa merupakan persamaan differensial yang melibatkan turunan biasa dari satu atau lebih variabel tak bebas dengan satu variabel bebas.

2. Persamaan Differensial Parsial

   Persamaan differensial parsial merupakan persamaan differensial yang melibatkan turunan parsial dari satu atau lebih variabel tak bebas dengan lebih dari satu variabel bebas (Leveque, 1995).

2.2 Integral

Integral merupakan perhitungan kebalikan dari differensial yaitu suatu fungsi asal yang diturunkan dapat dikembalikan ke fungsi asalnya dengan cara integral.

Selanjutnya untuk menghitung integral diberikan notasi. Dengan bentuk umum hasil kebalikan dari differensialnya yaitu suatu fungsi $y = f(x)$, yang diturunkan menjadi $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ atau $dy = f'(x)dx$. Jika hasil dari differensial dinyatakan oleh $f'(x)$, maka integral dari fungsi tersebut dinyatakan oleh :

$$y = \int f'(x)dx = f(x) + c \tag{2.1}$$

Dalam perhitungan differensial, bahwa setiap derivative dari suatu fungsi konstata nilainya adalah 0 (nol), maka dalam perhitungan integral sebagai hasil perhitunganya ditambahkan dengan konstata (c). Sehingga hasil perhitungan integralnya menjadi $\int f'(x)dx = f(x) + c$. Integral terdiri dari dua jenis yaitu integral tak tentu *(indifinite)* dan integral tentu *(definite)* (Supangat, 2006).

1. Integral Tak Tentu

   Integral tak tentu adalah suatu model perhitungan integral untuk harga x yang tidak terbatas. Tujuan dari penentuan dengan model integral tak tentu hanya semata-mata untuk mencari fungsi asalnya. Bentuk umum dari integral tak tentu adalah sebagai berikut :

$$\int f'(x)dx = f(x) + c \tag{2.2}$$

2. Integral Tentu

   Integral tentu erat kaitannya dengan integral Riemann. Misalkan suatu partisi P membagi interval (a, b) menjadi n interval bagian dengan menggunakan titik-titik $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ dan misalkan

   $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Pada tiap interval bagian $(x_i - x_{i-1})$, ambil sebuah titik sembarang x_i yang disebut sebagai titik sampel untuk interval bagian ke-i. Maka integral tentu tersebut didefinisikan sebagai berikut :

Misalkan f suatu fungsi yang didefinisikan pada interval tertutup (a, b). Jika

$$\lim_{||P|| \to 0} \sum_i^n f(x_i) \Delta x_i \tag{2.3}$$

Ada, maka dikatakan f adalah terintegrasikan pada (a, b). Lebih lanjut $\int_a^b f(x)dx$, disebut integral tentu (Integral Riemman) f dari a ke b, kemudian diberikan oleh:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{||p|| \to 0} \sum_i^n f(x_i)\, \Delta x_i \tag{2.4}$$

2.3 Integral Tak Wajar

Didefenisikan sebuah integral tak tentu yaitu :

$$\int_a^b f(x)dx \tag{2.5}$$

Kita mengasumsikan bahwa integral tentu tersebut mempunyai dua sifat. Pertama, bahwa domain integrasi [a,b] adalah terbatas. Kedua, bahwa pada domain, daerah hasil (range) dari integral adalah terbatas. Dalam prakteknya, kita mungkin menemukan masalah-masalah yang tidak mempunyai satu atau dua sifat tersebut. Sebagai contoh, integral luas bidang datar di bawah kurva $y = \frac{\ln x}{x^2}$ dari $x = 1$ sampai $x = \infty$ tidak mempunyai sifat yang pertama karena domainnya tidak terbatas.

Contoh lain, integral luas bidang datar di bawah kurva $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ antara $x = 0$ dan $x = 1$ tidak mempunyai sifat yang kedua karena daerah hasilnya tidak terbatas dengan asimtot tegak $x = 0$. untuk kedua kasus tersebut, kita tidak dapat menghitung integral tentu menggunakan Teorema Fundamental Kalkulus Integral. Integral-integral tentu seperti kedua contoh tersebut dinamakan integral tak wajar *(improper integral)* (Budi, N.D, 2012).

Definisi 2.3.1

Integral tak wajar adalah integral dengan satu atau kedua syarat berikut ini :

a. *(tipe 1)* interval integrasi adalah tidak terbatas, yaitu $[a, +\infty]$ atau $[-\infty, b]$ atau $[-\infty, \infty]$.

b. *(tipe 2)* integran $f(x)$ mempunyai suatu ketakkontinuan tak hingga di suatu titik c dalam selang $[a, b]$ yang artinya :

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty$$

Definisi 2.3.2

Integral tak wajar tipe 1 adalah sebagai berikut :

a. Jika $f(x)$ kontinu pada $[a, \infty]$, maka

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx \tag{2.6}$$

b. Jika $f(x)$ kontinu pada $[-\infty, b]$, maka

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx \tag{2.7}$$

c. Jika $f(x)$ kontinu pada $[-\infty, \infty]$, maka

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx \tag{2.8}$$

Definisi 2.3.3

Integral tak wajar tipe 2 adalah sebagai berikut :

a. Jika $f(x)$ kontinu pada $(a, d]$ dan tidak kontinu di $x = a$, maka

$$\int_a^d f(x)\, dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^d f(x)\, dx \tag{2.9}$$

b. Jika $f(x)$ kontinu pada $[a, d)$ dan tidak kontinu di $x = d$, maka

$$\int_a^d f(x)\, dx = \lim_{b \to d^-} \int_a^b f(x)\, dx \tag{2.10}$$

c. Jika $f(x)$ tidak kontinu di c, dimana $a < k < d$, dan kontinu pada $[a, k) \cup (k, d]$, maka

$$\int_a^d f(x)\, dx = \int_a^k f(x)\, dx + \int_k^d f(x)\, dx \tag{2.11}$$

Dalam setiap kasus di atas, jika limitnya berhingga, maka integral tak wajar dikatakan konvergen dan limitnya merupakan nilai untuk integral tak wajar. Jika limitnya tidak ada, maka integral tak wajar dikatakan divergen.

2.4 Deret Taylor

Deret Taylor dinamai berdasarkan seorang matematikawan Inggris, Brook Taylor (1685-1731) dan deret Maclaurin dinamai berdasarkan matematikawan Skotlandia, Colin Maclaurin (1698-1746), meskipun pada kenyataannya deret Maclaurin hanya kasus khusus dari deret Taylor. Akan tetapi, gagasan mempresentasikan fungsi-fungsi tertentu sebagai jumlah dari deret pangkat berasal dari Newton, dan deret Taylor yang umum diperkenalkan oleh matematikawan Skotlandia James Gregory di tahun 1668 dan oleh matematikawan Swiss John Bernoulli di tahun 1690-an. Deret Taylor ini sangat penting karena deret Taylor memungkinkan untuk mengintegralkan fungsi-fungsi yang tidak dapat diselesaikan sebelumnya dengan cara menyatakan sebagai deret pangkat terlebih dahulu, kemudian mengintegralkan deretnya suku demi suku (Paliouras, J.D, 1975).

Teorema 2.4.1

Misalkan f fungsi turunan ke$-(n+1)$, yaitu $f^{n+1}(x)$ ada untuk masing-masing x dalam interval terbuka l yang mengandung a. Maka untuk masing-masing x dalam l adalah sebagai berikut :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x) \quad (2.12)$$

Dengan sisa (atau galat) $R_n(x)$ diberikan oleh rumus :

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (2.13)$$

Dan c suatu titik diantara x dan a

Teorema diatas menunjukkan bahwa galat seperti apa yang akan terjadi ketika mengaproksimasi fungsi dengan sejumlah berhingga suku dari deret Taylornya.

Deret Taylor tersebut tidak dapat digunakan secara langsung untuk mengaproksimasi fungsi seperti e^x atau tan x. Namun, pemenggalan deret Taylor, yaitu memenggal deret setelah berhingga suku, menuju ke polinomial yang dapat digunakan untuk mengaproksimasi suatu fungsi. Polinomial-polinomial seperti ini disebut polinomial Taylor.

2.5 Transformasi Hankel

Fungsi yang menghasilkan integral-integral Riemman adalah kontinu pada interval-interval tertentu. Jadi, fungsi-fungsi tersebut adalah terbatas dan interval-

intervalnya adalah terhingga. Integral dari fungsi-fungsi dengan sifat-sifat seperti ini disebut dengan integral tak wajar (proper integral). Ketika satu atau lebih batasan ini tidak terpenuhi, maka integral ini disebut tak wajar. Integral $\int_a^b g(x)dx$ disebut integral tak wajar jika :

1. $a = -\infty$ atau $b = \infty$ atau keduanya, yaitu salah satu atau kedua limit integrasinya tak terhingga.
2. $g(x)$ adalah tidak terbatas pada satu titik atau lebih dari $a \le x \le b$. Titik-titik semacam ini disebut singularitas dari $g(x)$.

Suatu integral dengan batas tak hingga dapat disebut integral tak wajar, seperti integral dengan batas atas tak hingga, integral dengan batas bawah tak hingga, dan integral dengan batas atas dan batas bawah tak hingga. Seperti halnya dengan transformasi Hankel yang disebut juga sebagai integral tak wajar yang didefenisikan sebagai berikut :

$$H(x) = \int_0^\infty g(x)J_v(rx)x\,dx \tag{2.17}$$

Sementara, untuk Invers Transformasi Hankel orde v didefinisikan sebagai berikut :

$$H^{-1}(x) = \int_0^\infty g(r)J_v(rx)r\,dr \tag{2.18}$$

Transformasi Hankel (HT) diperkenalkan oleh H.Hankel (1839-1873), seorang ahli matematikawan Jerman yang melakukan kontribusi untuk analisis kompleks dan teori fungsi, serta membentuk kembali karya mendasar Riemman pada istilah integral yang lebih mengukur teori moderen. Namun, ia mungkin paling diingat untuk karyanya pada fungsi Bessel dari jenis pertama yaitu fungsi Hankel.

Transformasi Hankel dari fungsi $f(x)$ ada jika :

1. $f(x)$ kontinu sepotong-sepotong untuk setiap interval berhingga
2. $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$ konvergen sehingga seluruh fungsi $f(x)$ absolut integrabel.

Untuk mendapatkan solusi dalam bentuk integral transformasi Hankel, di mana kebanyakan kasus, integrasi analitik pada persamaan diatas sulit untuk diselesaikan, oleh sebab itu diperlukan integrasi numerik. Namun, terdapat berbagai kesulitan dalam mengevaluasi persamaan diatas secara numerik apabila :

1. Batas integralnya tak terbatas.
2. $g(x)$ menunjukkan perilaku tunggal atau osilasi.

Dengan memperkenalkan sebuah integral transformasi yang disebut juga sebagai integral tak wajar, yang didasarkan pada fungsi Bessel adalah transformasi Hankel, dimana $J_N(x)$ adalah fungsi Bessel jenis pertama berorde n yang didefinisikan sebagai berikut :

$$J_N(x) = \frac{x^N}{2^v\tau(N+1)}\left\{1 - \frac{\mathrm{x}^2}{2(2\mathrm{N}+2)} + \frac{\mathrm{x}^4}{2\cdot 4(2\mathrm{N}+2)(2\mathrm{N}+4)} - \cdots\right\} \qquad (2.19)$$

Atau

$$J_v(x) = x^v \sum_{\mathrm{r}=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\mathrm{r}}\mathrm{x}^{2\mathrm{r}}}{2^{2\mathrm{r}+\mathrm{n}}\mathrm{r}!(\mathrm{n}+\mathrm{r})!} \qquad (2.20)$$

Jika n sama dengan 0, maka

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} + \frac{x^6}{2304} + \frac{x^8}{147456} + \frac{x^{10}}{14745600} + \cdots \qquad (2.21)$$

Dan jika n sama dengan 1, maka

$$J_1(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{16} + \frac{x^5}{384} + \frac{x^7}{18432} + \frac{x^9}{1474560} + \cdots \qquad (2.22)$$

(Piessens, 2000).

Contoh 1 : Berdasarkan $\int_s^a rJ_0(sr)dr = \int_s^a \frac{1}{s}\frac{d}{dr}[rJ_1(sr] = [aJ_1(as)]/s$

Maka untuk $Ha_0\{p_a(r)\} = \frac{a}{s}J_1(as)$, dimana $p_a(r) = 1$ untuk $r < a$ dan $p_a(r) = 0$ untuk $r > a$.

Contoh 2 : Berdasarkan $\int_s^a J_0(sr)dr = \frac{1}{s}$, untuk $s > 0$ didapatkan $Ha_0\left\{\frac{1}{r}\right\} = \frac{1}{s}$

Contoh 3 : Berdasarkan $\int_s^a r\delta(r-a)J_0(sr)dr = aJ_0(as)$, untuk $s > 0$ didapatkan $Ha_0\{\delta(r-a)\} = aJ_0(as)$ dan karena simetri untuk $a > 0$, maka $Ha_0\{aJ_0(ar)\} = \delta(s-a)$.

2.6 Metode Numerik

Metode numerik merupakan teknik yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematik sehingga dapat diselesaikan dengan operasi perhitungan atau aritmatika biasa (tambah, kurang, kali, bagi). Metode numerik disebut juga sebagai alternatif dari metode analitik, yang merupakan metode penyelesaian persoalan matematika dengan rumus-rumus aljabar yang sudah baku atau lazim. Disebut demikian, karena adakalanya persoalan matematika sulit untuk diselesaikan atau bahkan tidak dapat diselesaikan secara analitik, sehingga dapat dikatakan bahwa persoalan matematik tersebut tidak mempunyai solusi analitik. Sehingga sebagai alternatifnya, persoalan matematik tersebut diselesaikan dengan menggunakan metode numerik.

Perbedaan antara metode numerik dengan metode analitik adalah metode numerik hanya dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang sederhana dan menghasilkan solusi yanng sebenarnya atau solusi sejati. Sedangkan metode numerik dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang sangat kompleks dan nonlinier. Solusi yang dihasilkan dari penyeselesaian secara numerik merupakan solusi hampiran atau pendekatan yang mendekati solusi eksak atau solusi sebenarnya. Hasil penyelesaian yang didapatkan dari metode numerik dan metode analitik memiliki selisih, dimana selisih tersebut dinamakan kesalahan *(error)* (Munir, 2003).

2.7 Integrasi Numerik

Integrasi numerik adalah suatu metode yang digunakan untuk mendapatkan nilai-nilai hampiran dari beberapa integral tertentu yang memerlukan penyelesaian numerik sebagai hampirannya. Solusi hampiran yang dihasilkan memang tidak tepat sama dengan solusi analitiknya. Akan tetapi dapat ditentukan selisih antara solusi analitik dan solusi numerik sekecil mungkin. Dari semua fungsi yang ada, fungsi polinomial adalah fungsi yang paling mudah untuk diintegrasikan. Namun demikian kenyataannya seringkali dihadapkan pada permasalahan dimana integrasi harus dilakukan pada fungsi yang tidak mudah untuk diintegrasikan secara analitik atau bahkan fungsi yang diberikan hanya dalam bentuk data diskrit.

Terdapat tiga pendekatan dalam menurunkan rumus integrasi yaitu :

1. Pendekatan pertama adalah berdasarkan tafsiran geometri integral tentu. Daerah integrasi dibagi atas sejumlah pias *(strip)* yang berbentuk segi empat. Luas daerah integrasi dihampiri dengan seluruh luas pias. Integrasi numerik yang diturunkan dengan metode ini digolongkan ke dalam metode pias.

Kaidah integrasi numerik yang dapat diturunkan dengan metode pias adalah kaidah segiempat, kaidah trapesium dan kaidah titik tengah.

2. Pendekatan kedua adalah berdasarkan interpolasi polinomial. Disini fungsi integral $f(x)$ dihampiri dengan polinomial interpolasi $p_n(x)$. Selanjutnya, integrasi dilakukan terhadap $p_n(x)$ karena polinom lebih mudah diintegralkan dari pada mengintegralkan $f(x)$. Rumus integrasi numerik yang diturunkan dengan pendekatan ini digolongkan ke dalam metode Newton-Cotes, yaitu metode yang umum yang digunakan untuk menurunkan rumus integrasi numerik. Adapun beberapa kaidah integrasi numerik yang diturunkan dari metode Newton-Cotes antara lain kaidah trapesium, kaidah simpson 1/3 dan kaidah simpson 3/8.
3. Pendekatan ketiga sama sekali tidak menggunakan titik-titik diskrit sebagaimana pada kedua pendekatan diatas. Nilai integral diperoleh dengan mengevaluasi nilai fungsi pada sejumlah titik tertentu di dalam selang [-1,1], mengalikannya dengan suatu konstanta, kemudian menjumlahkannya keseluruh perhitungan. Pendekatan ketiga ini dinamakan Kuadratur Gauss.

Pada umumnya, perhitungan integral secara numerik bekerja dengan sejumlah titik-titik diskrit. Untuk fungsi menerus, titik-titik diskrit tersebut diperoleh dengan menggunakan persamaan fungsi yang diberikan untuk menghasilkan tabel nilai. Dihubungkan dengan tafsiran geometri integral tentu, titik-titik pada tabel sama dengan membagi selang integrasi $[a, b]$ menjadi n buah partisi pias *(strip)* atau segmen. Lebar tiap pias adalah

$$h = \frac{b - a}{n} \tag{2.23}$$

titik absis pias dinyatakan sebagai

$x_i = a + ih \qquad i = 0,1,2,3,\cdots n$

Dan nilai fungsi pada titik absis pias adalah

$$f_i = f_i(x_i) \tag{2.24}$$

Luas daerah integrasi $[a, b]$ dihampiri sebagai luas n buah pias. Metode integrasi numerik yang berbasis pias ini disebut dengan metode pias (Munir, 2003)

Tabel 1. Metode Integrasi

i	x_i	f_i
0	x_0	f_0
1	x_1	f_1
2	x_2	f_2
3	x_3	f_3
4	x_4	f_4
…	…	…
$n-2$	x_{n-2}	f_{n-2}
$n-1$	x_{n-1}	f_{n-1}
n	x_n	f_n

2.8 Galat

Perhitungan integrasi secara numerik umumnya memiliki perbedaan dari perhitungan dengan analitik. Perbedaan ini dapat ditimbulkan oleh galat pada perhitungan integrasi numerik. Secara umum, galat yang ditentukan pada perhitungan integrasi numerik adalah galat hampiran atau galat pemotongan.

Galat hampiran muncul karena metode atau aturan integrasi numerik melakukan pendekatan atau pada penghampiran pada nilai integrasi dengan pendekatannya masing-masing. Galat total pada integrasi numerik dapat dihitung dengan pendekatan deret Taylor.

Selain itu, aspek lain yang sangat penting untuk diperhatikan di dalam komputasi numerik adalah keakuratan penyelesaian yang diperoleh. Hal ini dikarenakan penyelesaian yang diperoleh dari komputasi numerik biasanya merupakan suatu hampiran, yang dengan sendirinya memuat beberapa galat (kesalahan numerik). Misalkan $\hat{x}$ adalah nilai hampiran terhadap nilai sejatinya x, maka selisih

$\varepsilon = x - \hat{x}$ disebut dengan galat, jilka tanda galat (positif dan negatif) tidak dipertimbangkan, maka galat mutlak dapat didefinisikan sebagai berikut :

$$|\varepsilon| = |x - \hat{x}| \tag{2.25}$$

Untuk mengatasi interpretasi nilai galat ini, maka galat tersebut harus dinormalkan terhadap nilai sejatinya, gagasan ini yang dinamakan galat relatif didefinisikan sebagai berikut :

$$|\varepsilon| = \left| \frac{x - \hat{x}}{x} \right| \tag{2.26}$$

Pada integrasi numerik, menganalisis galat sangat penting, karena galat berhubungan dengan seberapa dekat solusi hampiran terhadap solusi sejatinya. Semakin kecil galatnya, semakin teliti solusi numerik yang didapatkan. Keakuratan penyelesaian yang diperoleh dari metode numerik sangat penting untuk diperhatikan, karena penyelesaian yang diperoleh memuat beberapa galat (kesalahan numerik).

Galat dalam komputasi numerik dapat dikelompokkan menjadi tiga kategori, yaitu:

1. Galat bawaan *(inherent error)* adalah galat yang disebabkan oleh kesalahan hasil pengukuran, kesalahan data awal, dan sejenisnya.
2. Galat pemotongan adalah galat yang berkaitan dengan metode numerik yang digunakan. Galat ini dapat terjadi karena adanya pemotongan deret tak berhingga yang menyangkut perhitungan nilai suatu fungsi atau nilai desimal, dan karena penghentian proses tak berhingga setelah langkah tertentu.
3. Galat pembulatan adalah galat yang berkaitan dengan penggunaan sejumlah sebatas angka signifikan. Angka signifikan merupakan banyaknya digit yang diperhitungkan dalam suatu kuantitas yang diukur dan dihitung (Sahid, 2005).

2.9 Konduksi Panas Pada Silinder

Perpindahan panas merupakan ilmu yang mempelajari perpindahan energi karena perbedaan temperatur diantara benda atau material. Disamping itu, perpindahan panas juga meramalkan laju perpindahan panas yang terjadi pada kondisi tertentu. Persamaan fundamental didalam perpindahan panas merupakan persamaan kecepatan yang menghubungkan kecepatan perpindahan panas diantara dua sistem dengan sifat termodinamika dalam sistem tersebut. Gabungan persamaan kecepatan, kesetimbangan energi, dan persamaan keadaan termodinamis menghasilkan persamaan yang dapat memberikan distribusi temperature dan kecepatan perpindahan panas.

Perpindahan panas melalui tiga cara yaitu konveksi, konduksi, dan radiasi. Perpindahan panas secara konduksi adalah perpindahan panas dalam suatu medium tanpa disertai perpindahan partikel pada medium tersebut. Misalnya, jika salah satu ujung batang besi dipanaskan, maka ujung besi lainnya akan terasa panas. Dalam hal ini, panas akan berpindah dari benda atau medium yang suhunya tinggi menuju ke benda atau medium yang suhunya rendah.

Pada perpindahan panas terdapat istilah fluks kalor/panas (heat fluks) dilambangkan sebagai q, yang didefinisikan sebagai besarnya laju perpindahan panas persatuan luas bidang normal terhadap arah perpindahan panas. Laju perpindahan panas dapat dipengaruhi oleh beberapa faktor, antara lain luas permukaan benda yang saling bersentuhan, dan konduktivitas panas. Persamaan dasar perpindahan panas secara konduksi satu dimensi dalam keadaan setimbang adalah sebagai berikut :

$$q = -k \frac{dT}{dx} \tag{2.27}$$

Sedangkan persamaan umum perpindahan panas di ruang dimensi tiga(silinder) pada arah z, r, θ dalam keadaan stabil *(steady state)* adalah sebagai berikut :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\ \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \times u = 0 \tag{2.28}$$

Berdasarkan syarat batas maka persamaan dasar perpindahan panas secara konduksi adalah sebagai berikut :

$$-k\frac{dT}{dz} = qh(a - s) \tag{2.29}$$

Dengan Transformasi Hankel $(u \rightarrow U)$, maka masalahnya berkurang menjadi :

$$\left(-k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \times U = 0 \tag{2.30}$$

$$-k\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{qxJ_1(px)}{x}, z = 0 \quad (2.31)$$

Berdasarkan persamaan diatas dan dengan Transformasi Hankel, maka diperoleh solusinya sebagai berikut :

$$T(r,z) = \frac{qp}{k}\int_0^\infty e^{-xz} J_1(px)J_0(rx)\frac{1}{x}\,dx \quad (2.32)$$

Keterangan :

q = laju perpindahan panas (W)

k = konduktivitas thermal $\frac{W}{m}$°C

r = tebal silinder (m)

z = panjang silinder (m)

p = jari-jari silinder (m)

(Holman, J.P, 1984).

2.10 Metode Trapezoidal *(Trapezoidal rule)*

Metode Trapezoidal merupakan metode integrasi numerik yang didasarkan pada penjumlahan segmen-segmen berbentuk trapesium. Secara umum aturan trapesium adalah sebagai berikut :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\sum_{i-1}^{n-1} f_i + f(x_n)\right) \quad (2.33)$$

Keterangan :

n = jumlah interval

h = jarak antar titik ($h = \frac{(b-a)}{n}$)

a, b = batas kurva

$f(x)$ = fungsi

(Munir, 2003).

2.11 Metode Titik Tengah *(Midpoint rule)*

Aturan Titik Tengah (*Midpoint Rule*) hampir mirip dengan Aturan Trapezoidal tetapi Aturan Titik Tengah menggunakan pendekatan Luas Persegi Panjang. Dengan mengevaluasi fungsi *f*(*x*) pada titik tengah setiap interval, sehingga kesalahannya akan lebih kecil dibandingkan dengan aturan trapezoidal. Secara umum aturan Titik Tengah didefinisikan sebagai berikut :

$$\int_a^b f(x)dx = h \sum_{i-1}^{n-1} f\left(x_0 + \left(n + \frac{1}{2}\right)h\right) \tag{2.34}$$

Keterangan :

n = jumlah interval

h = jarak antar titik ($h = \frac{(b-a)}{n}$)

a, b = batas kurva

$f(x)$ = fungsi

(Munir, 2003) .

2.12 Metode 1/3 Simpson *(Simpson rule)*

Kaidah simpson merupakan turunan dari metode Newton-Cotes. Metode atau kaidah ini dikenalkan oleh seorang ahli matematika bernama Thomas Simpson (1710-1761) dari Leicestershire, England. Metode 1/3 Simpson dapat didefinisikan sebagai luas daerah yang dibatasi oleh hampiran fungsi parabola.

Integral Simpson secara numerik didefinisikan sebagi berikut :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\ (f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f_i + 2\sum_{i=2,4,6}^{n-2} f_i + f(x_n)) \qquad (2.43)$$

Keterangan :

$n =$ jumlah interval

h = jarak antar titik ($h = \frac{(b-a)}{n}$)

a, b = batas kurva

$f(x)$ = fungsi

(Munir, 2003) .

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penilitian ini dilakukan pada semester genap tahun ajaran 2018/2019 bertempat di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Adapun metode penilitian yang dilakukan adalah sebagai berikut :

1. Diberikan persamaan konduksi panas pada silinder sebagai berikut :

$$T = \frac{qp}{k}\int_0^\infty e^{-xz} J_1(px)J_0(rx)\frac{1}{x}\,dx$$

2. Diberikan masalah konduksi panas yang terjadi pada medium berbentuk silinder.
3. Mencari solusi numerik persamaan konduksi panas pada silinder dengan menggunakan metode Simpson.
4. Mencari solusi numerik persamaan konduksi panas pada silinder dengan menggunakan metode Titik Tengah.

5. Mencari solusi numerik persamaan konduksi panas pada silinder dengan menggunakan metode Trapezoidal.
6. Mencari solusi eksak persamaan konduksi panas pada silinder.
7. Mencari nilai galat (Anilisis *error*).
8. Membandingkan solusi numerik ketiga metode dengan solusi eksak persamaan konduksi panas pada silinder.

V. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah penulis jelaskan, maka dapat disimpulkan bahwa metode Simpson merupakan metode yang terbaik dibandingkan dengan metode Trapezoidal dan metode Titik Tengah untuk menyelesaikan masalah persamaan perpindahan konduksi panas pada silinder karena galat relatif metode Simpson lebih kecil untuk $n = 300$ adalah 0 dibandingkan galat relatif dari metode Trapezoidal untuk $n = 300$ adalah 0,0000070161 dan metode Titik Tengah untuk $n = 300$ adalah 0,0000007408.

DAFTAR PUSTAKA

Budi, N. D. 2012. *Kalkulus Integral dan Aplikasinya*. Graha Ilmu, Yogyakarta.

Holman, J.P. 1984. *Perpindahan Kalor*. Edisi Kelima. Erlangga, Jakarta.

Leveque, R.J. 1995. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*. University of Washington, Washington.

Munir, Rinaldi. 2003. *Metode Numerik*. Informatika Bandung, Bandung.

Paliourus, J. D. 1975. *Peubah Kompleks Untuk Ilmuan dan Insinyur*. Erlangga, Jakarta.

Piessens, Robert. 2000. *The Transforms and Applications Handbook*. Second Edition. Katholieke Universeit Leuven, CRC Press LLC.

Sahid. 2005. *Pengantar Komputasi Numerik dengan Matlab*. Andi, Yogyakarta.

Supangat, Andi. 2006. *Matematika Untuk Ekonomi dan Bisnis*. Prenada Media Grup, Jakarta.