METODE *REGRESI SPEKTRAL* DAN *EXACT MAXIMUM LIKELIHOOD* DALAM PENDUGAAN PARAMETER MODEL *AUTOREGRESSIVE FRACTIONALLY INTEGRATED MOVING AVERAGE (*ARFIMA)

(Skripsi)

Oleh

Pipin Agustina

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

ABSTRAK

METODE *REGRESI SPEKTRAL* DAN *EXACT MAXIMUM LIKELIHOOD* DALAM PENDUGAAN PARAMETER MODEL *AUTOREGRESSIVE FRACTIONALLY INTEGRATED MOVING AVERAGE (*ARFIMA)

Oleh

Pipin Agustina

Model *Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average* (ARFIMA) merupakan pengembangan dari model ARIMA dengan nilai *differencing* (d) bilangan real. Pada penelitian ini, model ARFIMA digunakan untuk memodelkan data harga emas di Indonesia. Pendugaan parameter model ARFIMA dilakukan dalam tiga tahap, yaitu tahap pertama dan kedua menduga parameter AR dan MA dengan menggunakan metode *Exact Maximum Likelihood* (EML) dan tahap ketiga menduga parameter *differencing* (d) dengan menggunakan metode Regresi Spektral (GPH). Berdasarkan metode Geweke dan Porter Hudak (GPH) diperoleh model ARFIMA dengan nilai parameter d = 0.406483, dan bedasarkan nilai AIC, BC dan HQ terkecil model terbaik adalah ARFIMA (1, d[0.406483], 4) dengan nilai MAPE sebesar 0.39%

Kata Kunci: *Time series*, ARFIMA, *Long memory*, *Fractional Integrated*.

ABSTRACT

SPECTRAL REGRESSION METHOD AND EXACT MAXIMUM LIKELIHOOD IN ESTIMATION THE *AUTOREGRESSIVE FRACTIONALLY INTEGRATED MOVING AVERAGE (*ARFIMA) MODEL PARAMETERS

By

Pipin Agustina

Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average (ARFIMA) model is a development of the ARIMA model with differencing (d) as a real number. The purposes of this research were to analyze data of gold price in Indonesia with the estimation of the ARFIMA model parameters is devided into three stages, namely the first and second stages estimation the AR and MA model parameters using the exact maximum likelihood method, and then the third stage estimation the parameter differencing (d) using the spectral regression method (GPH). Based on the Geweke and Porter Hudak (GPH) method, the parameter d of the ARFIMA model is 0.406483 and based on the smallest AIC, BC, and HQ, the best ARFIMA model is (1, d[0.406483], 4) with MAPE value of 0.39%.

Kata Kunci: Time series, ARFIMA, Long memory, Fractional Integrated.

METODE *REGRESI SPEKTRAL* DAN *EXACT MAXIMUM LIKELIHOOD* DALAM PENDUGAAN PARAMETER MODEL *AUTOREGRESSIVE FRACTIONALLY INTEGRATED MOVING AVERAGE (*ARFIMA)

Oleh
Pipin Agustina

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

Judul Skripsi : **METODE *REGRESI SPEKTRAL* DAN *EXACT MAXIMUM LIKELIHOOD* DALAM PENDUGAAN PARAMETER MODEL *AUTOREGRESSIVE FRACTIONALLY INTEGRATED MOVING AVERAGE* (ARFIMA)**

Nama Mahasiswa : Pipin Agustina

Nomor Pokok Mahasiswa : 1517031129

Program Studi : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Widiarti, S.Si., M.Si.
NIP 19800502 200501 2 003

Dian Kurniasari, S.Si., M.Sc.
NIP 19690305 199603 2 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Widiarti, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Dian Kurniasari, S.Si., M.Sc.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Dr. Khoirin Nisa, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Drs. Suratman, M.Sc.
NIP. 196406041990031002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **26 Juni 2019**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertandatangan di bawah ini :

Nama	:	Pipin Agustina
Nomor Pokok Mahasiswa	:	1517031129
Jurusan	:	Matematika

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Semua hasil tulisan dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung.

Bandar Lampung, 30 Juli 2019
Penulis

Pipin Agustina
NPM.1517031129

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Pugung Raharjo pada tanggal 25 Agustus 1996, sebagai anak pertama dari empat bersaudara dari pasangan Bapak Bayu Arinto dan Ibu Fenti Yuliana.

Penulis telah menempuh Pendidikan di Sekolah Dasar Negeri (SDN) 4 Metro Timur Kota Metro tahun 2003-2009, Sekolah Menengah Pertama Negeri (SMPN) 3 Kota Metro tahun 2009-2012, dan Sekolah Menengah Atas Negeri (SMAN) 5 Kota Metro pada tahun 2012-2015.

Pada tahun 2015 penulis terdaftar sebagai Mahasiswi Program Studi S1 Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur SBMPTN dan menerima Beasiswa Bidikmisi. Selama menjadi mahasiswi, penulis bergabung di Generasi Muda Matematika (GEMATIKA) periode 2015-2016, dan pengurus Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA) sebagai anggota Bidang Eksternal periode 2016.

Pada bulan Januari sampai dengan Februari 2018 penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Badan Pengelola Pajak dan Retribusi Daerah Kota Bandar Lampung guna menerapkan ilmu yang telah diperoleh sewaktu kuliah. Pada bulan

Juli sampai dengan Agustus 2018 penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) Kebangsaan di Desa Raja Basa Lama II, Kecamatan Labuhan Ratu, Kabupaten Lampung Timur.

KATA INSPIRASI

Janganlah kamu lemah, dan janganlah (pula) kamu bersedih hati.

(QS:Ali'Imran, 139)

Ridha Allah tergantung pada ridha orang tua dan murka Allah tergantung pada murka orang tua.

(QS:Ali'Imran, 173)

Bila berdoa dan memohon sesuatu kepada Allah maka memohonlah dengan penuh kayakinan bahwa doa'mu akan terkabul.

(H.R. Ahmad)

PERSEMBAHAN

Dengan mengucap Alhamdulillah, puji syukur kehadirat Allah SWT

Ku persembahkan karya kecil sangat sederhana ini kepada:

Ayahku Bayu Arinto & Ibuku Fenti Yuliana

Terimakasih Ayah, Ibu yang telah mengasihi dan menyayangiku dengan penuh rasa tulus dan telah berjuang dengan ikhlas, tak kenal lelah dan waktu. Senantiasa berdoa di setiap jejak langkah kakiku dan memberiku semangat ketika diriku mulai merasa gentar melewati ini semua.

Adik-adikku Bayu, Dita, Aliya

Terimakasih telah memberi doa yang tulus dan yang selalu berbagi canda, tawa serta menjadi penyemangat agar bisa menjadi kakak yang bisa dibanggakan.

SANWACANA

Alhamdulillah puji syukur kepada Allah SWT yang telah melimpahkan segala rahmat dan hidayah-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Shalawat serta salam semoga selalu tercurah kepada junjungan alam Nabi Muhammad SAW, penuntun jalan bagi seluruh umat manusia. Skripsi yang berjudul "Metode *Regresi Spektral* dan *Exact Maximum Likelihood* Dalam Pendugaan Parameter Model *Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average (*ARFIMA)" adalah salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains di Universitas Lampung.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini tidak akan terwujud tanpa bantuan dan doa dari mereka yang senantiasa mendukung penulis. Oleh karena itu penulis ingin mengucapkan terimakasih kepada:

1. Ibu Widiarti, S.Si., M.Si., selaku dosen pembimbing satu yang telah membimbing, mengarahkan, dan memotivasi penulis.
2. Ibu Dian Kurniasari, S.Si., M.Sc., selaku dosen pembimbing kedua yang telah memberikan pengarahan dalam proses penyusunan skripsi ini.
3. Ibu Dr. Khoirin Nisa, S.Si., M.Si., selaku penguji atas saran dan kritik yang diberikan untuk skripsi ini.

4. Ibu Widiarti, S.Si., M.Si., selaku dosen pembimbing akademik yang telah membimbing penulis selama mengikuti perkuliahan.
5. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, MA., Ph.D., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Bapak Drs. Suratman, M.Sc., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Ayah dan Ibu tercinta yang selalu mendoakan penulis, selalu memberi dukungan, dan kasih sayang yang tulus kepada penulis.
8. Adik-adik yang tersayang Bayu, Dita dan Aliya atas dukungan dan semangat untuk menyelesaikan skripsi ini.
9. Sahabat-sahabat penulis (Anggun, Liza, Dhenty, Ulfa, Wilda, Riza, Sindi, Rizka, Dastia, Birgita, dan Dian) atas dukungan dan persahabatan yang indah.
10. Teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2015, serta Keluarga HIMATIKA.
11. Teman-teman KKN Kebangsaan (Dina, Monica, Billah, Tasripin, Safei, dan Mila) yang selalu saling mendukung untuk menyelesaikan skripsi.
12. Seluruh pihak yang telah memotivasi, membantu, dan mendoakan penulis yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini memiliki ketidaksempurnaan. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi kita semua.

Bandar Lampung,   Juli 2019
Penulis,

Pipin Agustina
NPM. 1517031129

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Data runtun waktu (*time series*) adalah sekumpulan data berupa angka yang diperoleh dalam suatu periode waktu tertentu. Data runtun waktu (*time series*) biasanya berupa data tahunan, triwulan, bulanan, mingguan, harian, dan seterusnya. Analisis runtun waktu (*time series*) dapat menemukan bentuk atau pola variasi dari data di masa lampau dan menggunakan pengetahuan ini untuk melakukan peramalan terhadap sifat-sifat dari data di masa yang akan datang (Rosadi, 2011).

Beberapa model untuk data deret waktu (*time series*) telah dikembangkan, diantaranya yaitu *Exponential Smoothing, Autoregressive* (AR), *Moving Averag*e (MA), *Autoregressive Moving Average* (ARMA), dan *Autoregressive Integrated Moving Average* (ARIMA). Model-model tersebut sangat baik ketepatannya untuk peramalan jangka pendek (*short memory*). Sebaliknya, hasil peramalan akan cenderung konstan untuk data jangka panjang (*long memory)*, sehingga ketepatan hasil peramalannya kurang baik (Sowell, 1992). Data deret waktu mempunyai sifat ketergantungan jangka panjang (*long memory*) jika antara pengamatan yang terpisah masih mempunyai korelasi yang tinggi dan fungsi autokorelasi turun secara hiperbolik. Sedangkan data deret waktu mempunyai sifat ketergantungan jangka pendek (*short memory*) jika antara pengamatan yang terpisah mempunyai korelasi yang rendah atau tidak terdapat korelasi dan fungsi autokorelasi yang turun secara cepat atau secara eksponensial. Menurut Granger dan Joyeux (1980), model yang dapat mengatasi data deret waktu jangka panjang adalah model *Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average* (ARFIMA).

Model ARFIMA merupakan pengembangan dari model *Autoregressive Integrated Moving Average* (ARIMA). Kelebihan model ARFIMA diantaranya dapat memodelkan perubahan yang tinggi dalam jangka panjang (*long term persistence*), dapat menjelaskan struktur korelasi jangka panjang dan jangka pendek sekaligus, dan dapat memberikan model dengan parameter yang lebih sederhana baik untuk data jangka panjang maupun jangka pendek (Hosking, 1981). Penelitian mengenai penerapan ARFIMA untuk mengatasi efek *long memory* telah dilakukan sebelumnya oleh Doornik dan Ooms (1999) terhadap indeks harga konsumen di Amerika Serikat dan Inggris dengan estimasi parameter menggunakan metode *Exact Maximum Likelihood* (EML). Menurut Doornik dan Ooms (1999) ada beberapa metode estimasi parameter model ARFIMA yaitu *Geweke Porter-Hudak* (GPH), *Non linear Least square* (NLS), *Exact Maximum Likelihood* (EML) dan *Modified Profile Likelihood* (MPL).

Pendugaan parameter model ARFIMA dibagi menjadi tiga tahap yaitu tahap pertama dan kedua menduga parameter model AR dan model MA dengan menggunakan metode *Exact Maximum Likelihood* (EML) dan selanjutnya tahap ketiga menduga parameter pembeda (*d*) dengan menggunakan metode regresi spektral. Pendugaan parameter model AR dan MA dengan metode EML dilakukan dengan membentuk fungsi *log-likelihood* dari parameter model. Menurut Sowell (1992) pendugaan parameter pembeda fraksional (*d*) model ARFIMA dengan metode *Exact Maximum Likelihood* (EML) akan terkendala dalam menurunkan fungsi autokovarian dari model ARFIMA. Sehingga pada penelitian ini pendugaan parameter *d* dilakukan dengan metode regresi spektral.

Pendugaan parameter *d* dengan menggunakan metode regresi spektral pertama kali dikembangkan oleh Geweke dan Porter-Hudak (1983) yang disingkat dengan GPH. Pendugaan parameter *d* dengan metode GPH dilakukan dengan membentuk persamaan regresi linier dari fungsi densitas spektral model ARFIMA dan menduga parameter *d* melalui metode *Ordinary Least Square* (OLS). Metode ini mampu mengatasi kesulitan dalam menurunkan fungsi autokovarian dari model ARFIMA. Berdasarkan uraian tersebut, pada penelitian ini akan dibahas mengenai analisis data *time series* dengan menggunakan model *Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average* (ARFIMA) dengan metode pendugaan parameter *Exact Maximum Likelihood* (EML) dan Regresi Spektral. Selanjutnya metode ini akan diaplikasikan pada data harga emas di Indonesia.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah :

1. Mengkaji model *Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average* (ARFIMA) dengan metode pendugaan parameter *Exact Maximum Likelihood* (EML) dan Regresi Spektral.
2. Memodelkan dan meramalkan harga emas Indonesia dengan model ARFIMA.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah

1. Mengetahui tahap-tahapan analisis data runtun waktu dengan model ARFIMA.
2. Memperoleh model terbaik untuk meramalkan data harga emas di Indonesia.
3. Meramalkan harga emas di Indonesia pada masa yang akan datang dengan model ARFIMA.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Analisis Data Deret Waktu (*Time Series*)

Data yang dikumpulkan dari waktu ke waktu untuk menggambarkan suatu perkembangan atau kecenderungan keadaan atau peristiwa (perkembangan produksi, harga, hasil penjualan, jumlah penduduk, jumlah kecelakaan, jumlah kejahatan dan sebagainya disebut data deret waktu. Data deret waktu sering disebut data *time series*. Analisis data deret waktu (*time series*) sangat berguna untuk mengetahui perkembangan satu atau beberapa keadaan serta hubungan terhadap keadaan lain. Artinya apakah suatu keadaan mempunyai hubungan terhadap keadaan yang lain atau apakah suatu keadaan mempunyai pengaruh yang besar terhadap keadaan yang lain (Makridakis, dkk., 1999).

1. Data Runtun Waktu

   Data runtun waktu adalah kumpulan nilai-nilai pengamatan dari suatu variabel yang diambil pada waktu yang berbeda. Data jenis ini dikumpulkan pada interval waktu tertentu, misalnya harian, mingguan, bulanan, dan tahunan.

2. Data *Cross-section*

   Data *cross-section* adalah data dari satu variabel atau lebih yang dikumpulkan pada waktu tertentu secara bersamaan.

3. Data Panel

   Data panel adalah data yang elemen-elemennya merupakan kombinasi dari data runtun waktu dan data *cross-section*.

2.2 Proses Jangka Panjang dan Jangka Pendek Data Runtun Waktu

Menurut Hosking (1981), proses ARMA sering dinyatakan sebagai proses memori jangka pendek (*short memory*) karena autokorelasi antara X_t dan X_{t+k} turun sangat cepat untuk k→∞. Dalam kasus-kasus tertentu, autokorelasi turun secara lambat menuju nol untuk *lag* yang semakin besar. Hal ini menunjukkan masih ada hubungan antara pengamatan yang jauh terpisah atau memiliki ketergantungan jangka panjang.

Suatu proses stasioner dengan fungsi autokorelasi ρ_k dikatakan sebagai proses memori jangka panjang jika $\lim_{t \to \infty} \sum_{k=1}^{t} |\rho_k|$ tidak konvergen. Penyelidikan terhadap proses memori dapat diamati pada fungsi autokorelasi. Deret berkala X_t dikatakan mengikuti proses memori jangka pendek jika

$$\lim_{t \to \infty} \sum_{k=1}^{t} |\rho_k| < \infty$$

yang ditandai dengan fungsi autokorelasi yang turun secara cepat, dan akan mengikuti proses memori jangka panjang jika

$$\lim_{t \to \infty} \sum_{k=1}^{t} |\rho_k| = \infty$$

yang ditandai dengan fungsi autokorelasi yang turun secara perlahan menuju nol. Dimana ρ_k adalah fungsi autokorelasi pada lag ke k.

2.3 Stasioneritas

Stasioner berarti bahwa tidak terdapat perubahan drastis pada data, yaitu rata-rata dan ragamnya konstan dari waktu ke waktu. Stasioneritas dibagi menjadi 2 yaitu:

1. Stasioner dalam rata-rata

   Stasioner dalam rata-rata adalah fluktuasi data berada di sekitar suatu nilai rata-rata yang konstan, tidak bergantung pada waktu dan variansi dari fluktuasi tersebut. Dari bentuk plot data seringkali dapat diketahui bahwa data tersebut stasioner atau tidak stasioner. Apabila dilihat dari plot ACF (*Autocorrelation Function*), maka nilai-nilai autokorelasi dari stasioner akan turun menuju nol sesudah time *lag* (selisih waktu) kelima atau keenam.

2. Stasioner dalam variansi

   Sebuah data runtun waktu dikatakan stasioner dalam variansi apabila struktur dari waktu ke waktu mempunyai fluktuasi data yang tetap atau konstan dan tidak berubah-ubah. Secara visual untuk melihat hal tersebut dapat dibantu dengan menggunakan plot runtun waktu, yaitu dengan melihat fluktuasi data dari waktu ke waktu (Wei, 2006).

2.4 *Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average* (ARFIMA)

Menurut Granger dan Joyeux (1980), model *Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average* (ARFIMA) merupakan pengembangan dari model *Autoregressive Integrated Moving Average* (ARIMA). Model ARFIMA merupakan model data deret waktu ketergantungan jangka panjang, dengan parameter pembeda (*d*) berbentuk bilangan riil, ini berbeda dengan model ARIMA yang mempunyai parameter pembeda (*d*) berupa bilangan bulat.

2.4.1 Model *Autoregressive* AR (*p*)

Menurut Montgomery, dkk (2008), bentuk umum orde ke-p model *Autoregressive* adalah:

$$X_t = \delta + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t \ ; \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \qquad (2.1)$$

dimana ε_t dikatakan *white noise* jika $E(X_t) = \mu$ dan $\widetilde{X_t} = X_t - \mu$. Model AR (*p*) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\widetilde{X_t} = \phi_1 \tilde{X}_{t-1} + \phi_2 \tilde{X}_{t-2} + \cdots + \phi_p \tilde{X}_{t-p},$$

dengan μ dan $(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p)$ adalah parameter dari model AR (*p*).

2.4.2 Model *Moving Average* MA (*q*)

Menurut Montgomery, dkk (2008), model *Moving Average* dengan orde q dinotasikan MA (*q*) didefinisikan sebagai:

$$X_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \theta_3\, \varepsilon_{t-3} - \cdots - \theta_q\, \varepsilon_{t-q} \ ; \ \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \qquad (2.2)$$

dengan:

X_t : nilai variabel pada waktu ke-t

ε_t : nilai error pada waktu t

θ_i : parameter MA (*q*)

q : orde MA

2.4.3 Model *Autoregressive Moving Average* (ARMA) (*p,q*)

Menurut Wei (2006), bentuk umum model *Autoregressive Moving Average* atau ARMA (*p,q*) diberikan sebagai berikut:

$$x_t = \delta + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

$$= \delta + \sum_{i=1}^{p} \phi_i \, x_{t-i} + \varepsilon_t - \sum_{i=1}^{q} \theta_i \; \varepsilon_{t-i} \qquad (2.3)$$

dengan:

x_t : nilai variabel pada waktu ke-*t*

ϕ_i : parameter AR (*p*) ke-i, i$= 1, 2, 3, \dots, p$

p : order AR

θ_i : parameter model *MA* ke-i, $i = 1, 2, 3, \dots, q$

q : order MA

ε_t : nilai *error* pada waktu ke-t (pada saat $t, t-1, t-2, \dots, t-q$)

q dan ε_t diasumsikan *White Noise* dan normal.

2.4.4 Model *Autoregressive Integrated Moving Average* (ARIMA) (*p,d,q*)

Menurut Makridakis, dkk (1999), model ARIMA pertama kali diperkenalkan oleh Box-Jenkins pada tahun 1970. Bentuk umum ARIMA (*p,d,q*) adalah:

$$\{\varepsilon_t\} \sim IIDN(0, \sigma^2)$$

$$\phi\,(B)(1-B)^d \, x_t = \theta_0 + \theta\,(B)\varepsilon_t \qquad (2.4)$$

dengan:

$\phi\,(B\,)$: operator *autoregressive*

$\phi\ (B)(1-B)^d$: operator *generalized autoregressive* non stasioner

$\theta\ (B)$: operator *moving average* yang diasumsikan *invertible*

Menurut Brockwell dan Davis (2002), apabila pola data stasioner terhadap *mean* tidak dipenuhi maka perlu dilakukan suatu cara untuk membuat menjadi stasioner. Runtun waktu yang tak stasioner dapat diubah menjadi stasioner dengan melakukan pembedaan. Secara umum proses pembedaan pada suatu data runtun waktu dengan orde *d* dapat ditulis:

$$Wt\ =\ (1\ -\ B)d\ Xt \qquad ;\ d=1{,}2,\ldots,n$$

Proses pembedaan orde pertama dapat ditulis:

$$Wt\ =\ (1\ -\ B)1\ Xt\ =\ Xt\ -\ Xt-1$$

dengan:

Xt : observasi pada waktu ke-t , $t\ =\ 1{,}2,\ldots,n$

$Xt-1$: observasi pada satu periode sebelumnya $(t-1)$

W_t : data setelah pembedaan

Apabila pola data stasioner dalam varians tidak dipenuhi, maka dapat dilakukan transformasi data untuk menstasionerkan datanya.

2.4.5 Fungsi Autokorelasi dan Fungsi Autokorelasi Parsial

Fungsi autokorelasi (ACF) dan fungsi autokorelasi parsial (PACF) merupakan fungsi yang berperan pada pendugaan parameter model ARIMA dan ARFIMA.

a) Fungsi Autokorelasi (ACF)

Menurut Wei (2006), autokorelasi adalah ketergantungan antara nilai-nilai suatu data deret waktu yang sama pada periode waktu yang berlainan yang digunakan untuk menentukan koefisien korelasi pada deret waktu. Autokorelasi pada $lag - k\ (\rho_k)$ merupakan korelasi pada data deret waktu antara pengamatan X_t dan X_{t+k}. Pada (X_t) yang stasioner, $E\ (X_t) = \mu$ dan $Var\ (X_t)$ = $E\ (X_t\ -\ \mu)^2\ =\ \sigma^2$ yang konstan dan $Cov\ (X_t, X_{t+k})$ yang fungsinya hanya pada perbedaan waktu $\left|t-\ (t-k)\right|$. Oleh karena itu, hasil tersebut dapat ditulis sebagai kovariansi antara X_t dan X_{t+k} sebagai berikut:

$$\gamma =\ Cov\ (X_t, X_{t+k})\ =\ E\ (X_t\ -\ \mu)(X_{t+k}\ -\ \mu)$$

dan korelasi antara X_t dan X_{t+k} didefinisikan sebagai:

$$\rho_k = \frac{\mathrm{E}\ [(\mathrm{X}_t - \mu)(\mathrm{X}_{t+k} - \mu)]}{\sqrt{\mathrm{E}\ [(\mathrm{X}_t - \mu)^2 . \mathrm{E}(\mathrm{X}_{t+k} - \mu)^2]}} = \frac{\mathrm{Cov}\ (\mathrm{X}_t, \mathrm{X}_{t+k})}{\sqrt{var\ (\mathrm{X}_t)}\ var(\mathrm{X}_{t+k}\ )} = \left|\ \frac{\gamma_k}{\gamma_0}\right| \qquad (2.5)$$

dengan $Var\ (x_t) = Var\ (x_{t+k}) =\ \gamma_0$. Sebagai fungsi dari k, γ_k disebut fungsi autokorelasi dan ρ_k disebut fungsi autokorelasi (ACF). Dalam analisis runtun waktu γ_k dan ρ_k menggambarkan kovarian dan korelasi antara X_t dan X_{t+k} dari proses yang sama dan hanya dipisahkan oleh *lag-k*. Fungsi autokovariansi γ_k dan fungsi autokorelasi ρ_k memiliki sifat-sifat sebagai berikut :

1. γ_0= $Var\ (X_t)$; ρ_0= 1

Bukti :

Dengan menggunakan definisi korelasi antara X_t dan X_{t+k} akan dibuktikan bahwa γ_0= $Var\ (X_t)$ dimana ρ_0= 1 dan $k = 0$

$$\rho_k =\ \frac{\mathrm{Cov}\ (\mathrm{X}_t, \mathrm{X}_{t+k})}{\sqrt{var(X_t)\ var(\mathrm{X}_{t+k}\ )}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

maka:

$$\rho_0 = \frac{\text{Cov}\ (\text{X}_t, \text{X}_{t+0})}{\sqrt{var(X_t)\ var(\text{X}_{t+0}\ )}}$$

$$\rho_0 = \frac{\text{Cov}\ (\text{X}_t, \text{X}_t)}{\sqrt{var(X_t)\ var(\text{X}_t\ )}}$$

$$\rho_0 = \frac{\text{Var}\ (\text{X}_t)}{\sqrt{var^2(X_t)}}$$

$$\rho_0 = \frac{\text{Var}\ (\text{X}_t)}{\text{Var}\ (\text{X}_t)} = \frac{\gamma_0}{\gamma_0}$$

$$\rho_0 = 1$$

2. $|\gamma_k| \leq \gamma_0$; $|\rho_k| \leq 1$

Bukti :

Sifat kedua merupakan akibat dari persamaan autokorelasi kurang dari atau sama dengan 1 dalam nilai mutlak.

3. $\gamma_k = y - k$ dan $\rho_k = \rho - k$ untuk semua k dimana $\gamma_k$dan ρ_k adalah fungsi yang sama dan simetrik *lag k* = 0.

Bukti :

Sifat tersebut diperoleh dari perbedaan waktu antara X_t dan X_{t+k}. Oleh sebab itu, fungsi autokorelasi sering digunakan untuk memplotkan *lag* non-negatif. Plot ACF dan PACF disebut juga dengan *korrelogram* (Wei, 2006).

b) Fungsi Autokorelasi Parsial (PACF)

Autokorelasi parsial digunakan untuk mengukur tingkat keeratan antara X_t dan X_{t+k} apabila pengaruh dari waktu *lag k* dianggap terpisah. Ada beberapa prosedur untuk menentukan bentuk PACF yang salah satunya akan dijelaskan sebagai berikut:

$$\phi_{kk} = Corr\ (X_t, X_{t+1}, X_{t+2}, X_{t+3}, \ldots, X_{t+k}) \tag{2.6}$$

misalkan X_t adalah proses yang stasioner dengan $E(X_t) = 0$, selanjutnya X_{t+k} dapat dinyatakan sebagai model linear

$$X_{t+k} = \phi_{k1}X_{t+k-1} + \phi_{k2}X_{t+k-2} + \cdots + \phi_{kk}X_t + \varepsilon_{t+k} \tag{2.7}$$

dengan ϕ_{ki} adalah parameter regresi ke-*i* dan ε_{t+k} adalah nilai kesalahan yang tidak berkorelasi dengan X_{t+k-j} dimana *j=1,2, ... , k*. Langkah pertama yang dilakukan untuk mendapatkan nilai PACF adalah mengalikan persamaan (2.7) dengan X_{t+k-j} pada kedua ruas sehingga diperoleh :

$$X_{t+k-j}X_{t+k} = \phi_{k1}X_{t+k-1}X_{t+k-j} + \phi_{k2}X_{t+k-2}X_{t+k-j} + \cdots + \phi_{kk}X_tX_{t+k-j} + \varepsilon_{t+k}\,X_{t+k-j}$$

Selanjutnya nilai harapannya adalah:

$$E(X_{t+k-j}X_{t+k}) = E(\phi_{k1}X_{t+k-1}X_{t+k-j} + \phi_{k2}X_{t+k-2}X_{t+k-j} + \cdots + \phi_{kk}X_tX_{t+k-j} + \varepsilon_{t+k}\,X_{t+k-j})$$

Dimisalkan nilai $E(X_{t+k-j}X_{t+k}) = \gamma_j$, $j = 0,1,\ldots,k$ dan $E(\varepsilon_{t+k}\,X_{t+k-j}) = 0$, maka diperoleh:

$$\gamma_j = \phi_{k1}\gamma_{j-1} + \phi_{k2}\gamma_{j-2} + \cdots + \phi_{kk}\gamma_{j-k} \tag{2.8}$$

Persamaan (2.8) dibagi dengan γ_0 sehingga:

$$\frac{\gamma_j}{\gamma_0} = \phi_{k1}\frac{\gamma_{j-1}}{\gamma_0} + \phi_{k2}\frac{\gamma_{j-2}}{\gamma_0} + \cdots + \phi_{kk}\frac{\gamma_{j-k}}{\gamma_0}$$

maka diperoleh:

$$\rho_j = \phi_{k1}\rho_{j-1} + \phi_{k2}\rho_{j-2} + \cdots + \phi_{kk}\rho_{j-k}$$

untuk $j = 1, 2, 3, \ldots, k$ didapatkan sistem persamaan sebagai berikut :

$\rho_1 = \phi_{k1}\rho_0 + \phi_{k2}\rho_1 + \cdots + \phi_{kk}\rho_{k-1},$

$\rho_2 = \phi_{k1}\rho_1 + \phi_{k2}\rho_0 + \cdots + \phi_{kk}\rho_{k-2},$

$\vdots$

$$\rho_k = \phi_{k1}\rho_{k-1} + \phi_{k2}\rho_{k-2} + \cdots + \phi_{kk}\rho_0 \qquad (2.9)$$

Sehingga didapatkan fungsi autokorelasi parsial sebagai berikut

$$\phi_{kk} = \frac{\rho_k - \sum_{j=1}^{k-1}\phi_{k-1,j}\rho_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1}\phi_{k-1,j}\rho_j}$$

dimana $\phi_{kj} = \phi_{k-1,j} - \phi_{kk}\phi_{k-1,h-j}$

2.4.6 *Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average* (ARFIMA)

Suatu proses stasioneritas dengan fungsi autokorelasi ρ_k dikatakan sebagai proses memori jangka panjang jika $\mathrm{Lim}_{t\to\infty}\sum_{k=1}^{t}|\rho_k| = \infty$. ARFIMA merupakan pengembangan dari model ARIMA dengan nilai *d* berupa bilangan riil yang disebabkan oleh adanya memori jangka panjang. Model ARFIMA dapat ditulis sebagai berikut:

$$\phi\,(B)(1-B)^d\,X_t = \theta\,(B)\varepsilon_t \qquad ;\ t = 1,2,\dots,T \tag{2.10}$$

dengan :

t : indeks dari pengamatan

d : parameter pembeda (bilangan pecahan)

$\varepsilon_t \sim$ IIDN (0, σ_ε^2)

$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p$ adalah polinomial AR (p)

$\theta(B) = 1 - \sum_{i=1}^{q} \theta_i B^i$ adalah polinomial MA (q)

$(1-B)^d = \Delta^d = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{dk}{k} (k) - 1$ operator pembeda pecahan

Menurut Granger dan Joyeux (1980), filter pembeda $(1-B)^d$ pada persamaan (2.10) disebut *Long Memory Filter* (LMF) yang menggambarkan adanya ketergantungan jangka panjang dalam deret. Filter ini diekspansikan sebagai deret binomial.

$$(1-B)^d = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{d}{J} \left(-B^j\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j \tag{2.11}$$

$$(1-B)^d = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j\ \varepsilon_t$$

dimana:

$$\psi_j = \binom{d}{J}$$

$$= \frac{d!}{(d-j)!\,j!}$$

$$= \frac{\Gamma(d+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(d-j+1)} \tag{2.12}$$

dan Γ(x) merupakan fungsi gamma. Bila persamaan (2.12) dijabarkan maka untuk $j = 0$ diperoleh $\frac{(d)!}{(d-0)0!} = 1$, untuk $j = 1$ diperoleh $\frac{(d)!}{(d-1)!1!} = d$, untuk $j = 2$ diperoleh $\frac{(d)!}{(d-2)!2!} = \frac{d(d-1)}{2}$, untuk $j = 3$ diperoleh $\frac{(d)!}{(d-3)!3!} = \frac{d(d-1)(d-2)}{6}$, dan seterusnya sedemikian sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
\psi_j &= (1-B)^d \\
&= \binom{d}{0}(-1)^0 B^0 + \binom{d}{1}(-1)^1 B^1 + \binom{d}{2}(-1)^2 B^2 + \cdots \\
&= \frac{(d)!}{(d-0)0!} B^0 - \frac{(d)!}{(d-1)!1!} B^1 - \frac{(d)!}{(d-2)!2!} B^2 + \cdots \\
&= 1 - dB + \frac{1}{2}(d-1)dB^2 - \frac{1}{6}(d-1)(d-2)dB^3 + \cdots \\
&= 1 - dB - \frac{1}{2}(1-d)dB^2 - \frac{1}{6}(1-d)(2-d)dB^3 + \cdots
\end{aligned}$$

Menurut Hosking (1981), karakteristik deret yang *fractionally integrated* untuk berbagai nilai *d* adalah:

1. $|d| \geq ½$ menyatakan proses panjang dan tidak stasioner.
2. $0 < d < \frac{1}{2}$ menyatakan proses berkorelasi panjang stasioner dengan adanya ketergantungan positif antara pengamatan yang terpisah jauh yang ditunjukkan dengan autokorelasi positif dan turun lambat dan mempunyai representasi *moving average* orde tak hingga.
3. $-\frac{1}{2} < d < 0$ menyatakan proses berkorelasi panjang stasioner dengan memiliki ketergantungan negatif yang ditandai dengan autokorelasi negatif dan turun lambat serta mempunyai representasi *autoregressive* orde tak hingga.
4. $d = 0$ menyatakan proses berkorelasi pendek.

2.5 Metode Penduga Parameter Model ARFIMA

Menurut Doornik dan Ooms (1999), ada beberapa metode estimasi parameter model ARFIMA antara lain *Geweke dan Porter Hudak* (GPH), *Non Linear Least Square* (NLS), *Exact Maximum Likelihood* (EML) dan *Modified Profile Likelihood* (MPL). Parameter model ARFIMA terbagi menjadi tiga yaitu parameter AR (*p*), MA(*q*) dan parameter pembeda (*d*).

1. Penduga parameter model *Autoregressive* AR (p)

Menurut Doornik dan Ooms (1999), Salah satu metode pendugaan parameter yang digunakan untuk menduga parameter model AR (p) dan MA (q) adalah metode *exact maximum likelihood*. Metode *exact maximum likelihood* atau *maximum likelihood* digunakan dalam pendugaan parameter karena semua informasi yang tersedia dalam data dapat digunakan dan hal ini lebih baik dari sekedar momen pertama dan kedua.

Fungsi Autokorelasi dari proses AR stasioner yaitu :

$$\tilde{X}_t = \phi_1\tilde{X}_{t-1} + \phi_2\tilde{X}_{t-2} + \cdots + \phi_p\tilde{X}_{t-p} + \varepsilon_t \quad (2.13)$$

Karena $\tilde{X}_t = X_t - \mu$, persamaan (2.13) dapat ditulis juga sebagai berikut :

$$X_t - \mu = \phi_1(X_{t-1} - \mu) + \phi_2(X_{t-2} - \mu) + \cdots + \phi_p(X_{t-p} - \mu) + \varepsilon_t \quad (2.14)$$

Sehingga jumlah kuadrat residual pada persamaan (2.14) adalah :

$$S\left(\mu, \phi_1, \ldots, \phi_p\right) = \sum_{t=p+1}^{n} \varepsilon_t^2 = \sum_{t=p+1}^{n} [\,(X_t - \mu) + \phi_1(X_{t-1} - \mu) + \cdots + \phi_p(X_{t-p} - \mu)]^2 \quad (2.15)$$

Proses *white noise* (ε_t) merupakan deret dari peubah acak yang saling bebas dan mengikuti distribusi tertentu yang *identic* dengan E (ε_t) = 0 serta Var (ε_t) = σ^2, sehingga fungsi kepekatan peluang dari (ε_t) adalah:

$$f(\varepsilon_t \,|\mu, \phi, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\varepsilon_t^2}{2\sigma^2}} \quad (2.16)$$

dan fungsi kemungkinan dari $\boldsymbol{\varepsilon}$ = ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_t$) adalah :

$$\mathrm{L}(\mu, \phi, \sigma^2 |\, \varepsilon) = \prod_{t=1}^{n} f(\varepsilon_t |\mu, \phi, \sigma^2) = (2\pi\,\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2\right] \quad (2.17)$$

Logaritma natural dari fungsi kemungkinan di atas adalah :

$$\ln\ \mathrm{L}\,(\mu, \phi, \sigma^2 |\, \varepsilon) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{S(\mu, \phi_1, \ldots, \phi_p)}{2\sigma^2} \quad (2.18)$$

Bila di perhatikan, parameter $\mu, \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p$ hanya dimuat pada jumlah kuadrat residual $S(\mu, \phi_1, \ldots, \phi_p)$ sehingga fungsi ln L $(\mu, \phi, \sigma^2 |\, \varepsilon)$ akan maksimum jika $S(\mu, \phi_1, \ldots, \phi_p)$ minimum. Sehingga penduga parameter $\mu, \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p$ dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan (2.19) dan (2.20).

$$\frac{\partial}{\partial\mu} S(\mu, \phi_1, \ldots, \phi_p) = 0 \quad (2.19)$$

Penyelesaian dari persamaan (2.19) akan diperoleh $\hat{\mu} = \bar{X}$.

$$\frac{\partial}{\partial\phi_i}\, s\big(\mu, \phi_1, \ldots, \phi_p\big) = 0 \quad (2.20)$$

Penyelesaian dari persamaan (2.20) terhadap $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p$ akan diperoleh penduga sistem persamaan *Yule Walker* sehingga diperoleh penduga AR (p) dengan metode *Exact Maximum Likelihood* (EML) adalah :

$\hat{\phi}_1 = \frac{\hat{\rho}_1 - \hat{\rho}_1\hat{\rho}_2}{1 - \hat{\rho}_1{}^2}$ dan $\hat{\phi}_2 = \frac{\hat{\rho}_2 - \hat{\rho}_1{}^2}{1 - \hat{\rho}_1{}^2}$, dimana $\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0} = \frac{\sum_{t=h+1}^{n}(\mathrm{Xt} - \bar{X})(\mathrm{Xt+k} - \bar{X})]}{\sum_{t=1}^{n}(\mathrm{Xt} - \bar{X})^2}$.

2. Penduga parameter *Moving Average* MA (q)

Fungsi autokorelasi dari proses MA (q) adalah :

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \theta_3 \varepsilon_{t-3} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \qquad \varepsilon_t \sim N(\mu, \sigma^2) \quad (2.21)$$

Model parameter MA (q) berbeda dengan model AR (p) karena model MA bersifat non-linear sehingga tidak dapat dilakukan secara analitik / kalkulus karena bersifat nonlinear.

Model MA (q) yang *invertible* dapat dituliskan menjadi :

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \theta_3 \varepsilon_{t-3} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

$$X_t = -\theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \theta_3 \varepsilon_{t-3} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t$$

Penduga bagi θ bernilai riil dan *invertible* bila $|\rho_1| < 0.5$. Sehingga solusi dari penduga $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ diperoleh dengan cara iteratif atau meminimumkan jumlah kuadrat residual dari model MA yang dihasilkan melalui algoritma optimisasi numeris seperti Algoritma Marquardt. Penduga parameter MA (q) yaitu :

$$\hat{\rho}_1 = \frac{\hat{\theta}}{1 + \hat{\theta}^2}$$

3. Penduga parameter pembeda (d) model ARFIMA

Pendugaan parameter *long memory* dengan metode regresi spektral untuk parameter pembeda (d) diusulkan oleh (GPH) Geweke dan Porter-Hudak (1983). Tahapan pada metode GPH adalah menentukan nilai frekuensi harmonik untuk tiap observasi .

$$\omega_j = \left(\frac{2\pi j}{T}\right), \quad j = 1,2,\dots,n \qquad (2.22)$$

Tahap selanjutnya adalah menentukan nilai periodogram dengan menggunakan metode GPH, yang bentuk periodogramnya ditentukan dengan persamaan sebagai berikut:

$$I_Z(\omega_j) = \frac{1}{2\pi}\left\{\gamma_0 + 2\sum_{t=1}^{T-1}\gamma_t \cos(t, \omega_j)\right\} \quad (2.23)$$

dengan $\omega_j \epsilon (-\pi, \pi)$ dimana γ_{t} adalah nilai autokorelasi dari lag ke-t. Kemudian nilai dari logaritma natural periodogram dijadikan sebagai peubah respon Y_{j} untuk regresi spektral.

$$Y_j = \ln\{I_z(\omega_j)\} \quad (2.24)$$

Selanjutnya, peubah penjelasnya ditentukan dari persamaan berikut :

$$X_j = \ln|1 - \exp(-i\omega_j)|^{-2} \quad (2.25)$$

Sehingga dengan menggunakan persamaan regresi linier dengan persamaan :

$$Y_j = \beta_0 + \beta_1 X_j + \varepsilon_j \quad (2.26)$$

Nilai dugaan parameter *d* dapat ditentukan dengan menggunakan metode *Ordinary least square* seperti pada persamaan berikut :

$$\hat{\beta}_1 = \hat{d} = \frac{\sum_{j=1}^{n}(X_j - \bar{X})(Y_j - \bar{Y})}{\sum_{j=1}^{n}(X_j - \bar{X})^2}$$

2.6 Uji Signifikansi Parameter

Menurut Rosadi (2011), uji ini digunakan untuk mengetahui apakah parameter AR (*p*), *differencing* (*d*), MA (*q*), signifikan atau tidak. Jika parameter tersebut signifikan mempengaruhi model data, maka model layak digunakan. Berikut ini adalah uji signifikan parameter:

H_0 : ∅ = 0 (parameter tidak signifikan)

H_1 : $\emptyset \neq 0$ (parameter signifikan)

Tingkat signifikan α = 5% dan uji statistik:

$$z_{hitung} = \frac{\hat{\rho}_k}{SE_{(\hat{\rho}_k)}}$$

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k}(Z_t - \bar{Z})(Z_{t+k} - \bar{Z})}{\sum_{t=1}^{n}(Z_t - \bar{Z})^2}$$

$$SE_{(\hat{\rho}_k)} = \sqrt{\frac{1 + 2\sum_{i=1}^{i-1}\hat{\rho}_i^2}{n}}$$

Adapun kriteria pengambilan keputusan yaitu:

H_0 ditolak jika $p_{value} < \alpha = 0.05$ artinya parameter signifikan

H_0 tidak ditolak jika $p_{value} > \alpha = 0.05$ artinya parameter tidak signifikan.

2.7 Uji Residual Model

Setelah mendapatkan model yang signifikan dilakukan uji residual model terhadap model yang telah diperoleh. Uji yang dilakukan adalah uji *white noise* dan *normality test* terhadap residual.

2.7.1 Uji *White Noise*

Menurut Wei (2006), suatu proses ε_t disebut proses *white noise* jika deret data terdiri dari peubah acak yang tidak berkorelasi dan berdistribusi normal dengan E(ε_t) = 0 dan var (ε_t) = σ^2. Proses *white noise* dapat dideteksi menggunakan uji autokorelasi residual pada analisis galatnya. Uji korelasi residual digunakan untuk mendektesi ada tidaknya korelasi residual antar *lag*. Residual pada pemodelan data *time series* harus memenuhi asumsi saling bebas. Uji statistik yang dapat digunakan untuk mendeteksi adanya autokorelasi adalah uji *Ljung Box-Pierce*:

H₀ : $\rho_k = 0$ (Tidak ada autokorelasi antar residual)

H₁ : $\rho_k \neq 0$ (Terdapat autokorelasi antar residual)

Statistik uji Ljung-Box adalah:

$$Q_{LB} = n(n+2)\sum_{t=1}^{K}\frac{{r^2}_t}{n-t} \tag{2.27}$$

dengan:

n : banyaknya amatan

$\hat{r}_t^2$: korelasi sisaan pada lag ke- t+k

K : besarnya lag pada pengujian

Kriteria pengujian H_0 ditolak ketika $Q_{LB} > \chi^2_{(K-p-q)}$ atau nilai p-$Q_{LB} < \alpha$.

2.7.2 Uji Normalitas

Menurut Gujarati dan Porter (1980), untuk melihat kenormalan residual dapat dilihat pada probabilitas statistik *Jarque Bera* yang ditunjukkan histogram. Hipotesis untuk pengujian ini adalah :

H_0 = Residual tidak berdistribusi normal

H_1 = Residual berdistribusi normal

Uji statistik :

$$JB = n\frac{S^2}{6} + \frac{(K-3)^2}{4}$$

$$S = \frac{\frac{1}{T}\sum_1^T (x_t - \bar{x})^2}{(\frac{1}{T}\sum_1^T (x_t - \bar{x})^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$K = \frac{\frac{1}{T}\sum_{1}^{T}(x_t - \bar{x})^4}{(\frac{1}{T}\sum_{1}^{T}(x_t - \bar{x})^2)^2}$$

Keterangan:

x_t : residual data pada waktu ke –t

T : banyaknya observasi

S : *skewness*

K : kurtosis

Kriteria pengujian yang digunakan yaitu H_0 ditolak ketika $p_{value} < \alpha$.

2.8 Pemilihan Model Terbaik

Menurut Kirchgasser dan Wolters (2007), suatu model setelah diidentifikasi memungkinkan terbentuknya lebih dari satu model yang sesuai. Kriteria pemilihan model terbaik pada analisis *time series* didasarkan pada statistik yang diperoleh dari nilai residual yaitu:

1. *Akaike Information Criterion* (AIC)

$$AIC = ln\ \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}({\varepsilon_t}^{(p)})^2 + m\ \frac{2}{T} \tag{2.28}$$

2. *Bayesian Criterion of Gideon Schwarz*

$$SC = \ln\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}({\varepsilon_t}^{(p)})^2 + m\ \frac{lnT}{T} \tag{2.29}$$

3. Hannan-Quinn *Criterion*

$$HQ = \ln\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}({\varepsilon_t}^{(p)})^2 + m\ \frac{2ln(lnT)}{T} \tag{2.30}$$

dimana ε_t adalah nilai residual.

2.9 Kriteria Kebaikan Model pada Data Validasi

Menurut Makridakis, dkk (1999), kriteria kebaikan model pada data validasi terdiri dari kriteria *Root Mean Square Error* (RMSE) dan *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE) yang mengikuti persamaan berikut :

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} {e_t}^2} \tag{2.31}$$

$$MAPE = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left|\frac{e_t}{y_t}\right| \tag{2.32}$$

dengan:

e_t : $y_{t+1} - y_t(l)$

n : Jumlah pengamatan data validasi

y_{t+1} : Nilai data aktual pada ramalan ke-t.

III. METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian dilakukan di Semester Genap Tahun Ajaran 2018/2019 yang bertempat di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Data Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder. Data penelitian ini merupakan data *time series*, yaitu data harga emas di Indonesia yang diperoleh dari *http://harga-emas.org/history-harga/*. Data yang sudah terkumpul dibagi menjadi dua yaitu data pemodelan dan data validasi. Data pemodelan digunakan untuk membentuk model sesuai dengan metode yang digunakan. Model-model tersebut digunakan untuk meramalkan pergerakan ke depan sebanyak jumlah data validasi. Hasil ramalan dibandingkan dengan data sebenarnya dari data validasi. Data validasi hanya digunakan untuk menguji seberapa bagus model yang dibangun. Data harian harga emas Indonesia berjumlah 280 data, terhitung dari mulai 3 Juni 2018 sampai 9 Maret 2019 dan 30 data validasi terhitung dari mulai 1 April 2019 sampai 30 April 2019.

3.3 Metode Penelitian

Penelitian ini akan mengkaji model *Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average* (ARFIMA) dalam analisis data *time series* harga emas Indonesia dengan pendugaan parameter model ARFIMA dilakukan tiga tahap yaitu tahap pertama dan kedua parameter model AR dan model MA diduga dengan metode *Exact Maximum Likelihood* (EML) dan tahap ketiga parameter pembeda *d* diduga dengan metode Regresi Spektral.

Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Pengujian *Long Memory*

   Long Memory pada data dapat dilihat dari plot ACF yang autokorelasinya turun lambat secara hiperbolik dengan *software* R.

2. Pembentukan Model ARFIMA

   Model ARFIMA diperoleh dengan cara sebagai berikut :

   a. Menduga parameter *d* dengan menggunakan metode Regresi Spektral yang diusulkan oleh Geweke dan Porter-Hudak (GPH), pertama membentuk fungsi densitas spektral dari model ARFIMA, selanjutnya membentuk persamaan regresi linier dan menduga parameter *d* melalui metode *Ordinary Least Square* (OLS).

   b. Penetapan beberapa model ARFIMA (p, d, q) berdasarkan plot ACF dan plot PACF.

   c. Pendugaan parameter model AR (*p*) dan MA (*q*) menggunakan metode *Exact Maximum Likelihood* (EML).

d. Pengujian signifikansi model

Uji signifikansi parameter model dapat dilihat dari nilai p_{value} dengan statistik uji Z_{hitung}.

e. Pengujian residual model

Pada pengujian diagnostik ini dilakukan analisis nilai residual. Model dikatakan memadai jika nilai residual ε_t adalah *white noise*. Selain itu nilai residual ε_t juga harus memenuhi asumsi distribusi normal.

f. Pemilihan model terbaik berdasarkan kriteria AIC (*Akaike Information Criterion*), BC (*Bayesian Criterion of Gideon Schwarz*), dan HQ (*Hannan-Quinn Criterion*).

3. Melakukan peramalan harga emas Indonesia untuk periode selanjutnya dengan menggunakan model ARFIMA.

V. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada penelitian ini dapat diambil kesimpulan yaitu:

1. Penduga parameter *d* model ARFIMA dengan metode Geweke dan Porter-Hudak (GPH) atau Regresi Spektral adalah :

   $$\ln\{I_z(\omega_j)\} = \ln\{f_w(0)\} + d\ln|1-\exp(-i\omega_j)|^{-2} + \ln\left\{\frac{f_w(\omega_j)}{f_w(0)}\right\} + \ln\left\{\frac{I_Z(\omega_j)}{I_Z(\omega_j)}\right\}$$

   Persamaan tersebut diselesaikan dengan persamaan regresi, sehingga di dapat penduga parameter *d* dengan metode *Ordinary Least Square* (OLS) adalah :

   $$\hat{\beta}_1 = \hat{d} = \frac{\sum_{j=1}^{m}(X_j - \bar{X})(Y_j - \bar{Y})}{\sum_{j=1}^{m}(X_j - \bar{X})^2}$$

2. Penduga parameter untuk ϕ_1 dari AR (1) dengan metode *Exact Likelihood Estimation* (EML) adalah:

   $$\hat{\phi}_1 = \frac{\hat{\rho}_1 - \hat{\rho}_1\hat{\rho}_2}{1 - \hat{\rho}_1{}^2}$$

   dimana

   $$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0} = \frac{\sum_{t=h+1}^{n}(\mathrm{Xt} - \bar{X})\,(\mathrm{Xt} + \mathrm{k} - \bar{X})]}{\sum_{t=1}^{n}(\mathrm{Xt} - \bar{X})^2}$$

3. Penduga parameter untuk θ_1 dari MA (1) dengan metode *Exact Likelihood Estimation* (EML) adalah:

   $\hat{\rho}_1 = \frac{\hat{\theta}}{1-\hat{\theta}^2}$

4. Model terbaik dari data harga emas di Indonesia dengan ARFIMA (1, *d*, 4) dengan (*d* = 0,406483) secara matematis model dapat dituliskan dalam bentuk seperti berikut :

   $(1 - 0.949910\,)(1 - B)^{0,406483}\, X_t = (1 - 0.208910\, B^4)\varepsilon_t$

   $$X_t = 0.949910\, X_t + 0{,}02505265\;\; X_{t-1} + 0{,}00626849\, X_{t-2} + 0{,}00313514\, X_{t-3} + \cdots + \varepsilon_t\; - 0.208910\, \varepsilon_{t-4}$$

   X_t adalah data harga emas di Indonesia.

5. Peramalan yang dilakukan dengan menggunakan model ARFIMA (1; 0,406483 ; 4) menghasilkan peramalan yang sangat baik karena hampir semua nilai peramalan mendekati nilai sebenarnya.

DAFTAR PUSTAKA

Brockwell, P.J. dan Davis, R.A. 2002. *Introduction to Time Series and Forecasting Second Edition.* Springer-Verlag New York Intersciences Publication, New York.

Doornik, J. A. dan Ooms, M. 1999. Computational aspects of maximum likelihood estimation of autoregressive fractionally integrated moving average models. *Computational Statistics and Data Analysis*, 42, 333–348.

Geweke, J. F. dan Porter-Hudak, S. 1983. The estimation and application of long memory time series models. *Journal of Time Series Analysis*, 4, 221-238.

Granger, C.W.J. dan Joyeux, R. 1980. An introduction to long-memory time series models and fractional differencing. *Journal of Time Series Analysis*, 1, 15–39.

Gujarati, D.N. dan Porter, D.C. 1980. *Basic Econometrics.* Ed ke-5. McGraw-Hill Irwin, New York.

Hosking, J.R.M. 1981. Fractional differencing. *Biometrika*, 68, 165–176.

Kirchgasser, G. dan Wolters, J. 2007. *Introduction To Modern Time Series Analysis.* Springer-Verlag Berlin, Berlin.

Makridakis, S., Whelwright, S. C., dan McGee, V. E. 1999. *Metode dan Aplikasi Peramalan*. Erlangga, Jakarta.

Montgomery, D.C., Jennings, C.L., dan Kulachi, M. 2008. *Introduction Time Series Analysis and Forecasting*. John Wiley and Sons Intersciences Publication Hoboken, New Jersey.

Organisasi Harga Emas. 2018. *Harga Emas Hari Ini*. http://harga-emas.org/history-harga/. (diakses pada 1 November 2018)

Rosadi, D. 2011. *Ekonometrika dan Analisis Runtun Waktu Terapan dengan Eviews.* Andi Offset, Yogyakarta.

Sowell, F. 1992. Maximum Likelihood Estimation Of Stationary Univariate Fractionally Integrated Time Series Models. *Journal of econometrics*, 53, 165-188.

Wei, W.W.S. 2006. *Time Series Analysis Univariate and Multivariate Methods Second Edition*. Pearson Education Intersciences Publication, Canada.

DAFTAR PUSTAKA

Barkoulas, J.T. dan Baum, C.F. 1996. Long term dependence in international inflation rates, Working Paper 333, Department of Economics, Boston College.

Brockwell, P.J. dan Davis, R.A. 2002. *Introduction to Time Series and Forecasting* S*econd Edition.* Springer-Verlag New York Intersciences Publication, New York.

Doornik, J. A. dan Ooms, M. 1999. Computational aspects of maximum likelihood estimation of autoregressive fractionally integrated moving average models. *Computational Statistics and Data Analysis,* 42, 333–348.

Geweke, J. F. dan Porter-Hudak, S. 1983. The estimation and application of long memory time series models. *Journal of Time Series Analysis*, 4, 221-238.

Granger, C.W.J. dan Joyeux, R. 1980. An introduction to long-memory time series models and fractional differencing. *Journal of Time Series Analysis*, 1, 15–39.

Gujarati, D.N. dan Porter, D.C. 2009. *Basic Econometrics.* Ed ke-5. McGraw-Hill Irwin, New York.

Hosking, J.R.M. 1981. Fractional differencing. *Biometrika*, 68, 165–176.

Kirchgasser, G. dan Wolters, J. 2007. *Introduction To Modern Time Series Analysis.* Springer-Verlag Berlin, Berlin.

Makridakis, S., Whelwright, S. C., dan McGee, V. E. 1999. *Metode dan Aplikasi Peramalan*. Erlangga, Jakarta.

Montgomery, D.C., Jennings, C.L., dan Kulachi, M. 2008. *Introduction Time Series Analysis and Forecasting*. John Wiley and Sons Intersciences Publication Hoboken, New Jersey.

Pankratz, A. 1991. *Forecasting with Dynamic Regression Models.* Willey Intersciences Publication, Canada.

Rosadi, D. 2011. *Ekonometrika dan Analisis Runtun Waktu Terapan dengan Eviews.* Andi Offset, Yogyakarta.

Sowell, F. 1992. Maximum Likelihood Estimation Of Stationary Univariate Fractionally Integrated Time Series Models. *Journal of econometrics*, 53, 165-188.

Wei, W.W.S. 2006. *Time Series Analysis Univariate and Multivariate Methods Second Edition*. Pearson Education Intersciences Publication, Canada.

Organisasi Harga Emas. 2018. *Harga Emas Hari Ini*. http://harga-emas.org/history-harga/. (diakses pada 1 November 2018)