RUANG BARISAN SELISIH l_3 (Δ_2)

(Skripsi)

Oleh

NURLITA WIDOARTI

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

ABSTRAK

RUANG BARISAN SELISIH l_3 (Δ_2)

Oleh

NURLITA WIDOARTI

Ruang barisan sebagai salah satu konsep dalam analisis, yang membahas tentang barisan dengan karakteristik tertentu salah satunya adalah ruang barisan l_3 **(Δ_2).** Penulis akan membahas tentang ruang barisan l_3 ,l_3 (Δ), dan l_3 **(Δ_2)** adalah ruang bernorm, konvergen, dan merupakan ruang Banach.

Kata Kunci : Ruang Barisan, Ruang Norm, Ruang Banach.

ABSTRACT

DIFFERENCE SEQUENCS SPACE l_3 (Δ_2)

By

NURLITA WIDOARTI

Sequences space as one concept of analysis, discussed about sequences with specific characteristics for example l_3 **(Δ_2)**. The authors will discuss about l_3 ,l_3 (Δ), and l_3 **(Δ_2)**, sequences space than can be proved as. norm space, convergen and Banach space.

Keyword : Sequences space, Norm space, Banach space.

RUANG BARISAN SELISIH l_3 (Δ_2)

Oleh

NURLITA WIDOARTI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

Judul Skripsi : **RUANG BARISAN SELISIH $l_3(\Delta_2)$**

Nama Mahasiswa : *Nurlita Widoarti*

No. Pokok Mahasiswa : 1517031077

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.
NIP 19720227 199802 1 001

Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si.
NIP 19731109 200012 2 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Amanto, S.Si., M.Si.** ....

2. a.n. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Wakil Dekan Bidang Akademik dan Kerjasama

Prof. Sutopo Hadi, M.Sc., Ph.D.
NIP 19710415 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **01 Februari 2019**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama mahasiswa : **NURLITA WIDOARTI**

Nomor pokok mahasiswa : **1517031077**

Jurusan : **Matematika**

Judul skripsi : **RUANG BARISAN SELISIH $l_3(\Delta_2)$**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 1 Februari 2019

Yang menyatakan

METERAI TEMPEL

F3ED4AFF840072661

6000 ENAM RIBU RUPIAH

Nurlita Widoarti

NPM. 1517031077

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Nurlita Widoarti, anak kedua dari tiga bersaudara. Dilahirkan di Sukoharjo, 20 Mei 1997 oleh pasangan Widodo dan Harti. Tinggal di Desa Sukoharjo 1, Pringsewu, Lampung.

Penulis menempuh pendidikan Sekolah Dasar di SDN 3 Sukoharjo 1 pada tahun 2003 dan lulus pada tahun 2009. Kemudia melanjutkan ke Sekolah Menengah Pertama SMPN 1 Sukoharjo 1 pada tahun 2009 dan lulus pada tahun 2012. Dan melanjutkan ke Sekolah Menengah Atas SMAN 2 Pringsewu pada tahun 2012 dan lulus pada tahun 2015.

Pada tahun 2015 penulis terdaftar sebagai mahasiswa S1 Jurusan Matematika fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur SNMPTN.

Pada tahun 2018 melakukan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Harjosari kecamatan Braja selebah, Lampung Timur. dan melakukan Kerja Praktek pada tahun 2018 di PT. Bank BRI Kanwil Bandar Lampung.

KATA INSPIRASI

“Jangan biarkan kesulitan membuatmu gelisah, karena bagaimanapun juga hanya di malam yang paling gelaplah bintang – bintang tampak bersinar lebih terang”

(Ali bin Abi Thalib)

Barang siapa yang menempuh jalan menuntut ilmu, niscaya Allah subhanahu wata’ala akan memudahkan baginya jalan menuju surga”

(H.R Muslim)

“Barang siapa yang meninggalkan sesuatu karena Allah, maka Allah akan memberinya ganti yang lebih baik”

(H.R Muslim)

“Teruslah percaya dan bekerja keraslah”

(Nurlita Widoarti)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillah irabbil'alamin

Dengan kerendaan hati dan rasa bersukur kepada Alla SWT

Kupersembakan karya ini kepada :

Orang tua tercinta Bapak Widodo dan Ibu Harti atas doa, dukungan dan kasih sayang yang terus diberikan serta kerja keras dan keinginan yang di curahkan untuk merawat, membesarkan, menyekolakan, penulis hingga sekarang. Serta kakak dan adik saya, kak Riska dan dek Rafi yang selalu memberi semangat dan kasih sayang

Para pendidik, guru – guru, serta dosen yang telah meluangkan waktu untuk menurunkan ilmunya kepada penulis.

Semua sahabat terbaik yang terus mensuport, menolong, memberikan semangat dalam proses hidup penulis.

Almamater Unila dan Negriku Indonesia.

SANWACANA

Puji syukur penulis ucapkan kehadirat Allah SWT. karena atas rahmat dan ridho-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi “Ruang Barisan Selisih $l_3(\Delta_2)$ ”. Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si.) di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung. Dengan ketulusan hati penulis ingin mengucapkan terimakasih banyak kepada :

1. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si.,M.Si. selaku Dosen Pembimbing I, terimakasih untuk bimbingan dan kesediaan waktunya selama penyusunan skripsi ini.
2. Ibu Dr. Noti Ragayu S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing II, terimakasih untuk bantuan dan masukannya selama penyusunan skripsi.
3. Bapak Amanto, S.Si, M.Si. selaku Dosen Penguji, terimakasih atas kesediannya untuk menguji, memberikan saran dan kritik yang membangun dalam penyelesaian skripsi ini.
4. Bapak Agus Sutrisno, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing Akademik, terima kasih atas bimbingan dan pembelajarannya dalam menjalani perkuliahan.
5. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, M.A., P.hD. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

6. Bapak Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.,selaku Dekan FMIPA Universitas Lampung.
7. Seluruh Dosen dan Karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
8. Ayah, Ibu, adik Rafi , dan mba Riska tercinta yang tak pernah berhenti memberi semangat, doa, dorongan, nasehat dan kasih sayang serta pengorbanan yang tak tergantikan hingga penulis selalu kuat menjalani setiap rintangan yang ada di depan.
9. Untuk sahabat Pejuang Skripsi, Della, Rina, Aul, Atuy, Vina, Willma, Lelvi, Agung, Mutia, Lutfi, Irma, Rini, Aura, yang telah memberikan semangat, motivasi dan waktu kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi.
10. Untuk Adi Setia Nugraha yang memberikan semangat, motivasi, dan waktunya kepada penulis dari masa SMA sampai detik ini.
11. Sahabat-sahabat seperjuangan tersayang, Matematika 2015 yang banyak membantu dan sabar menghadapi penulis.
12. Almamater tercinta Universitas Lampung.
13. Seluruh pihak yang telah membantu yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Bandar Lampung, 1 Februari 2019

Penulis,

Nurlita Widoarti

DAFTAR SIMBOL DAN NOTASI

(x_k) : Barisan bilangan untuk $k = 1,2,3, ...$

(Δx_k) : Barisan selisih tingkat pertama (selisih suku ke $k + 1$ dan suku ke k)

$(\Delta_2 x_k)$: Barisan selisih tingkat kedua

l_p : Ruang barisan dengan $1 \leq p < \infty$

l_3 : Ruang barisan dengan $p = 3$

$l_3(\Delta)$: Ruang barisan selisih pertama di l_3

$l_3(\Delta_2)$: Ruang barisan selisih kedua di l_3

$\|\,.\,\|$: Norm

$\|\,.\,\|_3$: Norm di ruang l_3

$\left\{\tilde{x}_k^{(n)}\right\}$: Himpunan barisan Cauchy

DAFTAR ISI

halaman

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan cabang ilmu pengetahuan yang memiliki ciri yang berbeda dengan disiplin yang dimiliki ilmu pengetahuan yang lain. Hal-hal yang dipelajari dalam ilmu matematika terdiri atas beberapa kelompok diantaranya ilmu aljabar, geometri , analisis ,matematika komputasi, matematika terapan dan banyak cabang matematika yang dulu disebut matematika murni yang dikembangkan oleh beberapa matematikawan.

Salah satu bidang kajian matematika adalah bidang analisis, yang salah satu topik didalamnya membahas tentang konsep ruang barisan. Ruang barisan merupakan ruang linier yang didalamnya beranggotakan barisan – barisan dengan karakteristik tertentu, yang diantaranya adalah l_∞, c, c_0, dan l_p., Salah satu pakar matematika H. Kizmas (1981) yang meneliti syarat yang diperlukan oleh suatu matriks tak terhingga dari ruang barisan ke ruang barisan. Kemudian dasar pemikiran tersebut digunakan oleh colak R (1995), beliau menambahkan sebuah kondisi kedalam ruang barisan tersebut sehingga menjadi ruang barisan $l_\infty(\Delta)$, $c(\Delta)$, $c_0(\Delta)$, dan $l_p(\Delta)$, Kemudian dikaji kondisi dan syarat yang diperlukan.

Dari pemikiran diatas penulis mencoba mengkaji lebih dalam tentang salah satu ruang barisan, yaitu barisan $l_3(\Delta_2)$.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menunjukkan ruang barisan l_3, ruang barisan selisih $l_3(\Delta)$ dan $l_3(\Delta_2)$ merupakan ruang Banach.

1.3 Manfaat penelitian

Manfaat dari penelitian ini selain memahami sifat dan masalah pada ruang barisan l_3, ruang barisan selisih $l_3(\Delta)$ dan $l_3(\Delta_2)$, juga dapat memberi ide bagi penulis lain untuk meneliti lebih lanjut ruang barisan selisih yang lebih umum.

II. TINJAUAN PUSTAKA

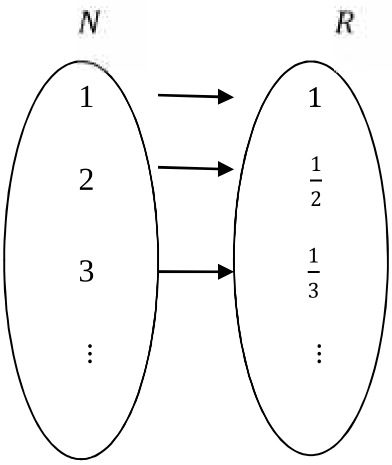
2.1 Barisan

Definisi 2.1.1

Barisan adalah suatu fungsi yang domainnya adalah himpunan bilangan asli. Misal terdapat bilangan asli $1, 2, 3, . . , k, ..$ yang bersesuaian dengan bilangan real (x_k) tertentu, maka $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ dikatakan barisan. (Mizrahi dan Sulivan,1982)

Contoh :

Barisan $\left(\frac{1}{k}\right)$ merupakan barisan bilangan real dengan unsur ke-k adalah $(x_k) = \left(\frac{1}{k}\right)$ dengan nilai $k = 1,2,3, \dots$ maka $(x_k) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right)$. Jika dinotasikan ke dalam suatu fungsi $N \to R$ sehingga, $f: N \to R$



Definisi 2.1.2

Misal L adalah suatu bilangan real dan (x_k) suatu barisan, (x_k)konvergen ke L jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat suatu bilangan asli $\mathbb{N}$, sehingga

$$|x_k - L| < \varepsilon \text{ untuk setiap } k > N$$

suatu bilangan L dikatakan limit dari suatu barisan tak hingga $(x_1, x_2, \dots.)$ jika ada bilangan real positif ε sehingga dapat ditemukan bilangan asli $\mathbb{N}$ yang tergantung pada ε sehingga $|x_k - L| < \varepsilon$ untuk setiap $k > N$, dan suatu barisan dikatakan konvergen jika ia mempunyai nilai limit (Mizrahi dan Sulivan, 1982).

Contoh :

Diberikan barisan $(x_k) = \left(\frac{1}{k}\right)$ mempunyai limit $L = 0$ atau ditulis

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} = 0$$

Definisi 2.1.3

Suatu barisan yang mempunyai limit dinamakan barisan konvergen dan barisan yang tak konvergen dinamakan barisan divergen (Martono, 1984).

Contoh:

Diberikan barisan $(x_k) = (k)$ mempunyai limit

$$\lim_{k \to \infty} k = \infty$$

Maka barisan $(x_k) = (k)$ adalah barisan divergen.

Definisi 2.1.4

Suatu barisan $\bar{x} = (x_k)$ dikatakan terbatas jika dan hanya jika terdapat suatu bilangan $M \geq 0$ sehingga $|x_k| \leq M \; \forall \; k \in \mathbb{N}$. Himpunan dari semua barisan terbatas dilambangkan dengan l_∞ (Maddox, 1970).

Teorema 2.1.5

Setiap barisan bilangan real yang konvergen selalu terbatas. (Martono, 1984)

Bukti :

Misalkan barisan bilangan real (x_k) konvergen ke x, akan ditunjukkan terdapat suatu bilangan real $M > 0$ sehinga $|x_k| \leq M$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Karena (x_k) konvergen ke x, maka terdapat suatu $n_0 \in N$ sehingga

$k > n_0 \Rightarrow |x_k - x| < 1$. Akibatnya $|x_k| = |x_k - x + x| \leq |x_k - x| + |x| < 1 + |x|$ untuk setiap $k > n_0$. Ambillah $M = maks\left(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n_0}|, |x| + 1\right)$, maka setiap $k \in M$ berlaku $|x_k| \leq M$, yang berarti bahwa barisan bilangan real $\{x_k\}$ terbatas.

Contoh :

Diberikan barisan $\bar{x} = (x_k)$ dengan $(x_k) = \left(\frac{1}{k}\right)$

pilih $M = 1$

sehingga,

$$|x_k| = \left|\frac{1}{k}\right| = \frac{1}{k} \leq 1$$

untuk setiap $k = 1,2,3, \dots \dots$

dengan kata lain $(x_k) = \left(\frac{1}{k}\right)$ barisan terbatas.

Definisi 2.1.6

Diberikan X yaitu koleksi semua barisan bilangan *real* (Darmawijaya, 2007) jadi :

$$X = \{\bar{x} = (x_k): x_k \in \mathbb{R}\}$$

Untuk setiap bilangan *real p* dengan $1 \leq p < \infty$ didefinisikan

$$l_p = \left\{\bar{x} = (x_k) \in R : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty\right\}$$

dan norm pada l_p yaitu

$$\|x\|_p = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

jika *p* = 3 dengan $1 \leq p < \infty$ didefinisikan

$$l_3 = \left\{\bar{x} = (x_k): \in R \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^3 < \infty\right\}$$

dan norm pada l_3 yaitu

$$\|x\|_3 = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^3\right\}^{\frac{1}{3}}$$

Definisi 2.1.7

Misal $p, q \in (1, \infty)$ dengan $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (q konjugat p), untuk $x \in l_p$ dan $y \in l_p$ $(x_k y_k)_{k \in N} \in l_p$ dan $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \|x\|^p \|y\|^q$. (Darmawijaya, 2007)

Teorema 2.1.8

$l_p \, (1 \leq p < \infty)$ merupakan ruang bernorma terhadap norm $\|.\|_p$ (Darmawijaya, 2007).

Bukti :

a) Untuk $1 \leq p < \infty$ diambil sebarang $\tilde{x} = (x_k), \tilde{y} = (y_k) \in l_p$ dan skalar α. Diperoleh :

i) $\|\tilde{x}\|_p = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \geq 0$ karena $|x_k| \geq 0$ untuk setiap k.

$\|\tilde{x}\|_p = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}} = 0 \Leftrightarrow |x_k| \geq 0$ untuk setiap $k \Leftrightarrow \tilde{x} = \{0\} = \tilde{0}$

ii) $\|\alpha\tilde{x}\|_p = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha x_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \|x\|_p$

jelas bahwa $\|\alpha x\|_p < \infty$

iii) $\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_p \leq \|\tilde{x}\|_p + \|\tilde{y}\|_p = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha x_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha x_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty.$

Berdasarkan i), ii), dan iii) terbukti bahwa l_p merupakan ruang linear dan $\|.\|_p$ norm pada l_p . Dengan kata lain $(l_p, \|.\|_p)$ ruang bernorm.

Definisi 2.1.9

Ruang barisan. Himpunan dari barisan bilangan yang memiliki syarat

$$l_p = \left\{ x = (x_k) \in R : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\}$$

l_p koleksi barisan bilangan yang $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$.

$$l_p(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in l_p\}$$

$l_p(\Delta)$ koleksi barisan bilangan yang $\Delta x \in l_p$

$$l_p(\Delta_2) = \{x = (x_k) : \Delta_2 x \in l_p\}$$

$l_p(\Delta_2)$ koleksi barisan bilangan yang $\Delta_2 x \in l_p$

(H.Kizmaz,1981).

2.2 Ruang Vektor

Definisi 2.2.1

Misalkan V himpunan yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar bilangan riil V disebut ruang vektor, jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. $u + v \in V$
2. $u + v = v + u$ (sifat komutatif)

3. $u + (v + w) = (u + v) + w$ (sifat assosiatif)
4. Ada sebuah vektor $0 \in X$ sehingga $0 + u = u + 0$
5. $\forall u$ di V terdapat vektor balikan dari u atau $-u$ sehingga $u + (-u) = (-u) + u = 0$
6. Jika k skalar dan u sebarang benda vektor di V maka ku berada di $ku \in V$
7. $k(u + v) = ku + kv$ (sifat distributif)
8. $(k + 1)u = ku + 1u$
9. $k(lu) = (kl)(u)$
10. Untuk sebarang real 1 dan untuk setiap $u \in V$ berlaku $1u = u$

(Anton dan Rorres, 2001).

2.3 Ruang Bernorm

Definisi 2.3.1

Diberikan ruang linear *X*. Fungsi $\|\cdot\| : X \rightarrow R$ yang mempunyai sifat-sifat :

i. $\|x\| \geq 0$ untuk setiap $x \in X$
ii. $\|x\| = 0$, jika dan hanya jika $x = 0$, (0 vektor nol)
iii. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ untuk setiap skalar α dan $x \in X$.
iv. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ untuk setiap $x, y \in X$

disebut norma(*norm*) pada *X* dan bilangan nonnegatif $\|x\|$ disebut norma vektor *x*. Ruang linear *X* yang dilengkapi dengan suatu norma $\|\cdot\|$ disebut ruang bernorma (*norm space*) dan dituliskan singkat dengan $X, \|\cdot\|$ atau X saja asalkan normanya telah diketahui. (Darmawijaya, 2007)

Contoh:

Akan dibuktikan bahwa l_3 merupakan ruang bernorma terhadap $\|.\|_3$. Untuk setiap skalar α dan $\bar{x} = (x_k), (y_k) \in l_3$ diperoleh

i) $\|\tilde{x}\|_3 = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^3\right\}^{\frac{1}{3}} \geq 0$ karena $|x_k| \geq 0$ untuk setiap k.

$$\|\tilde{x}\|_3 = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^3\right\}^{\frac{1}{3}} = 0 \Leftrightarrow |x_k| = 0 \text{ untuk setiap } k$$

$$\Leftrightarrow \tilde{x} = \{0\} = \bar{0}$$

ii) $\|\alpha\tilde{x}\|_3 = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\propto x_k|^3\right\}^{\frac{1}{3}} . \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^3\right\}^{\frac{1}{3}} = \alpha\|x\|_3$

karena $\left\{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^3\right\}^{\frac{1}{3}} < \infty$ maka $\|\alpha\tilde{x}\|_3 = \alpha\|x\|_3 < \infty$ atau $\alpha\tilde{x} \in l_3$

iii) $\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_3 \leq \|\tilde{x}\|_3 + \|\tilde{y}\|_\infty$ dan $\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_3 \leq \infty$ yaitu $\tilde{x} + \tilde{y} \in l_3$

berdasarkan i), ii) dan iii) terbukti bahwa l_3 merupakan ruang linear dan norm pada l_3. Dengan kata lain $(l_3, \|.\|_3)$ ruang bernorma.

Teorema 2.3.2

Dalam ruang linear bernorma X berlaku $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ untuk setiap $x, y \in X$. (Maddox, 1970)

Bukti :

untuk setiap $x, y \in X$ diperoleh :

$\|x\| - \|y\| = \|x - y + y\| - \|y\| \leq \|x - y\| + \|y\| - \|y\| = \|x - y\|$.

Definisi 2.3.3

Ruang bernorma dikatakan lengkap (*complete*) jika setiap barisan Cauchy di dalamnya konvergen. (Darmawijaya, 2007)

Definisi 2.3.4

Barisan (x_k) di dalam ruang bernorma X dikatakan konvergen (*convergent*) jika ada $x \in X$ sehingga untuk setiap bilangan asli $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0(bergantung pada ε), sehingga untuk setiap bilangan asli $n \geq n_0$berlaku.

$$\|x_k - x\| < \varepsilon$$

Jika demikian halnya, dikatakan barisan (x_k) konvergen ke x atau barisan (x_k) mempunyai limit x untuk $k \to \infty$ dan ditulis dengan

$$\lim_{k \to \infty} \|x_k - x\| < \varepsilon$$

atau dapat ditulis dengan $\lim_{k\to\infty} x_k = x$. Sedangkan titik x disebut titik limit barisan $\{x_k\}$. (Darmawijaya, 2007)

Contoh :

Akan ditunjukkan barisan $\tilde{x} = \left(\frac{1}{k}\right)$ konvergen

untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada bilangan asli n_0 (bergantung pada ε), sehingga

$$k \geq n_0 \text{ berlaku } \left|\frac{1}{k} - 0\right| < \varepsilon$$

dikatakan barisan $\left(\frac{1}{k}\right)$ konvergen ke 0 atau barisan $\left(\frac{1}{k}\right)$ mempunyai limit 0 untuk $k \to \infty$ dan ditulis dengan

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{1}{k} - 0\right| < \varepsilon$$

atau dapat ditulis dengan

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0 .$$

Definisi 2.3.5

Barisan (x_n) di dalam ruang bernorma $(X, \|.\|)$ disebut barisan Cauchy atau barisan fundamental jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0, sehingga untuk setiap dua bilangan asli $m,n \geq n_0$ berlaku $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$. (Darmawijaya, 2007)

Contoh :

Barisan $\left(\frac{1}{n}\right)$ adalah barisan Cauchy. Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_o(bergantung pada ε) $\in N$ sehingga ada dua bilangan asli $m, n \geq n_0$ maka

$$|x_m - x_n| < \varepsilon$$

Untuk dua bilangan asli $m, n \geq n_0$ maka

$$\frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_o}, \quad \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_o}$$

sehingga

$$\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \left|\frac{1}{m}\right| + \left|-\frac{1}{n}\right| \quad \text{(ketaksamaan segitiga)}$$

$$\leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_o} + \frac{1}{n_o} = \frac{2}{n_o} < \varepsilon$$

Bukti:

Diambil sebarang $\varepsilon > 0$ pilih $n_0 \leq \frac{2}{\varepsilon}$ sehingga jika $m, n \geq n_0$ maka

$$\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

$$\leq \frac{1}{n_o} + \frac{1}{n_o} = \frac{2}{n_o} < \varepsilon$$

Jadi, barisan $\left(\frac{1}{n}\right)$ adalah barisan Cauchy.

Teorema 2.3.6

Setiap barisan yang konvergen di dalam ruang bernorma $(X, \|.\|)$ merupakan barisan Cauchy. (Darmawijaya, 2007)

Bukti :

Misalkan (x_k) adalah barisan di X dengan $\lim_{k\to\infty} x_k = x$, dan misalkan $\varepsilon < 0$ maka terdapat bilangan asli $k \in \boldsymbol{N}$ sedemikian hingga berlaku $d(x, x_k) < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $k \geq N$, akibatnya untuk $n, m \geq N$ berlaku $d(x_n, x_m) \leq d(x_m, x) + d(x_n) < \varepsilon$, jadi (x_k) barisan Cauchy.

Teorema 2.3.7 (ketidaksamaan Young)

Diketahui $0 < p, q < \infty$ sehingga $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ untuk sebarang dua bilangan α dan β

Benar bahwa

$$|\alpha\beta| \leq \frac{|\alpha|^p}{p} + \frac{|\beta|^q}{q}$$

Bukti:

Karena $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ diperoleh $p + q = pq, \frac{p}{q} = \frac{1}{q-1}$ dan $\frac{q}{p} = \frac{1}{p-1}$ diambil kurva

$y = x^{p-1}$; jadi $x = y^{q-1}$.

Oleh Karena itu diperoleh $|\alpha\beta| =$ luas persegi panjang ≤ luas I+ luas II yaitu

$$|\alpha\beta| \le \int_0^{|\alpha|} x^{p-1}dx + \int_0^{|\beta|} y^{q-1}dy = \frac{|\alpha|^p}{p} + \frac{|\beta|^q}{q}$$

(Darmawijaya, 2007)

Teorema 2.3.8 (**Ketaksamaan Ho'lder**)

i. Untuk setiap $\bar{x} = (x_k) \in l_1$ dan $\bar{y} = (y_k) \in l_\infty$ benar bahwa

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k\right\| \le \sum_{k=1}^{\infty} |x_k \bar{y}_k| \le \|\bar{x}\|_1 . \|\bar{y}\|_\infty$$

$$\text{dengan } \|\bar{x}\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \text{ dan } \|\bar{y}\|_\infty = \sup_{k\ge 1} |y_k|$$

ii. $jika\ 1 < p, q < \infty\ dan\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, maka untuk setiap $\bar{x} = (x_k) \in \ell_p$, dan $\bar{y} = (y_k) \in \ell_p$ benar bahwa

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k\right\| \le \sum_{k=1}^{\infty} |x_k \bar{y}_k| \le \|\bar{x}\|_p . \|\bar{y}\|_q$$

$$\text{dengan } \|\bar{x}\|_p = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \text{ dan } \|\bar{y}\|_q = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q\right\}^{\frac{1}{q}}$$

(Darmawijaya, 2007).

Bukti :

i. Jika $\bar{x} = (x_k) \in l_1$ dan $\bar{y} = (y_k) \in l_\infty$ cukup jelas bahwa

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\right| \le \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| . |y_k|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty}|x_k| \cdot \sup_{k\geq 1}|y_k| = \|\tilde{x}\|_1 \cdot \|\tilde{y}\|_\infty$$

ii. Jika $\tilde{x} = (x_k) \in l_p$ dan $\tilde{y} = (y_k) \in l_q$ cukup jelas bahwa ,

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \cdot |y_k|$$

karena $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

tinggal membuktikan bahwa,

$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k| \cdot |y_k| \leq \|\tilde{x}\|_p \cdot \|\tilde{y}\|_q$

atau

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{\|\tilde{x}\|_p} \cdot \frac{|y_k|}{\|\tilde{y}\|_k} \leq 1$$

dengan teorema young diperoleh

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{\|\tilde{x}\|_p} \cdot \frac{|y_k|}{\|\tilde{y}\|_p} \leq \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{p}\left(\frac{|x_k|}{\|\tilde{x}\|_p}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{|y_k|}{\|\tilde{y}\|_p}\right)^q\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{|x_k|}{\|\tilde{x}\|_p}\right)^p + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{q}\left(\frac{|y_k|}{\|\tilde{y}\|_p}\right)^q$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Teorema 2.3.9 (Ketaksamaan Minkowski)

Jika $1 \leq p < \infty$ maka untuk setiap $\tilde{x} = (x_k), \tilde{y} = (y_k) \in \ell_p$ benar bahwa

$$\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_p \leq \|\tilde{x}\|_p + \|\tilde{y}\|_p$$

(Darmawijaya, 2007)

Bukti :

Jika $p = \infty$, diperoleh

$$\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_\infty = sup_{k\geq 1}|x_k + y_k|$$

$$\leq sup_{k\geq 1}\{|x_k| + |y_k|\}$$

$$\leq sup_{k\leq 1}|x_k| + sup_{k\geq 1}|y_k|$$

$$= \|\tilde{x}\|_\infty + \|\tilde{y}\|_\infty$$

Jika $p = 1$ diperoleh

$$\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty}|x_k + y_k|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty}|x_k| + \sum_{k=1}^{\infty}|y_k|$$

$$= \|\tilde{x}\|_1 + \|\tilde{y}\|_1$$

Jika$1 \leq p < \infty$

$$|x_k + y_k|^p = |x_k + y_k|.|x_k + y_k|^{p-1}$$

$$\leq |x_k|.|x_k + y_k|^{p-1} + |y_k|.|x_k + y_k|^{p-1}$$

Untuk setiap k dijumlahkan untuk seluruh k dan kemudian memanfaatkan ketidaksamaan Holder, diperoleh

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k + y_k|^p \leq \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|.|x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{\infty}|y_k|.|x_k + y_k|^{p-1}$$

$$\leq \|x\|_p.\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\{|x_k + y_k|^{p-1}\}^q\right\}^{\frac{1}{q}} + \|y\|_p.\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\{|x_k + y_k|^{p-1}\}^q\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\|\tilde{x}\|_p + \|\tilde{y}\|_p\right).\sum_{k=1}^{\infty}\{|x_k + y_k|^p\}^{\frac{1}{q}}$$

atau

$$\|\tilde{x}+\tilde{y}\|_p = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left|x_k + y_k\right|^{p-1}\right\}^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \|\tilde{x}\|_p + \|\tilde{y}\|_p$$

2.4 Ruang Banach

Definisi 2.4.1

Ruang Banach (*Banach space*) adalah ruang bernorma yang lengkap (sebagai ruang metrik yang lengkap) jika dalam suatu ruang bernorma *X* berlaku kondisi bahwa setiap barisan Chaucy di *X* adalah konvergen. (Darmawijaya, 2007)

Teorema 2.4.2

Jika bilangan *real p* dengan $1 \leq p < \infty$, maka $(l_p, \|.\|_p)$ merupakan Ruang Banach. (Darmawijaya, 2007)

2.5 Ruang Barisan Selisih

Definisi 2.5.1

Diperlihatkan barisan selisih bilangan sebagai berikut :

Jika $\tilde{x} = (x_k)$ suatu barisan bilangan dan

$\Delta\tilde{x} = (x_{k+1} - x_k)$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$

$\Delta\tilde{x}$ disebut barisan selisih pertama terhadap barisan$\tilde{x} = (x_k)$

$\vdots$

$\Delta_m\tilde{x} = \{\Delta_m\tilde{x}_k = \sum_{i=0}^{m}(-1)^i \binom{m}{i} x_{k+m-i}\}$, untuk setiap $k \in \mathbb{N}$

$\Delta_m\tilde{x}$ disebut barisan selisih ke-m terhadap barisan $\tilde{x} = \{x_k\}$

Berdasarkan gambaran di atas maka dibentuklah barisan bilangan

$\Delta\tilde{x} = \{\Delta x_k\}, \Delta_2\tilde{x} = \{\Delta_2 x_k\}, \ldots$, $\Delta_n\, x_m = \{\Delta_n\, x_k\}$ yang disebut dengan barisan selisih pertama, barisan selisih kedua, dan seterusnya sampai barisan selisih ke-m. (H.Kizmaz,1981)

Contoh:

Diberikan barisan $(x_k) = \left(\frac{1}{k}\right) \in\ l_3$

$$(x_k) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \ldots\right)$$

Untuk setiap $k = 1,2,3, \ldots.$

Akan dicari $\Delta\tilde{x} = (x_{k+1} - x_k)$

$$\Delta\tilde{x} = \left((x_{1+1} - x_1), (x_{2+1} - x_2), (x_{3+1} - x_3), \ldots \ldots \ldots \ldots\right)$$

$$\Delta\tilde{x} = \left((x_2 - x_1), (x_3 - x_2), (x_4 - x_3), \ldots \ldots \ldots\right)$$

$$= \left(\left(\frac{1}{2} - 1\right), \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right), \ldots \ldots \ldots\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \ldots \ldots \ldots \ldots\right)$$

Sehingga terbentuklah barisan selisih yang pertama yaitu

$$\Delta\tilde{x} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \ldots \ldots \ldots \ldots\right)$$

2.6 Deret Bilangan Real

Definisi 2.6.1

Jika untuk setiap bilangan asli k diketaui bilangan real x_k, maka jumlahan

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots$$

Disebut deret bilangan real (*series of real numbers*) atau cukup disebut deret saja asalkan tak diberi penjelasan lebih lanjut ; x_k disebut suku ke – k deret tersebut. (Darmawijaya, 2007)

Contoh :

Deret $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$

$a9 =$ atau suku ke-9 = $\frac{1}{9}$, $a_{100} =$ atau suku ke-100 = $\frac{1}{100}$

Definisi 2.6.2

Deret $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ dikatakan konvergen jika barisan jumlah parsialnya yaitu $\{S_n\}$ konvergen.(Darmawijaya, 2007)

Teorema 2.6.3

i. Deret $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergen jika dan hanya jika ada bilangan S sehingga

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

ii. Deret $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergen jika dan hanya jika ada bilangan S sehingga

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

iii. Deret $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergen jika dan hanya jika ada bilangan S sehingga

Untuk bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $n_0$dan jika bilangan asli

$n \geq n_0$benar bahwa

$$|S_n - S| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k - S\right| < \varepsilon$$

iv. Deret $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergen jika dan hanya jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$

terdapat bilangan asli n_0 sehingga

$$\left|\sum_{k>n_0} x_k\right| < \varepsilon$$

(Darmawijaya, 2007)

Bukti :

i. Menurut definisi 2.6.2 , deret $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergen jika dan hanya jika

barisan jumlah parsial $\{S_n\}$ konvergen, artinya ada bilangan S sehingga

barisan $\{S_n\}$ konvergen ke bilangan S ; jadi $\lim_{n\to\infty} S_n = S$

ii. Berdasarkan (i) diperoleh

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

iii. $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ artinya untuk sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga jika bilangan asli $n \geq n_0$ benar bahwa

$$\sum_{k=1}^{n} x_k - S = |S_n - S| < \varepsilon$$

iv. Berdasarkan iii dan ii diperoleh untuk $n \geq n_0$ benar bahwa

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k - S\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_k\right| = \left|\sum_{k>n_0} x_k\right| < \varepsilon$$

Berdasarkan teorema 2.6.3 (iv) tersebut diperoleh. Jika deret $\sum_{k=1}^{n} x_k$ konvergen maka,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k>n} a_k = 0$$

Contoh :

Deret harmonik order $-p$: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$

(Uji Deret-p) Deret

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots$$

di mana p konstanta, disebut deret-p. Perlihatkan bahwa:

(a) Deret-p konvergen jika $p > 1$

(b) Deret-p divergen jika $p \leq 1$

Penyelesaian :

Jika $p \geq 0$, fungsi $f(x) = \frac{1}{x^p}$ kontinu, positif dan tak-menarik pada $[1, \infty)$ dan $f(k) = \frac{1}{k^p}$. Jadi, menurut Uji Integral, $\sum \left(\frac{1}{k^p}\right)$ konvergen jika dan hanya jika $\lim_{t \to \infty} \int_1^t x^{-p} dx$ ada (sebagai bilangan terhingga).

Jika $p \neq 1$,

$$\int_1^t x^{-p} = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^t = \frac{t^{1-p} - 1}{1-p}$$

Jika $p = 1$,

$$\int_1^t x^{-1}\, dx = [\ln x]_1^t = \ln t$$

Oleh karena $\lim_{t \to \infty} \int_1^t t^{1-p} = 0$ jika $p > 1$ dan $\lim_{t \to \infty} \int_1^t t^{1-p} = \infty$ jika $p < 1$ dan oleh karena $\lim_{t \to \infty} \ln t = \infty$, kita simpulkan bahwa deret-p konvergen jika $p > 1$ dan divergen jika $0 \leq p \leq 1$.

(Varberg,Purcell,Rigdon, 2007)

III. METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun akademik 2018/2019 di jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini antara lain :

1. Membuktikan bahwa ruang l_3, adalah ruang bernorm , konvergen, dan merupakan ruang Banach
2. Membuktikan bahwa ruang $l_3(\Delta)$, ruang bernorm, konvergen, dan merupakan ruang Banach
3. Membuktikan bahwa ruang $l_3(\Delta_2)$, ruang bernorm , konvergen, dan merupakan ruang Banach

V. KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan sebelumnya dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Ruang barisan $(l_3, \|.\|_3)$ dengan norma $\|x\|_3 = \{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^3\}^{\frac{1}{3}}$ merupakan ruang Banach.
2. Ruang barisan $\left(l_3(\Delta), \|.\|_{(\Delta,3)}\right)$ dengan norma $\|x\|_{(\Delta,3)} = |x_1| + \|\Delta\tilde{x}\|_3$ merupakan ruang Banach.
3. Ruang barisan $\left(l_3(\Delta_2), \|.\|_{(\Delta_2,3)}\right)$ dengan norma $\|x\|_{(\Delta_2,3)} = |x_1| + |x_2| + \|\Delta_2\tilde{x}\|_3$ merupakan ruang Banach.

5.2 Saran

Ruang barisan Selisih $l_3, l_3(\Delta), l_3(\Delta_2)$ yang telah dibahas dapat dilanjutkan kembali oleh pembaca yang tertarik untuk meneliti bidang analisis matematika terutama ruang barisan. Karena peneliti hanya meneliti hingga $l_3(\Delta_2)$ sehingga pembaca dapat membuktikan hingga $l_3(\Delta_m)$ ataupun membuktikan ruang barisan selisih lain.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. and Rorres, C,. 2002. *Aljabar Linear Elementer jilid 1*, Erlangga, Jakarta.

Colak, Rifat., and mikail, Et. 2005. On Some Difference Sequence Sets and Their Topological Propertirties. *Bulletin Of The Malaysian Mathematical Sciences Society*. 125-130.

Darmawijaya, S. 2007. *Pengantar Analisis Abstrak*. Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.

Kizmaz, H. 1981. *On Certain Sequance Spaces.* Karadeniz Teknik Universities, Turkey.

Maddox,I.J. 1970. *Element of Functional Analysis*.Cambridge Univercity Press, London.

Martono, K. 1984. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik 2*. Angkasa, Bandung.

Mizrahi, A. dan Sullivan, M. 1982.*Calculus and Analytic Geometry*. Wadsworth Publishing Company Belmont, California.

Varberg, D., Edwin J., Purcell and Steven E., Rigdon. 2007. *Kalkulus*. Edisi 9. Terjemahan oleh I Nyoman Susila. Erlangga, Jakarta.