PEMODELAN REGRESI 3-LEVEL
DENGAN METODE *ITERATIVE GENERALIZED LEAST SQUARE* (IGLS)

(Skripsi)

Oleh

MUHAMAD IRSAN

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

ABSTRACT

3-LEVEL REGRESSION MODELING WITH ITERATIVE GENERALIZED LEAST SQUARE (IGLS) METHOD

By

MUHAMAD IRSAN

In a research, sometimes the data used are hierarchical data. Hierarchical data are tiered data consisting of two or more levels and independent variables are defined in each level and at the lowest level. Analysis that can be used for hierarchical data is multilevel regression analysis. The purpose of this research was to determine the estimated parameters of the 3-level regression model and to see what factors influenced population density in Lampung Province in 2016 at the village level (sex ratio and village distance), sub-districts (population growth and income original kecamatam) and districts (human development index and economic growth rate). Estimation of parameters in the 3-level regression model used in this study using Iterative Generalized Least Square (IGLS) method. From the research, it is obtained that the 3-level regression model on population density data in Lampung Province in 2016, namely: Population density = - 0.026 sex ratio - 0.032 village distance + 0.295 human development index.

Keywords: Hierarchical data, multilevel regression, *Iterative Generalized Least Square*

ABSTRAK

PEMODELAN REGRESI 3-LEVEL DENGAN METODE *ITERATIVE GENERALIZED LEAST SQUARE* (IGLS)

Oleh

MUHAMAD IRSAN

Dalam sebuah penelitian terkadang data yang digunakan adalah data yang berstruktur hirarki. Data hirarki adalah data berjenjang yang terdiri dari dua atau lebih level. Variabel bebas didefinisikan dalam setiap level dan variabel tak bebas didefinisikan pada level terendah. Analisis yang dapat digunakan untuk data yang berstruktur hirarki adalah analisis regresi multilevel. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui estimasi parameter model regresi 3-level dan untuk melihat faktor-faktor apa saja yang mempengaruhi kepadatan penduduk di Provinsi Lampung tahun 2016 pada level desa (rasio jenis kelamin dan jarak tempuh desa), kecamatan (pertumbuhan penduduk dan pendapatan asli kecamatam) dan kabupaten (indeks pembangunan manusia dan laju pertumbuhan ekonomi). Penaksiran parameter dalam model regresi 3-level yang digunakan dalam penelitian ini adalah dengan meggunakan metode *Iterative Generalized Least Square* (IGLS). Dari hasil penelitian diperoleh model regresi 3-level pada data kepadatan penduduk di Provinsi Lampung tahun 2016 yaitu : Kepadatan penduduk = – 0,026 rasio jenis kelamin – 0,032 jarak tempuh desa + 0,295 Indeks pembangunan manusia.

Kata Kunci: data hirarki, regresi multilevel, *Iterative Generalized Least Square*

PEMODELAN REGRESI 3-LEVEL DENGAN METODE *ITERATIVE GENERALIZED LEAST SQUARE* (IGLS)

Oleh

Muhamad Irsan

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA MATEMATIKA

pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

Judul Skripsi : **PEMODELAN REGRESI 3-LEVEL DENGAN METODE *ITERATIVE GENERALIZED LEAST SQUARE* (IGLS)**

Nama Mahasiswa : *Muhamad Irsan*

Nomor Pokok Mahasiswa : 1517031096

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Khoirin Nisa, S.Si., M.Si.	**Dra. Dorrah Aziz, M.Si.**
NIP. 19740726 200003 2 001	NIP. 19610128 198811 2 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP. 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Khoirin Nisa, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Dra. Dorrah Aziz, M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Drs. Rudi Ruswandi, M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
UNIVERSITAS LAMPUNG
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

Drs. Suratman, M.Sc.
NIP. 19640604 199003 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **9 Desember 2019**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: **Muhamad Irsan**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1517031096**
Jurusan	: **Matematika**
Judul Skripsi	: **PEMODELAN REGRESI 3-LEVEL DENGAN METODE *ITERATIVE GENERALIZED LEAST SQUARE* (IGLS)**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri, bukan hasil orang lain, dan semua hasil tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 09 Desember 2019

Yang Menyatakan

METERAI TEMPEL

6000

Muhamad Irsan
NPM. 1517031096

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Muhamad Irsan, lahir di Way Kanan pada tanggal 21 Juli 1997. Penulis merupakan anak ketujuh dari delapan bersaudara yang lahir dari pasangan Bapak Sammoko dan Ibu Susanti.

Penulis menempuh pendidikan sekolah dasar di SD Negeri 2 Bhakti Negara Kecamatan Baradatu Kabupaten Way Kanan pada tahun 2003-2009, kemudian melanjutkan ke jenjang sekolah menengah pertama di SMP Negeri 1 Baradatu Kecamatan Baradatu Kabupaten Way Kanan pada tahun 2009-2012, dan jenjang sekolah menengah atas di SMA Negeri 1 Bukit Kemuning Kabupaten Lampung Utara pada tahun 2012-2015. Pada tahun 2015, Penulis diterima sebagai mahasiswa S1 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN) dan merupakan salah satu mahasiswa penerima Beasiswa Bidik Misi.

Selama menempuh pendidikan di Universitas Lampung penulis aktif di Organisasi tingkat Jurusan yaitu Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (Himatika) pada tahun 2016, ditingkat Fakultas yaitu Rois FMIPA Unila pada tahun 2017 dan Badan Eksekutif Mahasiswa (BEM) FMIPA Unila pada tahun 2018, serta di tingkat Universitas yaitu Bina Rohani Mahasiswa (Birohmah) pada tahun 2016.

Pada tahun 2018, Penulis melaksanakan Praktik Kerja Lapangan (PKL) di Kantor Badan Kependudukan dan Keluarga Berencana Nasional (BKKBN) Provinsi Lampung, sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu di dunia kerja. Dan pada tahun yang sama Penulis juga melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Nyampir, Kecamatan Bumi Agung, Kabupaten Lampung Timur, sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat.

KATA INSPIRASI

"Dan barangsiapa yang bertakwa kepada Allah, niscaya Allah menjadikan baginya kemudahan dalam urusannya."

(Q.S. At-Talaq: 4)

"Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. Maka apabila kamu telah selesai (dari suatu urusan), kerjakanlah dengan sungguh-sungguh (urusan yang lainnya). Dan hanya kepada Tuhanmu lah hendaknya kamu berharap."

(QS. Al-Insyirah : 6-8)

"Barangsiapa yang kehidupan akhirat menjadi tujuan utamanya, niscaya Allah akan meletakan rasa cukup di dalam hatinya dan menghimpun semua urusan untuknya serta datanglah dunia kepadanya dengan hina. Tapi barangsiapa yang kehidupan dunia menjadi tujuan utamanya, niscaya Allah meletakkan kefakiran dihadapan kedua matanya dan mencerai-beraikan urusannya dan dunia tidak akan datang kepadanya, kecualisekedar yang telah ditetapkan untuknya "

(HR. Tirmidzi)

"Niatkan karena Allah"

(Muhamad Irsan)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillah, puji syukur kehadirat Allah SWT yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang. Dengan segala kerendahan hati penulis persembahkan skripsi ini kepada:

Orang Tua Tercinta

Bapak, Mak Susanti dan Mak Khomsinah yang selalu mencurahkan seluruh tenaga dan pikiran untuk keberhasilan Penulis dalam menuntut ilmu, memberikan dukungan, bimbingan, nasihat, dan doa yang terus mengalir untuk kesuksesan Penulis.

Kakek dan Adik Tersayang

Mbak Sri Yuliati, Mas Ikhsan Soepomo, Mas Ichwan Waristo, Mbak Yulsan Warista, Mbak Iich Yulista, Mbak Iit Yulista, serta adikku tersayang Annisa Wayka yang senantiasa memberikan dukungan, motivasi, keceriaan, dan selalu memanjatkan doa untuk keberhasilan dan kesuksesan Penulis.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

atas bimbingan, nasihat dan motovasi dalam menyelesaikan skripsi.

Sahabat-sahabat Terbaik

yang selalu memberikan kebahagiaan serta keceriaan, terima kasih atas semua kenangan dan pengalaman terindah yang telah kita lalui bersama. Semoga dapat menjadi pembelajaran berharga untuk kehidupan kita yang lebih baik.

Almamater Tercinta, Universitas Lampung

SANWACANA

Puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT, yang telah memberikan rahmad dan hidayah-Nya kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Pemodelan Regresi 3-level dengan metode *Iterative Generalized Least Square*".

Penulis menyadari bahwa skripsi ini tidak akan terwujud tanpa adanya bantuan, bimbingan, dan doa dari berbagai pihak sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Dengan segala kerendahan hati penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu Dr. Khoirin Nisa, S.Si., M.Si., selaku dosen Pembimbing I yang selalu memberikan motivasi, bimbingan, pengarahan, dan saran kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi serta telah banyak membimbing selama proses perkuliahan.
2. Ibu Dra. Dorrah Aziz, M.Si., selaku Pembimbing II, terimakasih atas kesediaan memberikan bimbingan, saran, dan kritik dalam proses penyelesaian skripsi ini.
3. Bapak Drs. Rudi Ruswandi, M.Si., selaku Pembahas skripsi yang telah memberikan evaluasi dan saran bagi perbaikan skripsi penulis.
4. Bapak Drs. Eri Setiawan, M.Si., selaku pembimbing akademik, terimakasih atas bimbingan dan pembelajarannya selama ini.

5. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D., selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Bapak Drs. Suratman, M.Sc., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Seluruh dosen, staf, dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
8. Bapak, mamak, kakak, adik dan seluruh keluarga besar yang selalu memberi dukungan, motivasi, semangat, dan perhatian kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
9. Sahabat-sahabat terbaik yang selalu memberikan semangat kepada penulis dalam menyusun skripsi ini yang tidak dapat disebutkan satu persatu.
10. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2015 dan keluarga besar Matematika FMIPA Unila.
11. Seluruh pihak yang telah membantu dan terlibat dalam menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan, oleh karena itu kritik dan saran sangat penulis harapkan. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis dan bagi para pembaca.

Bandar Lampung, 09 Desember 2019

Penulis

Muhamad Irsan

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

Tabel Halaman

DAFTAR GAMBAR

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Dalam suatu penelitian, struktur data yang diperoleh terkadang merupakan data hirarki atau data yang diperoleh melalui *multistage sampling* dari populasi berjenjang. Variabel-variabel dapat didefinisikan dari setiap level. Sebagian variabel ini dapat diukur secara langsung dari level aslinya. Analisis dari data seperti ini disebut analisis data multilevel. Pemodelan regresi untuk data multilevel, disebut model regresi multilevel.

Data yang terstruktur hirarki merupakan data yang timbul karena individu-individu terkumpul dalam kelompok-kelompoknya, dimana individu-individu dalam kelompok yang sama memiliki karakteristik yang cenderung sama. Struktur hirarki mengindikasikan bahwa data yang dianalisis berasal dari beberapa level, dimana level yang lebih rendah tersarang pada level yang lebih tinggi. Analisis dari data seperti ini disebut sebagai analisis data multilevel. Dalam beberapa sumber penelitian model regresi multilevel dikenal dengan *hierarchical linier model* (Harlan, 2016).

Menggunakan ide dari Longford (1989), Goldstein (1995) mengusulkan menggunakan metode kuadrat terkecil umum (*generalized least square*) untuk menaksir parameter tetap pada model multilevel. Metode ini dinilai lebih baik dari metode sebelumnya karena model yang digunakan merupakan model yang telah disubtitusikan sehingga struktur varians-kovarians yang digunakan terdiri dari komponen level-1 dan level-2. Model yang digunakan adalah model dalam notasi matriks :

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{1.1}$$

dengan penaksir parameternya :

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{GLS}} = (\boldsymbol{X'V^{-1}X})^{-1}\boldsymbol{X'V^{-1}Y} \tag{1.2}$$

Penaksir parameter tersebut masih mengandung unsur parameter yang nilainya tidak diketahui yaitu pada matriks **V**, sehingga untuk mendapatkan nilai taksiran ini harus melalui proses iterasi. Sehingga metode penaksiran ini disebut dengan metode *Iterative Generalized Least Square* (IGLS) (Goldstein, 1995).

Merupakan hal yang menarik untuk dikaji lebih jauh terutama dalam penaksiran parameternya karena melibatkan parameter-parameter yang terkandung dalam level berbeda. Dalam penelitian ini, akan dibahas mengenai pemodelan regresi 3-level dengan menggunakan metode IGLS.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah :

Mengestimasi parameter model regresi 3-level dengan menggunakan metode *Iterative Generalized Least Square* (IGLS) pada data kepadatan penduduk di Provinsi Lampung pada tahun 2016 dan faktor-faktor yang mempengaruhinya.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah :

Dapat mengetahui estimasi parameter model regresi 3-level dengan menggunakan metode *Iterative Generalized Least Square* (IGLS) pada data kepadatan penduduk di Provinsi Lampung pada tahun 2016 dan faktor-faktor yang mempengaruhinya.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Analisis Regresi Linier

Analisis regresi linier merupakan suatu model yang digunakan untuk menganalisis hubungan antara variabel terikat (Y) dengan variabel bebas (X). Menurut Gujarati (2006) ada tiga tujuan dari model regresi yaitu yang pertama menjelaskan pola hubungan sebab akibat yang terjadi antara variabel terikat dan variabel bebas, tujuan kedua yaitu untuk mengetahui kontribusi tiap variabel bebas untuk menjelaskan variabel terikat dan yang ketiga adalah memprediksi nilai variabel terikat untuk beberapa nilai variabel bebas tertentu. Menurut Draper dan Smith (1992), persamaan model regresi dapat ditunjukan sebagai berikut :

$$Y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_p x_{pi} + \varepsilon_i \quad i = \text{indeks } (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (2.1)$$

Dengan

Y = variabel terikat

X = variabel bebas

α = intersep atau konstanta regresi

β = slope atau koefisien regresi

ε = galat

Dengan asumsi-asumsi pada analisis regresi adalah sebagai berikut:

1. Galat menyebar normal $\varepsilon_i \sim N\ (0, \sigma^2)$;

2. Ragam galat homogen $Var\ (\varepsilon_i) = \sigma^2;\ i = 1,2,\ldots, n$;

3. Nilai ε_i adalah bebas satu dengan yang lainnya $E\ (\varepsilon_i) = 0$ dan $(\varepsilon_i^2) = \sigma^2$.

4. X dan Y terkait secara linear, untuk setiap nilai X yang dihubungkan dengan nilai Y maka akan membentuk garis lurus.

Dalam melakukan analisis regresi, asumsi-asumsi tersebut perlu dipenuhi terlebih dahulu (Myers, 1990).

2.2 Regresi Multilevel

Data berstruktur hirarki yaitu data yang terdiri dari unit-unit yang di observasi bersarang atau terkomplekkan dalam unit level yang lebih tinggi. Data hirarki disebut juga data multilevel (Dewi, 2008).

Model regresi multilevel adalah model linier dengan variabel terikat yang nilainya tidak hanya dipengaruhi oleh variabel dengan efek tetap saja namun juga dipengaruhi oleh variabel dengan efek acak. Istilah model regresi multilevel menangkap dua hal dalam mengidentifikasikan model. Hal pertama, data yang sesuai untuk model berstruktur hirarki, dengan unit level 3 tersarang dalam unit level 2, unit 2 tersarang dalam unit level 1, dan seterusnya. Sedangkan hal kedua, parameter model tersebut terlihat seperti memiliki struktur hirarki (Raudenbush dan Bryk, 2002).

Analisis regresi 3-level mengkaji pola hubungan antara satu variabel respon dengan satu atau lebih variabel penjelas. Pada regresi multilevel, satu variabel respon hanya diukur pada level terendah dan variabel dan variabel penjelas dapat berbeda pada setiap level. Dalam model regresi 3-level dapat digolongkan menjadi beberapa bentuk sub model yaitu model intersep, model intersep acak (*random intersep model*) dan model kemiringan acak (*random slope model*).

2.2.1 Model Intersep Tanpa Variabel Bebas

Model intersep adalah model yang tidak memiliki variabel bebas dalam setiap levelnya atau sering disebut dengan *intersep only model*. Model itersep untuk level-1 dapat dituliskan sebagai berikut :

$$Y_{tij} = \beta_{0ij} + \varepsilon_{tij} \tag{2.2}$$

Model intersep untuk level-2 dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\beta_{0ij} = \gamma_{00j} + u_{0ij} \tag{2.3}$$

Model intersep untuk level-3 dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\gamma_{00j} = \alpha_{000} + w_{00j} \tag{2.4}$$

Dengan mensubtitusikan persamaan (2.2), (2.3) dan (2.4) diperoleh persamaan :

$$Y_{tij} = \alpha_{000} + w_{00j} + u_{0ij} + \varepsilon_{tij} \tag{2.5}$$

Dalam persamaan (2.5) hanya menguraikan variansi Y ke dalam 3 komponen yaitu varians error level-1 (ε_{tij}), varians error level-2 (u_{0ij}) dan varians error level-3 (w_{00j}).

2.2.2 Model Intersep Acak dengan Variabel Bebas

Menurut Fahrmeir dan Gerhard (1994), model intersep acak merupakan salah satu bentuk model regresi 3-level dimana koefisien intersep (perpotongan) dalam model bersifat acak, bukan tetap seperti pada model regresi biasa. Untuk pemodelan dapat diasumsikan terdapat P variabel bebas X pada level-1, Q variabel bebas pada level-2 dan K variabel bebas pada level-3. Model intersep acak dapat dijelaskan dengan model sebagai berikut:

- Untuk model level-1 :

$$Y_{tij} = \beta_{0ij} + \sum_{p=1}^{P} \beta_{pij} X_{ptij} + \varepsilon_{tij} \qquad (2.6)$$

Dengan :

Y_{tij} = variabel tak bebas untuk unit ke-t pada level-1 dalam unit ke-i pada level-2 dan unit ke-j pada level 3.

β_{0ij} = intersep untuk unit ke-i pada level-2 dan unit ke-j pada level-3.

β_{pij} = efek tetap variabel bebas ke-p untuk unit ke-i pada level-2 dan unit ke-j pada level-3.

X_{ptij} = variabel bebas ke-p di level-1 untuk unit ke-t pada level-1 dalam unit ke-i pada level-2 dan unit ke-j pada level-3.

ε_{tij} = variabel bebas ke-p di level-1 untuk unit ke-t pada level-1 dalam unit ke-i pada level-2 dan unit ke-j pada level-3 (residual level-1), diasumsikan berdistribusi N(0,σ_{ε}^2).

- Untuk model level-2

$$\beta_{0ij} = \gamma_{00j} + \sum_{q=1}^{Q} \gamma_{0qj} Z_{qij} + u_{0ij} \tag{2.7}$$

Dengan :

β_{0ij} = variabel tak bebas untuk unit ke-i pada level-2 dan unit ke-j pada level-3

γ_{00j} = intersep untuk unit ke-j pada level-3

γ_{0qj} = efek tetap untuk variabel bebas ke-q untuk unit k-j pada level-3

Z_{qij} = variabel bebas ke-q di level-2 untuk unit ke-i pada level-2 dan unit ke-j pada level-3

u_{0ij} = residual untuk unit ke-i pada level-2 dan unit ke-j pada level-3 (residual level-3), diasumsikan berdistribusi N(0,σ_{u}^2).

- Untuk model level-3

$$\gamma_{00j} = \alpha_{000} + \sum_{k=1}^{K} \alpha_{ook} S_{qj} + w_{00j} \tag{2.8}$$

Dengan :

Y_{00j} = variabel tak bebas untuk unit ke-j pada level-3

α_{000} = intersep

α_{ook} = efek tetap untuk variabel bebas ke-k

S_{qj} = variabel bebas ke-k di level-3 untuk unit ke-j pada level-3

w_{00j} = residual unit ke-j pada level-3 (residual level-3), diasumsikan berdistribusi N(0, σ_w^2).

Setelah diperoleh model pada setiap level dari 3 tingkatan level tersebut dapat disubtitusikan sebagai berikut :

$$Y_{tij} = \alpha_{000} + \sum_{p=1}^{P} \alpha_{p00} X_{ptij} + \sum_{q=1}^{Q} \alpha_{0p0} Z_{qij} + \sum_{k=1}^{K} \alpha_{ook} S_{qj} + w_{00j} + u_{0ij} + \varepsilon_{tij} \quad (2.9)$$

Y_{tij} merupakan penjumlahan dari parameter tetap dan parameter acak. Parameter dalam model yang akan diestimasi adalah α_{000}, α_{0p0}, α_{ook} serta σ_ε^2 menyatakan varians unit level-1, σ_u^2 menyatakan varians unit level-2 dan σ_w^2 menyatakan varians unit level-3.

2.2.3 Model kemiringan Acak (*Random Slope Model*)

Berbeda dengan model intersep acak, pada model kemiringan acak memungkinkan garis-garis regresi untuk tiap unit level-2 mempunyai kemiringan (*slope*) yang berbeda. Representasi multilevel dari model kemiringan acak dinyatakan dalam bentuk :

- Untuk model level-1 :

$$Y_{tij} = \beta_{0ij} + \sum_{p=1}^{P} \beta_{pij} X_{ptij} + \varepsilon_{tij} \qquad (2.10)$$

Dengan :

Y_{tij} = variabel tak bebas untuk unit ke-t pada level-1 dalam unit ke-i pada level-2 dan unit ke-j pada level 3.

β_{0ij} = intersep untuk unit ke-i pada level-2 dan unit ke-j pada level-3.

β_{pij} = kemiringan acak untuk variabel bebas ke p, p =.1,2,...,P.

X_{ptij} = variabel bebas ke-p untuk unit ke-t pada level-1 dalam unit ke-i pada level-2 dan unit ke-j pada level-3 dengan p =.1,2,...,P.

ε_{tij} = residual untuk unit ke-t pada level-1 dan unit ke-i pada level-2 dan unit ke-j pada level-3 (residual level-1), diasumsikan berdistribusi N(0, σ_{ε}^{2}),

- Untuk model level-2

$$\beta_{0ij} = \gamma_{00j} + \sum_{q=1}^{Q} \gamma_{0qj} Z_{qij} + u_{0ij}$$

$$\beta_{pij} = \gamma_{0qj} + u_{0ij} \qquad (2.11)$$

Dengan :

γ_{00j} = intersep

Z_{qij} = variabel bebas ke-q untuk unit ke-i pada level-2 dan unit ke-j pada level-3

u_{0ij} = residual untuk unit ke-i pada level-2 dan unit ke-j pada level-3, diasmusikan berdistribusi N(0,$\sigma_{\delta 0}^2$).

u_{pij} = residual untuk unit ke-p pada level-2 dan unit ke-j pada level-3, diasmusikan berdistribusi N(0,$\sigma_{\delta 0}^2$).

γ_{0qj} = galat dari Z_{qij} pada level-2.

- Untuk model level-3

$$\gamma_{00j} = \alpha_{000} + \sum_{k=1}^{K} \alpha_{ook} S_{kj} + w_{00j}$$

$$\gamma_{0qj} = \alpha_{00k} + w_{00j}$$

$$\gamma_{p0j} = \alpha_{p00} + w_{p0j} \tag{2.12}$$

Dengan :

α_{000} = intersep

S_{kj} = variabel bebas ke-k untuk unit ke-j pada level-3

w_{00j} = residual unit ke-j pada level-3, diasumsikan berdistribusi N(0, σ_w^2).

w_{0qj} = residual dari S_{kj} pada level-3.

2.3 *Generalized Least Square* (GLS)

Metode penduga *Ordinary Least Square* (OLS) merupakan suatu metode yang digunakan untuk menduga koefisien regresi klasik dengan cara meminimumkan jumlah kuadrat galat ($\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$) :

Estimator dalam OLS diperoleh dengan cara :

$$\sum \varepsilon_i^2 = \sum (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_{i1} - \beta_2 X_{i2} - \cdots - \beta_k X_{ip})^2$$

Dengan $\sum \varepsilon_i^2$ adalah jumlah kuadrat galat (JKG).

Pada notasi matriks jumlah kuadrat galat, $\sum \varepsilon_i^2$ dapat ditulis sebagai

$$\boldsymbol{\varepsilon_i'\varepsilon_i} = [\varepsilon_1 \ \ \varepsilon_2 \ \ \dots \ \ \varepsilon_n] \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_n^2 = \sum \varepsilon_i^2$$

Berdasarkan (1.1) diperoleh :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta} \tag{2.13}$$

Oleh karena itu perkalian matriks galat menjadi :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon_i'\varepsilon_i} &= (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta})'(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta}) \\ &= (\boldsymbol{Y}' - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta}')(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta}) \\ &= \boldsymbol{Y'Y} - \boldsymbol{Y'X\beta} - \boldsymbol{\beta'X'Y} - \boldsymbol{\beta'X'X\beta} \\ &= \boldsymbol{Y'Y} - \boldsymbol{2Y'X\beta} - \boldsymbol{\beta X'X\beta} \end{aligned}$$

Untuk meminimumkan $\boldsymbol{\varepsilon_i'\varepsilon_i}$, maka $\boldsymbol{\varepsilon_i'\varepsilon_i}$ diturunkan terhadap β sehingga diperoleh persamaan normal.

$$\frac{\partial J}{\partial \beta_0} = -2\sum\left(Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_{i1} - \beta_2 X_{i2} - \cdots - \beta_k X_{ip}\right) = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial \beta_1} = -2\sum\left(Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_{i1} - \beta_2 X_{i2} - \cdots - \beta_k X_{ip}\right) X_{i1} = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial \beta_2} = -2\sum\left(Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_{i1} - \beta_2 X_{i2} - \cdots - \beta_k X_{ip}\right) X_{i2} = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial J}{\partial \beta_p} = -2\sum\left(Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_{i1} - \beta_2 X_{i2} - \cdots - \beta_k X_{ip}\right) X_{ip} = 0$$

Setelah disusun kembali dan mengganti semua parameter dengan estimatornya, sistem persamaan ini dapat ditulis sebagai berikut :

$$n\beta_0 + \hat{\beta}_1 \sum X_{i1} + \hat{\beta}_2 \sum X_{i2} + \cdots + \hat{\beta}_k \sum X_{ik} = \sum Y_i$$

$$\hat{\beta}_0 \sum X_{i1} + \hat{\beta}_1 \sum X_{i1}^2 + \hat{\beta}_2 \sum X_{i2} X_{i1} + \cdots + \hat{\beta}_k \sum X_{ik} X_{i1} = \sum Y_i X_{i1}$$

$$\hat{\beta}_0 \sum X_{i2} + \hat{\beta}_1 \sum X_{i1} X_{i2} + \hat{\beta}_2 \sum X_{i2}^2 + \cdots + \hat{\beta}_k \sum X_{ik} X_{i2} = \sum Y_i X_{i2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\hat{\beta}_0 \sum X_{ik} + \hat{\beta}_1 \sum X_{i1} X_{ik} + \hat{\beta}_2 \sum X_{i2} X_{ik} + \cdots + \hat{\beta}_k \sum X_{ik}^2 = \sum Y_i X_{ik}$$

Persamaan tersebut disebut persamaan normal. Jika ditulis dalam matriks maka menjadi

$$: \begin{bmatrix} n & \sum X_{i1} & \sum X_{i2} & \dots & \sum X_{ik} \\ \sum X_{i1} & \sum X_{i1}^2 & \sum X_{i2} X_{i1} & \dots & \sum X_{ik} X_{i1} \\ \sum X_{i2} & \sum X_{i1} X_{i2} & \sum X_{i2}^2 & \dots & \sum X_{ik} X_{i2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum X_{ik} & \sum X_{i1} X_{ik} & \sum X_{i2} X_{ik} & \dots & \sum X_{ik}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ X_{11} & X_{21} & \cdots & X_{n1} \\ X_{12} & X_{22} & \cdots & X_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{1k} & X_{2k} & \cdots & X_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{X'X}) \qquad (\boldsymbol{\hat{\beta}}) \qquad (\boldsymbol{X'}) \qquad (\boldsymbol{Y})$$

Atau dapat ditulis :

$$(\boldsymbol{X'X})\boldsymbol{\hat{\beta}} = \boldsymbol{X'Y}$$

$$(\boldsymbol{X'X})^{-\mathbf{1}}(\boldsymbol{X'X})\boldsymbol{\hat{\beta}} = (\boldsymbol{X'X})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X'Y}$$

$$\boldsymbol{I\hat{\beta}} = (\boldsymbol{X'X})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X'Y}$$

$$\boldsymbol{\hat{\beta}} = (\boldsymbol{X'X})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X'Y}$$

Sehingga diperoleh penduga OLS yaitu :

$$\boldsymbol{\hat{\beta}} = (\boldsymbol{X'X})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X'Y} \qquad (2.14)$$

Asumsi-asumsi dalam model regresi linier $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ antara lain tidak adanya autokorelasi dan homoskedastisitas yaitu $\boldsymbol{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{I}$. Apabila asumsi-asumsi mengenai tidak adanya autokorelasi dan homoskedastisitas tidak terpenuhi, maka metode OLS tidak lagi tepat digunakan untuk mengestimasi parameter pada model regresi linier. Metode GLS digunakan untuk mengestimasi parameter model regresi linier berbentuk :

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.15}$$

Dengan **E(**$\boldsymbol{\varepsilon}$**) = 0,** $\boldsymbol{Var}(\boldsymbol{\varepsilon})$=$\boldsymbol{\sigma^2 V}$ dan $\boldsymbol{V}$ merupakan matriks berukuran *nxn.*

Pelanggaran asumsi tidak adanya autokorelasi dan homoskedastisitas akan diselesaikan dengan mentranformasikan data pengamatan model regresi sehingga memenuhi asumsi-asumsi metode *Ordinary Least Square* (OLS). Matriks kovariansi galat berbentuk $\boldsymbol{\sigma^2 V}$ dengan **V** merupakan matriks non singular dan definit positif sehingga terdapat matriks **K** simetrik non singular berukuran nxn dengan $\boldsymbol{K'K} = \boldsymbol{KK} = \boldsymbol{V}$**.**

Didefinisikan variabel-variabel baru sebagai berikut :

$$\boldsymbol{Y}^* = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{Y},\ \boldsymbol{X}^* = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{\varepsilon}^* = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.16}$$

Sehingga model regresi $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ menjadi $\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}$ atau

$\boldsymbol{Y}^* = \boldsymbol{X}^*\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}^*$**.**

Galat pada model yang ditranformasikan memiliki nilai harapan nol, yaitu :

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varepsilon}^*) = \boldsymbol{K}^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{0}$$

Dengan demikian, matriks kovarian dari ε^* dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}^*) &= \boldsymbol{E}\{[\boldsymbol{\varepsilon}^* - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varepsilon}^*)][\boldsymbol{\varepsilon}^* - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varepsilon}^*)]'\} \\
&= \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varepsilon}^*\boldsymbol{\varepsilon}^{*\prime}) \\
&= \boldsymbol{E}(\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{K}^{-1}) \\
&= \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}')\boldsymbol{K}^{-1} \\
&= \boldsymbol{\sigma^2}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{V}\boldsymbol{K}^{-1}
\end{aligned}$$

$$= \boldsymbol{\sigma^2 K^{-1} K K K^{-1}}$$

$$= \boldsymbol{\sigma^2 I}$$

Setelah ditransformasikan ternyata model regresi memenuhi asumsi regresi klasik tidak adanya autokorelasi dan homoskedasitas yaitu $\boldsymbol{Var}\,(\boldsymbol{\varepsilon}^*) = \boldsymbol{\sigma^2 I}$ **.** Dengan demikian dapat digunakan langkah-langkah pada metode OLS untuk mencari parameter model regresi GLS.

Akan dicari estimator dari parameter yang meminimumkan bentuk kuadrat :

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\varepsilon}^{*\prime}\boldsymbol{\varepsilon}^* = (\boldsymbol{Y}^* - \boldsymbol{X}^*\boldsymbol{\beta})'(\boldsymbol{Y}^* - \boldsymbol{X}^*\boldsymbol{\beta}) \tag{2.17}$$

Analogi dengan metode OLS, diperoleh persamaan normal metode GLS dalam lambang matriks berbentuk :

$$(\boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{X}^*)\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{X}^{*\prime}\boldsymbol{Y}^*$$

$$\left((\boldsymbol{K^{-1}X})'(\boldsymbol{K^{-1}X})\right)\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{K^{-1}X})'\boldsymbol{K^{-1}Y}$$

$$(\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{K'K})^{-1}\boldsymbol{X})\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{X}'(\boldsymbol{K'K})^{-1}\boldsymbol{Y}$$

$$(\boldsymbol{X'V^{-1}X})\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{X'V^{-1}Y}$$

$$(\boldsymbol{X'V^{-1}X})^{-1}(\boldsymbol{X'V^{-1}X})\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X'V^{-1}X})^{-1}\boldsymbol{X'V^{-1}Y}$$

$$\boldsymbol{I}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X'V^{-1}X})^{-1}\boldsymbol{X'V^{-1}Y}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X'V^{-1}X})^{-1}\boldsymbol{X'V^{-1}Y}$$

Sehingga diperoleh estimator untuk GLS yaitu :

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{GLS}} = (\boldsymbol{X'V^{-1}X})^{-1}\boldsymbol{X'V^{-1}Y} \tag{2.18}$$

Dengan Var $(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{GLS}}) = \boldsymbol{\sigma^2}\left((\boldsymbol{K^{-1}X})'(\boldsymbol{K^{-1}X})\right)^{-1}$

$$= \boldsymbol{\sigma^2}(\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{K'K})^{-1}\boldsymbol{X}')^{-1}$$

$$= \boldsymbol{\sigma^2}(\boldsymbol{X'V^{-1}X})^{-1}$$

2.4 Uji Asumsi

2.4.1 Uji Normalitas

Uji normalitas adalah uji untuk melihat apakah data berdistribusi normal atau tidak. Uji statistik yang sering digunakan untuk menguji normalitas adalah uji Kolmogorov-Smirnov. Uji Kolmogorov-Smirnov bekerja dengan cara membandingkan dua distribusi atau sebaran data, yaitu distribusi yang dihipotesiskan dan distribusi yang teramati. Apabila distribusi yang teramati mirip dengan distribusi yang dihipotesiskan, maka dapa disimpulkan bahwa data yang doamati berdistribusi atau sebaran normal (Kurniawan, 2008). Selain uji Kolmogorov-Smirnov, uji normalitas juga dapat dilakukan dengan melihat *normal probability plot*.

2.4.2 Uji Autokorelasi

Uji autokolerasi yang dilakukan penelitian ini bertujuan untuk mengetahui apakah dalam sebuah model regresi linier ada kolerasi antara kesalahan penganggu pada periode t dengan kesalahan pada periode t-1 (sebelumnya). Jika terjadi kolerasi, maka dinamakan ada problem autokorelasi. Tentu saja model regresi yang baik adalah regresi yang bebas dari autokolerasi (Santoso, 2012). Pada prosedur pendeteksian masalah autokolerasi dapat digunakan besaran Durbin-Waston. Untuk memeriksa ada tidaknya autokolerasi, maka dilakukan uji Durbin-Watson dengan keputusan sebagai berikut:

- Jika (DW) < d_l, maka ho ditolak
- Jika (DW) > d_u , maka ho diterima
- Jika d_l < (DW) < d_u, maka tidak dapat diambil kesimpulan

Uji dilakukan dengan menggunakan uji Durbin-Watson, dengan rumus :

$$DW = \frac{\sum(e_t - e_{t-1})}{\sum e_t^2} \tag{2.19}$$

Dengan DW : statistik uji Durbin-Watson

e_t : galat pada pengamatan ke-t

2.4.3 Uji Multikolinieritas

Uji multikolinieritas adalah uji untuk melihat ada atau tidaknya korelasi yang tinggi antara variabel-variabel bebas dalam suatu model regresi linier berganda. Uji statistik yang sering digunakan untuk menguji gangguan multikolinieritas adalah *Variance Inflation Factor* (VIF). VIF dapat diinterpretasikan akibat dari korelasi antar variabel bebas ke-*i* pada ragam penduga koefisien regresi.

Perhitungan VIF adalah sebagai berikut :

$$VIF = \frac{1}{1-R_i^2} \text{ ; dimana } i = 1,2, \ldots ,p$$

Pada uji statistik VIF, apabila nilai VIF lebih besar dari 10 mengindikasikan adanya multikolinieritas yang serius (Zulmi, 2011).

2.5 Pemilihan Model Terbaik

Dalam regresi multilevel, pemilihan model terbaik dilakukan dengan melihat nilai deviasi. Deviasi merupakan suatu ukuran yang dapat digunakan untuk menentukan kesesuaian suatu model. Menurut Tantular (2009), untuk memilih model regresi multilevel yang terbaik dapat menggunakan uji rasio *likelihood* atau disebut juga sebaran deviasi yaitu ukuran untuk menentukan cocok atau tidaknya suatu model. Perhitungan untuk pengujian ini adalah selisih nilai deviasi antara dua model atau *diff* yaitu sebagai berikut :

$$Diff = -2\ log_e \left(\frac{l_0}{l_1}\right) \tag{2.20}$$

Dengan :

l_0 = nilai deviasi untuk *null model*

l_1 = nilai deviasi untuk *full model*

Menurut Hox (2010), semakin kecil nilai deviasi pada model tersebut maka model tersebut dikatakan semakin cocok dan apabila nilai $diff > X^2_{(a,db)}$ maka tolak H_0, dimana db merupakan selisih jumlah parameter dari kedua model. Sehingga dapat disimpulkan bahwa efek acak signifikan, artinya terdapat keragaman atau variasi variabel dependen yang signifikan antar kelompoknya.

2.6 Koefisien Korelasi Interklas

Korelasi interklas dapat diperoleh pada setiap level kelompok. Pada model regresi tiga level terdapat dua korelasi interklas (Goldstein, 1999). Korelasi interklas menunjukan proporsi kovarian yang dapat dijelaskan oleh struktur kelompok dalam populasi (Hox, 2002). Korelasi interklas dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\rho = \frac{\sigma^2_{w00j}}{\sigma^2_{w00j}+\sigma^2_{u0ij}+\sigma^2_{\varepsilon tij}} \qquad 0 \leq \rho \leq 1 \qquad (2.21)$$

Dengan σ^2_{w00j} adalah varian dari galat level-3, σ^2_{u0ij} adalah varian galat level-2 dan varian galat level-1.

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung pada semester genap tahun ajaran 2018/2019.

3.2 Data Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder yang diperoleh dari Badan Pusat Statistik Provinsi Lampung tahun 2017. Unit analisis pada penelitian level 1 adalah 13 Kabupaten di Provinsi Lampung, Unit analisis pada penelitian level 2 adalah 188 Kecamatan di Provinsi Lampung, sedangkan Unit analisis pada penelitian level 3 adalah 2182 Desa di Provinsi Lampung. Variabel yang diteliti adalah kepadatan penduduk, rasio jenis kelamin, jarak antar desa ke pusat kota, pertumbuhan penduduk, pendapatan asli kecamatan, indeks pembangunan manusia, dan laju pertumbuhan ekonomi. Data yang di teliti adalah data hirarki dengan struktur data berikut ini :

Tabel 1. Struktur data penelitian

Variabel Terikat	Variabel bebas level-1 (desa)		Variabel bebas level-2 (kecamatan)		Variabel bebas level-3 (kabupaten)	
Y	X_1	X_2	Z_1	Z_2	S_1	S_2
$Y_{111}\ Y_{211} \cdots Y_{n11}$ $Y_{121}\ Y_{221} \cdots Y_{n21}$ $Y_{131}\ Y_{231} \cdots Y_{n31}$ $\vdots$ $Y_{1n1}\ Y_{2n1} \cdots Y_{nn1}$	$X_{1111}\ X_{1211} \cdots X_{1n11}$ $X_{1121}\ X_{1221} \cdots X_{1n21}$ $X_{1131}\ X_{1231} \cdots X_{1n31}$ $\vdots$ $X_{11n1}\ X_{12n1} \cdots X_{1nn1}$	$X_{2111}\ X_{2211} \cdots X_{2n11}$ $X_{2121}\ X_{2221} \cdots X_{2n21}$ $X_{2131}\ X_{2231} \cdots X_{2n31}$ $\vdots$ $X_{21n1}\ X_{22n1} \cdots X_{2nn1}$	Z_{111} Z_{121} Z_{131} $\vdots$ Z_{1n1}	Z_{211} Z_{221} Z_{231} $\vdots$ Z_{2n1}	S_{11}	S_{21}
$Y_{112}\ Y_{212} \cdots Y_{n12}$ $Y_{122}\ Y_{222} \cdots Y_{n22}$ $Y_{132}\ Y_{232} \cdots Y_{n32}$ $\vdots$ $Y_{1n2}\ Y_{2n2} \cdots Y_{nn2}$	$X_{1112}\ X_{1212} \cdots X_{1n12}$ $X_{1122}\ X_{1222} \cdots X_{1n22}$ $X_{1132}\ X_{1232} \cdots X_{1n32}$ $\vdots$ $X_{11n2}\ X_{12n2} \cdots X_{1nn2}$	$X_{2112}\ X_{2212} \cdots X_{2n12}$ $X_{2122}\ X_{2222} \cdots X_{2n22}$ $X_{2132}\ X_{2232} \cdots X_{2n32}$ $\vdots$ $X_{21n2}\ X_{22n2} \cdots X_{2nn2}$	Z_{112} Z_{122} Z_{132} $\vdots$ Z_{1n2}	Z_{212} Z_{222} Z_{232} $\vdots$ Z_{2n2}	S_{12}	S_{22}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$Y_{11n}\ Y_{21n} \cdots Y_{n1n}$ $Y_{12n}\ Y_{22n} \cdots Y_{n2n}$ $Y_{13n}\ Y_{23n} \cdots Y_{n3n}$ $\vdots$ $Y_{1nn}\ Y_{2nn} \cdots Y_{nnn}$	$X_{111n}\ X_{121n} \cdots X_{1n1n}$ $X_{112n}\ X_{122n} \cdots X_{1n2n}$ $X_{113n}\ X_{123n} \cdots X_{1n3n}$ $\vdots$ $X_{11nn}\ X_{12nn} \cdots X_{1nnn}$	$X_{211n}\ X_{221n} \cdots X_{2n1n}$ $X_{212n}\ X_{222n} \cdots X_{2n2n}$ $X_{213n}\ X_{223n} \cdots X_{2n3n}$ $\vdots$ $X_{21nn}\ X_{22nn} \cdots X_{2nnn}$	Z_{21n} Z_{22n} Z_{23n} $\vdots$ Z_{2nn}	Z_{21n} Z_{22n} Z_{23n} $\vdots$ Z_{2nn}	S_{1n}	S_{2n}

1. Variabel terikat : kepadatan penduduk (Y)
2. Variabel bebas :
   a. Level 1 (Desa) : rasio jenis kelamin (X_1), jarak antar desa ke pusat Kota (X_2).
   b. Level 2 (Kecamatan) : pertumbuhan penduduk (Z_1), dan pendapatan asli kecamatan (Z_2).
   c. Level 3 (Kabupaten) : indeks pembangunan manusia (S_1) dan laju pertumbuhan ekonomi (S_2).

3.3 Metode Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan dengan studi pustaka yaitu dengan pengkajian secara teoritis dan praktik komputasi. Langkah-langkah penelitian yang akan dilakukan dalam penelitian ini sesuai dengan tujuan yang ingin dicapai yaitu :

1. Melakukan analisis deskripsi pada keseluruhan data penelitian.
2. Mengestimasi parameter model regresi 3-level dengan menggunakan metode *Iterative Generalized Least Square* (IGLS) dengan cara sebagai berikut :
    a. Memilih struktur intersep acak.
    b. Memilih struktur kemiringan acak.
    c. Memilih struktur efek tetap.
    d. Penyusunan model akhir
    e. Uji signifikan parameter
    f. Melakukan uji asumsi model
        a. Uji normalitas
        b. Uji multikolinieritas
        c. Uji autokorelasi
    g. Mengevaluasi model akhir pada data kepadatan penduduk Provinsi Lampung tahun 2016.

V. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan pada bab sebelumnya, diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. Faktor-faktor yang mempengaruhi kepadatan penduduk di Provinsi Lampung adalah rasio jenis kelamin, jarak tempuh desa, dan indeks pembangunan manusia.
2. Berdasarkan hasil dari pemodelan regresi 3-level diperoleh model sebagai berikut:

   Kepadatan penduduk = – 0,026 rasio jenis kelamin – 0,032 jarak tempuh desa + 0,295 indeks pembangunan manusia.

   Yang artinya bahwa apabila terjadi peningkatan terhadap rasio jenis kelamin akan mempengaruhi kepadatan penduduk sebesar -0,026. Apabila terjadi peningkatan jarak tempuh desa akan mempengaruhi kepadatan penduduk sebesar -0,032 dan apabila terjadi peningkatan indeks pembangunan manusia akan mempengaruhi kepadatan penduduk sebesar 0,295.
3. Nilai korelasi interklas antar kabupaten adalah sebesar 0,262 dan ditingkat kecamatan sebesar 0,342 yang artinya proporsi keragaman variabel kepadatan penduduk dapat dijelaskan oleh variasi antar kecamatan sebesar 34,2% dan antar kebupaten sebesar 26,2%.

DAFTAR PUSTAKA

Badan Pusat Statistik. 2018. Provinsi Lampung dalam Angka 2018. CV. Jaya Wijaya, Bandar Lampung.

Dewi, A.L. 2008. Estimasi Parameter Logistik Multilevel. Skripsi. Jurusan Statistika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia, Depok.

Ghozali, I. 2016. *Aplikasi Analisis Multivariete Dengan Program IBM SPSS 23 (Edisi 8)*. Cetakan ke VIII. Semarang :Badan Penerbit Universitas Diponegoro.

Goldstein, H. 2011. *Multilevel Statistical Models*. Ed. Ke-2. E-book of Arnold, London.

Gujarati, D. 2006. *Dasar-Dasar Ekonometrika*. Erlangga, jakarta.

Harlan, J. 2016. *Analisis Multilevel*. Gunadarma, Jakarta.

Hox, J.J. 2010. *Multilevel Analysis: Techniques and Applications*. Routledge, Great Brilian.

Kurniawan, D. 2008. *Regresi Linier*. R Development Core Team, Australis.

Myers, R.H. 1990. *Classical and Modern Regression with Application*. Ed ke-2. PWS.

Raudenbush, S.W., dan Bryk, A.S. 2002, *Hierarchical Linear Models: Applications and Data Analysis Methods*. Sage, Thousand Oaks.

Santoso, S. 2012. *Panduan Lengkap SPSS Versi 20*. Jakarta: PT Elex Media Komputindo.

Tantular, B. 2009. Penerapan Model Regresi Multilevel Pada Data Pendidikan dan Data Nilai Ujian. Tesis. Jurusan Statistika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Instutut Pertanian Bogor, Bogor.

Zulmi, R. 2011. Pengaruh Luas Lahan, Tenaga Kerja, Penggunaan Benih dan Pupuk Terhadap Produksi Padi di jawa Tengah Tahun 1994-2008. Skripsi. Jurusan Ilmu Ekonomi dan Studi Pembangunan Fakultas Ekonomi Universitas Diponegoro, Semarang.