GABUNGAN RUANG METRIK HIPERKONVEKS DAN DIVERSITAS

(Skripsi)

Oleh
Monalisa

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

ABSTRAK

GABUNGAN RUANG METRIK HIPERKONVEKS DAN DIVERSITAS

Oleh

MONALISA

Ruang metrik hiperkonveks diperkenalkan oleh Aronszajn dan Panitchpakdi pada tahun 1956. Sebuah ruang metrik (X, d) disebut hiperkonveks jika setiap koleksi bola tertutup $\{B(x_i, x_j)\}_{i \in I}$ dengan $d\,(x_i, x_j) \leq r_i + r_j$ mempunyai irisan yang tidak kosong yaitu $\bigcap_i B(x_i, x_j) \neq \emptyset$. Sebuah diversitas (X, δ) disebut hiperkonveks jika untuk semua $r : \langle X \rangle \to [0, \infty)$ berlaku $\delta(\bigcup_{A \in \mathfrak{A}}) \leq \sum_{A \in \mathfrak{A}} r(A)$, untuk setiap himpunan bagian berhingga $\mathfrak{A}$ dari $\langle A \rangle$ terdapat $z \in X$ dengan $\delta(A \cup \{z\}) \leq r(A)$. Penelitian ini bertujuan menggabungkan dua diversitas hiperkonveks dan ruang metrik hiperkonveks dengan irisan tak kosong sehingga ruang yang dihasilkan tetap hiperkonveks. Gabungan dua diversitas hiperkonveks dan ruang metrik hiperkonveks juga hiperkonveks jika ruang tersebut *admissible*. Kemudian, diberikan contoh gabungan ruang diversitas hiperkonveks dan metrik hiperkonveks.

Kata Kunci : ruang metrik, diversitas hiperkonveks, ruang metrik hiperkonveks

ABSTRACT

ON THE GLUING OF HYPERCONVEX METRICS AND DIVERSITIES

By

MONALISA

Hyperconvex spaces were introduced by Aronszajn and Panitchpakdi in 1956. A metric space (X, d) is called hyperconvex if every collection of closed balls $\{B(x_i, x_j)\}_{i \in I}$ with $d\ (x_i, x_j) \leq\ r_i + r_j$ has non-empty intersection $\bigcap_i B(x_i, x_j)\ \neq \emptyset$. A diversity (X, δ) is said hyperconvex if for all $r : \langle X \rangle \to [0, \infty)$ such that $\delta(\bigcup_{A \in \mathfrak{A}}) \leq \sum_{A \in \mathfrak{A}} r(A)$, for each finite subset $\mathfrak{A}$ of $\langle A \rangle$ there is $z \in X$ with $\delta(A \cup \{z\}) \leq r(A)$. In this research we consider two hyperconvex diversities and hyperconvex metric spaces with non-empty intersection such that the resulting space remains hyperconvex. Combination of two hyperconvex metric spaces and hyperconvex metric spaces is hyperconvex if the spaces is admissible. Furthermore, we show an example of hyperconvex diversity and hyperconvex metric spaces.

Keywords : metric spaces, hyperconvex diversity, hyperconvex metric spaces

GABUNGAN RUANG METRIK HIPERKONVEKS DAN DIVERSITAS

Oleh

Monalisa

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

Judul Skripsi : **GABUNGAN RUANG METRIK HIPERKONVEKS DAN DIVERSITAS**

Nama Mahasiswa : *Monalisa*

Nomor Pokok Mahasiswa : 1517031189

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Amanto, S.Si., M.Si.	**Prof. Dra. Wamiliana, MA., Ph.D.**
NIP. 19730314 200012 1 002	NIP. 19631108 198902 2 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, MA., Ph.D.
NIP. 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	: **Amanto, S.Si., M.Si.**	....
Sekretaris	: **Prof. Dra. Wamiliana, MA., Ph.D.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	: **Dr. La Zakaria, S.Si., M.Sc.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Drs. Suratman, M.Sc.
NIP. 19640604 199003 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **30 Juli 2019**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Monalisa
NPM	: 1517031189
Jurusan	: Matematika
Judul Skripsi	: GABUNGAN RUANG METRIK HIPERKONVEKS DAN DIVERSITAS

Dengan ini menyatakan bahwa dalam skripsi ini tidak terdapat karya yang telah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu perguruan tinggi dan sepengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebut dalam daftar pustaka.

Apabila di kemudian hari pernyataan ini tidak benar, saya bersedia menerima sanksi akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 31 Juli 2019
Yang menyatakan,

Monalisa
NPM 1517031189

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Monalisa Surbakti, dilahirkan di Jakarta pada tanggal 13 Agustus 1997. Penulis adalah putri kedua dari Bapak Thomas Surbakti dan Ibu Diana Ginting.

Penulis menyelesaikan pendidikan dasar di SD Negeri 04 Pagi pada tahun 2009, pendidikan menengah pertama di SMP Advent XV Ciracas pada tahun 2012, dan pendidikan menengah atas di SMA Advent Purwodadi pada tahun 2015. Pada tahun 2015 penulis diterima di Universitas Lampung sebagai mahasiswa di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam melalui jalur SBMPTN.

Pada tahun 2018 penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di KPP Pratama Kedaton dan pada tahun yang sama penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Teluk Dalem, Kecamatan Mataram Baru, Kabupaten Lampung Timur.

KATA INSPIRASI

"He gives power to the weak. He increases the strength of him who has no might."

(Isaiah 40:29)

"*When you want to give up, remember why you started"*

(Anonymous)

PERSEMBAHAN

Segala puji bagi Tuhan Yang Maha Esa yang senantiasa memberkati dalam setiap langkah perjuanganku.

Dengan ketulusan hati dan rasa sayang yang tiada henti, ku persembahkan karyaku ini sebagai tanda cinta, kasih sayang, dan terima kasihku kepada:

Kedua orangtua tercinta, yang telah membesarkan dan mendidik dengan penuh kasih sayang dan pengorbanan yang tulus serta selalu memberikan semangat dan doa. Seluruh keluarga besar yang terus memberikan dukungan dan doanya kepadaku.

Untuk dosen-dosen yang telah membimbing dan mengajarkan ilmu pengetahuan dengan penuh kesabaran.

Semua sahabatku dan teman-teman angkatan 2015 Jurusan Matematika yang begitu tulus menyayangiku dengan segala kekuranganku, dan selalu memberikan semangat.

Almamater Universitas Lampung tercinta.

SANWACANA

Puji syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa yang telah memberikan karunia serta kasih-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Gabungan Ruang Metrik Hiperkonveks dan Diversitas". Skripsi ini disusun untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa dalam penyusunan skripsi ini tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih yang tulus kepada:

1. Bapak Amanto, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing I yang telah bersedia meluangkan waktu untuk membimbing dengan penuh kesabaran, memberikan sumbangan pemikiran, perhatian, kritik, saran, motivasi, dan semangat selama penyusunan skripsi sehingga skripsi ini dapat diselesaikan dengan baik.
2. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, MA., Ph.D., selaku Dosen Pembimbing II sekaligus Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung yang telah bersedia meluangkan waktu untuk membimbing dengan penuh kesabaran, memberikan sumbangan pemikiran, perhatian, kritik, saran dan motivasi kepada penulis selama penyusunan skripsi sehingga skripsi ini dapat diselesaikan dengan baik.

3. Bapak Dr. La Zakaria, S.Si., M.Sc., selaku Dosen Pembahas yang telah memberikan sumbangan pemikiran, perhatian, kritik, dan saran yang membangun kepada penulis sehingga skripsi ini dapat diselesaikan dengan baik.
4. Bapak Subian Saidi, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah memberikan arahan dan masukan selama menempuh pendidikan di Jurusan Matematika.
5. Bapak Drs. Suratman, M.Sc., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Bapak dan Ibu Dosen Jurusan Matematika Universitas Lampung yang telah memberikan bekal ilmu pengetahuan kepada penulis.
7. Keluargaku, yaitu Ibu Diana Ginting dan Bapak Thomas Surbakti, kakakku Gloria Chika dan adikku Egi Aninta, serta semua saudara-saudaraku yang telah memberikan dorongan dan semangat.
8. Sahabat-sahabat terbaikku: Yuniarti, Pratiwi, Akika, Dewi Sundari, Diana Dwi Mafiro, Ratri Bintang, Rizka Fitriana, dan seluruh angkatan 2015 Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung. Semoga kita bisa mencapai semua yang dicita-citakan.

Bandar Lampung, 30 Juli2019
Penulis,

Monalisa

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Dalam ilmu matematika, khususnya dalam bidang analisis dikenal berbagai macam ruang, di antaranya adalah ruang metrik. Ruang metrik merupakansalah satu konsep penting dalam analisis. Ruang metrik merupakan suatu himpunan tak kosong$X$, yang dilengkapi dengan fungsi yang memetakan setiap anggota$X \times X$ke suatu bilangan real tak negatif dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Fungsi inilah yang kemudian dikenal sebagai metrik pada X. Lebih lanjut,berawal dari pengertian ruang metrik, banyak hal yang dapat dikaji. Salah satu kajian dalam ruang metrik yang terus berkembang dan cukup menarik hingga saat ini adalah ruang metrik hiperkonveks.

Penelitian tentang ruang hiperkonveks berawal dari Aronszajn dan Panitchpakdi pada tahun 1956. Mereka membuktikan bahwa ruang hiperkonveks sama dengan ruang metrik injektif. Meskipun konsep mengenai hiperkonveks telah dikenal sejak lama, namun penelitian-penelitian terkait ruanghiperkonveks terus bermunculan(Nasyithoh, 2015).

Pada tahun 2014, Piatek meneliti hubungan antara hiperkonveks diversitas dan ruang metrik. Sebuah ruang metrik (X, d) disebut hiperkonveks jika setiap koleksi bola tertutup $\{B(x_i, r_i)\}_{i \in I}$ dengan $d\ (x_i, x_j) \leq r_i + r_j$ mempunyai irisan yang tak kosong yaitu$\bigcap_i B(x_i, r_i) \neq \emptyset$.

Sebuah himpunan tak kosong disebut diversitas jika :

(i) $\delta(A) = 0$ jika dan hanya jika A *singleton*.

(ii) $\delta(A \cup C) \leq \delta(A \cup B) + \delta(B \cup C)$, untuk $A, B, C \in \langle X \rangle$.

Sedangkan sebuah diversitas disebut hiperkonveksjika untuk semua

r: $\langle X \rangle \rightarrow [0, \infty)$ berlaku$\delta(\bigcup_{A \in \mathfrak{A}}) \leq \sum_{A \in \mathfrak{A}} r(A)$.

Pada penelitian ini, akan diselidiki dua diversitas hiperkonveks dengan irisan tak kosong dan apakah ada cara untuk menggabungkan kedua diversitas hiperkonveks tersebut sehingga hasil yang digabungkan tetap hiperkonveks. Akan diselidiki juga cara menggabungkan dua ruang metrik hiperkonveks sehingga hasil yang digabungkan tetap hiperkonveks.

1.2Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Menyelidiki cara menggabungkan duadiversitas hiperkonveks.
2. Menyelidiki cara menggabungkan dua ruang metrik hiperkonveks sehingga ruang yang dihasilkan tetap hiperkonveks.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian ini adalah:

1. Memberikan wawasan mengenai ruang metrik hiperkonveks dan ruang diversitas hiperkonveks.
2. Mengetahui bagaimanamenggabungkan ruang metrik hiperkonveks dan ruang diversitas hiperkonveks.
3. Dapat digunakan sebagai tambahan referensi untuk mengkaji lebih lanjut mengenai ruang metrik hiperkonveks dan ruang diversitas hiperkonveks.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Himpunan

Himpunan adalah kumpulan benda atau obyek-obyek lain, lambang-lambang yang mempunyai arti yang dapat didefinisikan dengan jelas, mana yang merupakan anggota himpunan dan bukan anggota himpunan (Susilo, 2006).

2.1.1 Operasi Pada Himpunan

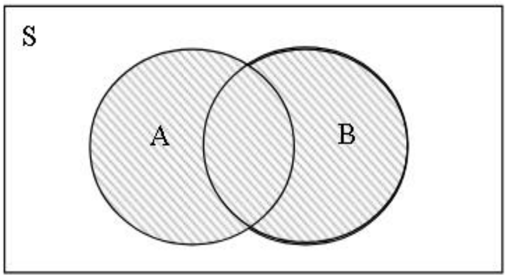
2.1.1.1 Gabungan Dua Himpunan

Gabungan dua himpunan A dan B, dilambangkan dengan $A \cup B$ adalah himpunan baru yang anggota-anggotanya terdiri dari semua anggota A atau anggota B (Susilo, 2006).

Secara singkat dapat dirumuskan :

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

Dalam diagram Venn, $A \cup B$ dapat digambarkan sebagai daerah yang diarsir berikut :



Gambar 2.1 Gabungan dari himpunan *A* dan *B (A ∪ B)*

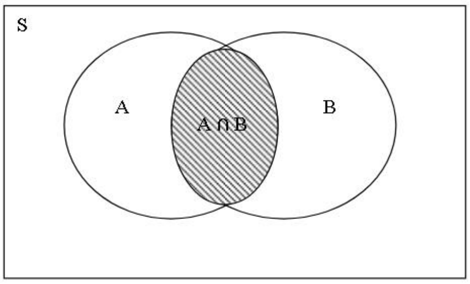
2.1.1.2 Irisan Dua Himpunan

Irisan dua himpunan A dan B, dilambangkan dengan $A \cap B$ adalah himpunan baru yang anggotanya terdiri dari anggota himpunan A dan anggota himpunan B (Susilo, 2006).

Secara singkat dapat dirumuskan :

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

Dalam diagram Venn, $A \cap B$ dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 2.2 Irisan dari himpunan *A* dan *B (A ∩ B)*

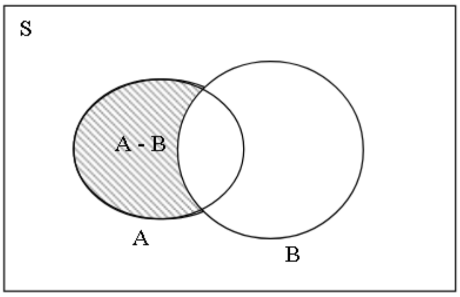
2.1.1.3 Selisih Dua Himpunan

Selisih antara himpunan$A$ dan B dilambangkan dengan $A \setminus B$ adalah himpunan baru yang anggota-anggotanya terdiri dari anggota A yang tidak menjadi anggota himpunan$B$ (Susilo, 2006).

Secara singkat dapat dirumuskan :

$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

Dalam diagram Venn $A\setminus B$ dapat digambarkan sebagai daerah yang diarsir sebagai berikut :



Gambar 2.3 Selisih dari himpunan A dan B $(A \setminus B)$

Contoh :

Diketahui :

$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

$B = \{7,8,9,10,11,12,13\}$

Maka :

$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\}$,

$A \cap B = \{7,8,9,10\}$

$A \setminus B = \{1,2,3,4,5,6\}$.

2.1.2 Himpunan Konveks

Definisi 2.1.2.1

Himpunan $C \subseteq \mathbb{R}^n$disebut konveks, jika untuk setiap $x_1, x_2 \in C$ dan $0 \leq \lambda \leq 1$ berlaku $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in C$ (Hadley, 1992).

Dari definisi tersebut,secara geometris C disebut konveks jika diambil sebarang dua titik $x_1, x_2 \in C$, maka segmen garis yang menghubungkan x_1 dan x_2 berada di C (Hadley, 1992).

$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$, dengan$0 \leq \lambda \leq 1$ merupakan suatu kombinasi konveks dari x_1, x_2(untuk suatu λ). Jadi suatu himpunan adalah konveks, jika setiap kombinasi konveks dari setiap dua titik dalam himpunan juga terdapat dalam himpunan tersebut (Hadley, 1992).

Berikut adalah contoh himpunan konveks dan himpunan tidak konveks.

a.Himpunan konveks   b.Himpunan tidak konveks.

Gambar 2.4 Contoh himpunan konveks dan himpunan tidak konveks

Pada gambar sebelah kiri (Gambar 2.4.a), semua kombinasi konveks dari x_1 dan $x_2$berada di dalam C sehingga Gambar 2.4.a merupakan contoh himpunan konveks.Sedangkan,pada gambar sebelah kanan (Gambar 2.4.b), ada segmen garis yang menghubungkan x_1 dan x_2 yang berada diluar C sehingga Gambar 2.4.b adalah contoh himpunan tidak konveks (Hadley, 1992).

2.2.Supremum dan Infimum

Definisi 2.2.1

Diketahui himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$ dan $A \neq \emptyset$.

i. Bilangan $u \in \mathbb{R}$ disebut batas atas A, jika $a \leq u$ untuk semua $a \in A$.
ii. Bilangan $v \in \mathbb{R}$ disebut batas bawah A, jika $v \leq a$ untuk semua $a \in A$.
iii. Himpunan A yang mempunyai batas atas dikatakan terbatas keatas.
iv. Himpunan A yang mempunyai batas bawah dikatakan terbatas ke bawah.
v. Himpunan A dikatakan terbatas (*bounded*) jika A terbatas ke atas dan terbatas ke bawah (Soemantri, 1993).

Contoh :

Diberikan himpunan $A = \{a < 5 | a \in \mathbb{R}\}$, himpunan A terbatas ke atas, karena terdapat $x \in \mathbb{R}$, yaitu $x \geq a$ untuk setiap $a \in A$ (x merupakan batas atas dari himpunan A). Diperoleh $x \geq 5$, yaitu $x = 5, 6, \ldots$, atau dengan kata lain contoh batas atas dari himpunan A adalah $x_1 = 5$, $x_2 = 6, x_4 = 7{,}999$, $x_5 = 100, \ldots$.. Sehingga dapat dibentuk himpunan semua batas atas dari himpunan A, misalkan X, dengan $X = \{x \in \mathbb{R} |\ x \geq 5\}$ (Soemantri, 1993).

Definisi 2.2.2

Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$ dan $A \neq \emptyset$.

i. Jika A terbatas ke atas, maka ada bilangan u yang disebut supremum (batas atas terkecil) dari himpunan A, ditulis $supA$, jika memenuhi:
   a. *u* batas atas dari himpunan *A*.
   b. Jika *k* sebarang batas atas *A*, maka $u \leq k$.

ii. Jika A terbatas ke bawah, maka ada bilangan *v* yang disebut Infimum (batas bawah terbesar) dari *A*, ditulis $infA$, jika memenuhi:
   a. *v* batas bawah himpunan *A*.
   b. Jika *l* sebarang batas bawah *A*, maka $v \geq l$ (Soemantri, 1993).

Contoh :

Diberikan himpunan $A = [1, 2) \cup \{3, 4\}$, himpunan A merupakan himpunan yang terbatas dengan infimum 1 dan supremum 4 (Soemantri, 1993).

Teorema 2.2.3 (Soemantri, 1993)

(i)*u* supremum himpunan *A* jika dan hanya jika :

a.*u* batas atas *A*,yaitu untuk setiap $a \in A$ berakibat $a \leq u$, dan

b.untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$terdapat $a' \in A$ sehingga $u - \varepsilon < a' \leq u$.

(ii)*v* infimum himpunan *A* jika dan hanya jika :

a. *v* batas bawah *A*, yaitu untuk setiap $a \in A$ berakibat $a \geq v$, dan

b. untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat $a'' \in A$ sehingga$v \leq a'' < v + \varepsilon$

Bukti:

(i) ($\Longrightarrow$) Karena u supremum (batas atas terkecil) himpunan A, maka $u - \varepsilon$ bukan batas atas himpunan A. Hal ini berarti ada $a' \in A$ sehingga $u - \varepsilon < a'$. Selanjutnya karena u batas atas terkecil himpunan A, maka setiap $a \in A$ berlaku $a \leq u$, khususnya $a' \leq u$. Dengan demikian terbukti ada $a' \in A$ sehingga $u - \varepsilon < a' \leq u$.

($\Longleftarrow$) Karena diketahui bahwa $a \leq u$ untuk setiap $a \in A$ dan untuk setiap bilangan real $\varepsilon > 0$ ada $a' \in A$ sehingga $u - \varepsilon < a'$ diperoleh u batas atas dan tak ada batas atas u_1(yang lain) dengan $u_1 < u$. Sebab jika ada maka dengan mengambil $\varepsilon_1 = u - u_1$ diperoleh suatu kontradiksi, yaitu ada $a'' \in A$ sehingga $u - \varepsilon_1 < a''$ atau $u_1 = u - (u - u_1) < a''$. Dengan kata lain terbukti bahwa u merupakan supremum.

(ii) ($\Longrightarrow$) Karena v infimum (batas bawah terbesar) himpunan A, maka $v + \varepsilon$ bukan batas bawah himpunan A, hal ini berarti ada $a'' \in A$ sehingga $a'' < v + \varepsilon$. Selanjutnya karena v batas bawah terbesar himpunan A, maka setiap $a \in A$ berlaku $a \geq v$, khususnya $v \leq a''$. Dengan demikian terbukti ada $a'' \in A$ sehingga $v \leq a'' < v + \varepsilon$.

($\Longleftarrow$) Karena diketahui bahwa $a \geq v$ untuk setiap $a \in A$ dan untuk setiap bilangan real $\varepsilon > 0$ ada $a'' \in A$ sehingga $a'' < v + \varepsilon$ diperoleh v batas bawah dan tak ada batas bawah v_1 (yang lain) dengan $v_1 > v$. Sebab jika ada maka dengan mengambil $\varepsilon_1 = v_1 - v$ diperoleh suatu kontradiksi, yaitu ada $a''' \in A$ sehingga $a''' < v + \varepsilon_1$ atau $a''' < v + (v_1 - v) = v_1$.

Dengan kata lain terbukti bahwa v merupakan infimum (Soemantri, 1993).

2.3. Ruang Metrik

2.3.1 Pengertian Ruang Metrik

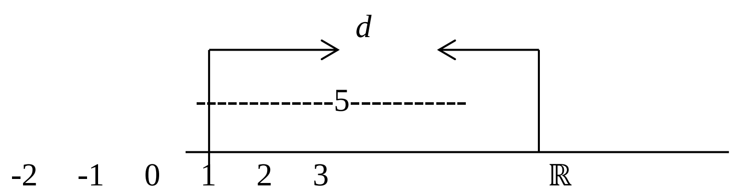
Ruang metrik merupakan ruang abstrak, yaitu ruang yang dibangun oleh aksioma-aksioma tertentu. Ruang metrik merupakan hal yang fundamental dalam analisis fungsional, sebab memegang peranan yang sama dengan jarak pada real line $\mathbb{R}$ (Taylor, 1967).

Dalam kalkulus telah dipelajari fungsi-fungsi yang didefinisikan pada garis lurus (*real line*) $\mathbb{R}$. Pada *real line* $\mathbb{R}$, fungsi jarak didefinisikan dengan :

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$d(x, y) = |x - y|, \ \forall x, y \in \mathbb{R} \qquad (2.1)$$

Hal ini diilustrasikan pada gambar di bawah ini :



Gambar 2.5 Fungsi jarak *d* pada $\mathbb{R}$

Dari Gambar 2.5, diperoleh :

$$d(3,-2) = |3 - (-2)| = |5| = 5.$$

$$d(3,3) = |3-3| = |0| = 0.$$

Jika dicermati dari ilustrasi tersebut, maka fungsi jarak d mempunyai sifat-sifat berikut :

1. $d\ (x, y) \geq 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.
2. $d\ (x, x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$
3. $d\ (x, y) = d\ (y, x),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$
4. $d\ (x, y) \leq d\ (x, z) + d\ (z, y),\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

Selanjutnya (dalam analisis fungsional), keempat sifat di atas akan dipertahankan (diawetkan) untuk ruangdan fungsi yang lebih umum dan luas. Akan diperluas bilangan real $\mathbb{R}$ dengan suatu himpunan abstrak X dan pada X didefinisikan fungsi jarak yang lebih umum dari fungsi jarak d pada $\mathbb{R}$ (Taylor, 1967).

Definisi 2.3.1.1

Misal X adalah himpunan tak kosong, suatu ruang metrik di X adalah suatu fungsi $d: X \times X \to [0, \infty)$, sehingga untuk setiap pasangan $(x, y) \in X \times X$ berlaku:

i. $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$

ii. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

iii. $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$ (sifat simetri)

iv. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall\, x, y, z \in X$ (ketidaksamaan segitiga).

Selanjutnya pasangan(X, d), dengan d adalah metrik pada X disebut ruang metrik. Setiap anggota X disebut titik dan nilai $d$disebut jarak (*distance*) dari titik x ke titik y atau jarakantara titik $x$dan y (Kreyszig, 1989).

Contoh :

1. Diberikan himpunan $X \neq \phi$ dan didefinisikan fungsi :

$$d : X \, x \, X \to R,$$

dengan $d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$

Pasangan (X, d) merupakan ruang metrik.

Bukti :

Untuk membuktikan bahwa pasangan (X, d) merupakan metrik pada X, cukup ditunjukkan bahwa d merupakan metrik pada X, yaitu d harus memenuhi aksioma ruang metrik.

i. $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$, jelas dipenuhi, sebab nilai dari fungsi d adalah 1 dan 0, yang kedua-duanya lebih besar atau sama dengan 0.

ii. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, jelas dipenuhi (lihat definisi)

iii. $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$ dipenuhi, sebab d fungsi konstan.

iv. Untuk membuktikan $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X$: perlu ditinjau dua kasus :

   a. Kasus $x \neq y$

      Untuk kasus $x \neq y$, maka untuk sebarang titik $z \in X$ paling sedikit salah satu dari relasi(hubungan) $x \neq z$ atau $y \neq z$ adalah benar, sehingga

      $d(x, z) + d(z, y) = 1 + 1 = 2,$ untuk $x \neq z, \; y \neq z$

      Oleh karena itu, diperoleh :

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$
$$1 \leq 2$$

Jadi, ketidaksamaan di atas benar.

b. Kasus $x = y$, artinya (berdasarkan definisi pada soal) $d(x,y) = 0$.

Untuk $x = y$, maka untuk sebarang $z \in X$ akan berlaku kemungkinan, yaitu $x = y = z$. Oleh karena itu, diperoleh :

$$d(x,z) + d(z,y) = 0 + 0 = 0,\ x = y = z$$

Sehingga diperoleh :

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$
$$0 \leq 0$$

Jadi, ketidaksamaan segitiga dipenuhi.

Karena aksioma (i) sampai (iv) dipenuhi, maka pasangan (X, d) merupakan ruang metrik.

2.3.2 Persekitaran

Persekitaran (*neighborhood*) bersama-sama dengan metric digunakan untuk mendefinisikan himpunan terbuka maupun himpunan tertutup (Taylor, 1967).

Definisi 2.3.2.1

Diberikan ruang metrik (X, d) dan suatu titik$x_0 \in X$ serta bilangan real $r > 0$. Didefinisikan tiga jenis himpunan :

(1).$B(x_0, r) = \{x \in X : d\ (x, x_0) < r\}$

disebut persekitaran (*neighborhood*) atau bola terbuka dengan pusat x_0 dengan jari-jari r.

(2). $D(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$

disebut bola tertutup dengan pusat $x_0$dengan jari-jari r.

(3). $S(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) = r\}$

disebut luasan dengan pusat $x_0$dan jari-jari r.

Berdasarkan definisi di atas, untuk suatu titik $x_0 \in X$ dapat dibuat tak berhingga banyak persekitaran titik x_0. Sedangkan bentuk persekitaran tidak harus berbentuk lingkaran, tetapi dapat berbentuk persegi maupun belah ketupat tergantung fungsi metriknya (Taylor, 1967).

Contoh :

Pasangan (R^n, d_p) merupakan ruang metrik, dengan

$$d_p(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{cases} \left\{ \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right\}^{\frac{1}{p}} & , 1 \leq p < \infty \\ maks \quad |x_i - y_i| \quad , & p = \infty \end{cases}$$

Untuk $\bar{x} = (x_1, ..., x_n)$, $\bar{y} = (y_1, ..., y_n)$.

Misalkan diambil n =2, maka $X = R^2$ dan

$$d_\infty(\bar{x}, \bar{y}) = maks|x_1 - y_i|$$

$$i = \{1,2\}$$

dengan $\bar{x} = (x_1, x_2)$, $\bar{y} = (y_1, y_2)$.

$$d_2(\bar{x},\bar{y}) = \left\{ \sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$= \sqrt{(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)}$$

dengan $\bar{x} = (x_1, x_2)$, $\bar{y} = (y_1, y_2)$.

$$d_1(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i|$$
$$= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

dengan $\bar{x} = (x_1, x_2)$, $\bar{y} = (y_1, y_2)$.

Jika diambil $x_o = (x_{o1}, x_{o2}) = (3{,}2)$ dan $r = \frac{3}{2}$, maka diperoleh

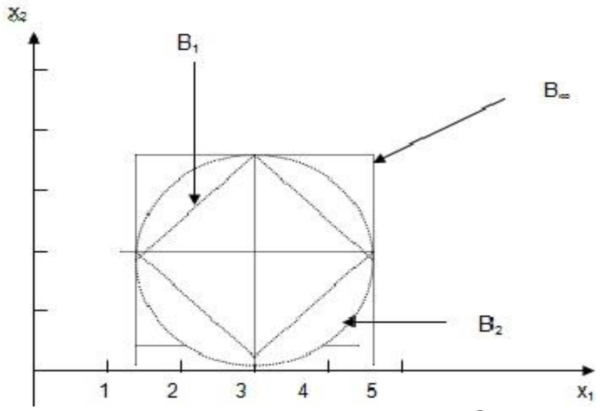
$$B_\infty(\bar{x}_o, r) = \left\{ \bar{x} \in R^2 : d_\infty(\bar{x}, \bar{x}_o) < r \right\}$$
$$= \left\{ (x_1, x_2) \in R^2 : maks\{ |x_1 - 3| + |x_2 - 2| \} < \frac{3}{2} \right\}$$

$$B_2(\bar{x}_o, r) = \left\{ \bar{x} \in R^2 : d_2(\bar{x}, \bar{x}_o) < r \right\}$$
$$= \left\{ (x_1, x_2) \in R^2 : \sqrt{(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2} < \frac{3}{2} \right\}$$
$$= \left\{ (x_1, x_2) \in R^2 : (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 < \left(\frac{3}{2} \right)^2 \right\}$$

$$B_1(\bar{x}_o, r) = \left\{ \bar{x} \in R^2 : d_1(\bar{x}, \bar{x}_o) < r \right\}$$
$$= \left\{ (x_1, x_2) \in R^2 : \{ |x_1 - 3| + |x_2 - 2| \} < \frac{3}{2} \right\}$$

$B_\infty((3{,}2), \frac{3}{2})$, $B_2((3{,}2), \frac{3}{2})$ dan $B_1((3{,}2), \frac{3}{2})$

Persekitaran-persekitaran di atas digambarkan sebagai berikut :



Gambar 2.6 Persekitaran di R^2

2.4 Ruang Metrik Konveks

Definisi 2.4.1`

Misalkan (X, d) adalah ruang metrik dan $I = [0,1]$. Pemetaan $W: X \times X \times I \rightarrow X$disebut struktur konveks pada X jika untuk setiap $(x, y, \lambda) \in X \times X \times I$ dan $u \in X$,

$$d\big(u, W(x, y, \lambda)\big) \leq \lambda d(u, x) + (1 - \lambda) d(u, y).$$

Ruang metrik (X, d) bersama-sama dengan struktur konveks W disebut ruang metrik konveks yang dilambangkan dengan (X, d, W) (Moosaei, 2012).

Contoh :

Misalkan $(X, \| \ \|)$ adalah ruang bernorm. Pemetaan $W: X \times X \times I \rightarrow X$ didefinisikan dengan $W(x, y, \lambda) = \lambda x + (1 - \lambda) y$ untuk setiap $x, y \in X, \lambda \in I$ adalah struktur konveks pada X.

Definisi 2.4.2

Misalkan (X, d, W) adalah ruang metrik konveks. Himpunan bagian tak kosong C dari X disebut konveks jika $W(x, y, \lambda) \in C$ ketika $(x, y, \lambda) \in C \times C \times I$ (Moosaei, 2012).

Teorema 2.4.3 (Moosaei, 2012)

Misalkan (X, d, W) adalah ruang metrik konveks, maka pernyataan berikut terpenuhi :

(i) $d(x, y) = d\big(x, W(x, y, \lambda)\big) + d\big(y, W(x, y, \lambda)\big)$ untuk setiap$(x, y, \lambda) \in X \times X \times I$.

(ii) $d\left(x, W\left(x, y, \frac{1}{2}\right)\right) = d\left(y, W\left(x, y, \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}d(x, y)$ untuk setiap$x, y \in X$.

Bukti :

(i) Untuk setiap $(x, y, \lambda) \in X \times X \times I$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d\big(x, W(x, y, \lambda)\big) + d\big(y, W(x, y, \lambda)\big) \\ &\leq (1 - \lambda)d(x, y) + \lambda d(x, y) \\ &= d(x, y) \end{aligned}$$

Oleh karena itu, $d(x, y) = d\big(x, W(x, y, \lambda)\big) + d\big(y, W(x, y, \lambda)\big)$ terpenuhi. ■

(ii) Misalkan $d(x, y) \in X$. Dari definisi W dan menggunakan (i), maka

$$d\left(x, W\left(x, y, \frac{1}{2}\right)\right) \leq \frac{1}{2} d(x, y)$$

$$= \frac{1}{2} d\left(x, W\left(x, y, \frac{1}{2}\right)\right) + \frac{1}{2} d\left(y, W\left(x, y, \frac{1}{2}\right)\right)$$

Oleh karena itu,

$$\frac{1}{2} d\left(x, W\left(x, y, \frac{1}{2}\right)\right) + \frac{1}{2} d\left(y, W\left(x, y, \frac{1}{2}\right)\right)$$

Sama dengan

$$\frac{1}{2} d\left(y, W\left(x, y, \frac{1}{2}\right)\right) + \frac{1}{2} d\left(x, W\left(x, y, \frac{1}{2}\right)\right)$$

Oleh karena itu, $d\left(x, W\left(x, y, \frac{1}{2}\right)\right) = d\left(y, W\left(x, y, \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2} d(x, y)$

Untuk semua $x, y \in C$, dan bukti untuk teorema diatas terpenuhi. ■

2.5 Ruang Metrik Hiperkonveks

Definisi 2.5.1

Misalkan (X, d) adalah ruang metrik. Himpunan bagian $A \subset X$ disebut *admissible* jika irisan dari bola tertutup $A = \bigcap_{i \in I} B(x_i, r_i)$tak kosong (Piatek, 2014).

Definisi 2.5.2

Sebuah ruang metrik (X, d) disebut hiperkonveks jika setiap koleksi bola tertutup $\{B(x_i, x_j)\}_{i \in I}$ dengan $d\,(x_i, x_j) \leq\ r_i + r_j$ mempunyai irisan yang tidak kosong yaitu $\bigcap_i B(x_i, x_j)\ \neq \emptyset$(Piatek, 2014).

2.6 Ruang Diversitas Hiperkonveks

Definisi 2.6.1

Misalkan$X$adalah himpunan tak kosong dan $\langle X \rangle$ adalah himpunan dari semua himpunan bagian tak kosong X. Himpunan X dengan fungsi $\delta : \langle X \rangle \to [0, \infty)$ disebut diversitas jika :

(iii) $\delta(A) = 0$ jika dan hanya jika *Asingleton*

(iv) $\delta(A \cup C) \leq \delta(A \cup B) + \delta(B \cup C)$ untuk $A, B, C \in \langle X \rangle$ (Piatek, 2014).

Contoh :

Misalkan X adalah himpunan di $\mathbb{R}$.

$A = [1,5]$

$B = [5,6]$

$C = [1,10]$

Maka

$$\delta(A \cup C) \leq \delta(A \cup B) + \delta(B \cup C)$$

$$\delta([1,5] \cup [1,10]) \leq \delta([1,5] \cup [5,6]) + \delta([5,6] \cup [1,10])$$

$$\delta([1,10]) \leq \delta([1,6]) + \delta([5,10])$$

$$9 \leq 5 + 5$$

$$9 \leq 10$$

Karena $\delta(A \cup C) \leq \delta(A \cup B) + \delta(B \cup C)$ terbukti maka (X, δ) adalah diversitas.

Definisi 2.6.2

Suatu diversitas (X, δ) disebut hiperkonveks jika untuk semua $r : \langle X \rangle \to [0, \infty)$berlaku :

$$\delta\left(\bigcup_{A\in\mathfrak{A}}\quad\right) \leq \sum_{A\in\mathfrak{A}} r(A)$$

untuk setiap himpunan bagian berhingga $\mathfrak{A}$dari $\langle A\rangle$terdapat z ∈ X dengan

$$\delta(A \cup \{z\}) \leq r(A)$$

untuk semua $A \in \langle X\rangle$ (Piatek, 2014).

Contoh :

Misalkan X adalah himpunan di$\mathbb{R}$.

$A_1 = [1,5]$

$A_2 = [5,9]$

$A_3 = [8,12]$

Maka

$$\delta\left(\bigcup_{k=1}^{3} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{3} r(A_k)$$

$$\delta(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \leq r(A_1) + r(A_2) + r(A_3)$$

$$\delta([1,5] \cup [5,9] \cup [8,12]) \leq r([1,5]) + r([5,9]) + r([8,12])$$

$$11 \leq 4 + 4 + 4$$

$$11 \leq 12$$

Karena $\delta(\bigcup_{k=1}^{3} A_k) \leq \sum_{k=1}^{3} r(A_k)$ terbukti maka (X, δ) adalah diversitas hiperkonveks.

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester genap tahun akademik 2018/2019, bertempat di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Studi pustaka yaitu mencari referensi sejumlah literatur (buku-buku dan jurnal), menelaah dan mengkaji yang berhubungan dengan penelitian ini.

2. Menggabungkan ruang diversitas hiperkonveks dengan cara membuktikan teorema mengenai diversitas. Adapun definisi diversitas dan teorema diversitas sebagai berikut.

   Definisi

   Misalkan$X$adalah himpunan tak kosong dan $\langle X \rangle$ adalah himpunan dari semua himpunan bagian tak kosong X. Himpunan X dengan fungsi $\delta : \langle X \rangle \to [0, \infty)$ disebut diversitas jika :

(v) $\delta(A) = 0$ jika dan hanya jika *Asingleton*

(vi) $\delta(A \cup C) \leq \delta(A \cup B) + \delta(B \cup C)$ untuk $A, B, C \in \langle X \rangle$ (Piatek, 2014).

Teorema (Piatek, 2014)

Misalkan (X, δ) dan (Y, δ) adalah dua diversitas hiperkonveks dengan $X \cap Y = \{\theta\}$. Maka $(X \cup Y, \delta)$ adalah hiperkonveks.

3. Menggabungkan ruang metrik hiperkonveks dengan cara membuktikan teorema mengenai gabungan ruang metrik hiperkonveks. Adapun definisi dan teorema dari ruang metrik hiperkonveks sebagai berikut.

Definisi

Sebuah ruang metrik (X, d) disebut hiperkonveks jika setiap koleksi bola tertutup $\{B(x_i, x_j)\}_{i \in I}$ dengan $d\ (x_i, x_j) \leq\ r_i + r_j$ mempunyai irisan yang tidak kosong yaitu $\bigcap_i B(x_i, x_j)\ \neq \emptyset$ (Piatek, 2014).

Teorema (Piatek, 2014)

Misalkan X dan Y adalah ruang metrik hiperkonveks sedemikian hingga $X \cap Y = [a, b]$ dan a dan b terhubung oleh sebuah garis tunggal di ruang X dan Y, maka $X \cup Y$ dengan menggabungkan metrik dari Persamaan 4.3 adalah hiperkonveks juga.

4. Memberikan contoh gabungan diversitas hiperkonveks dan contoh gabungan ruang metrik hiperkonveks.

V. KESIMPULAN

Adapun kesimpulan dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

Gabungan dua ruang diversitas hiperkonveks dengan irisan tak kosong disebut hiperkonveks jika didefinisikan fungsi $r : (X \cup Y) \rightarrow [0, \infty)$ sehingga $\delta(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \leq \sum_{k=1}^{n} r(A_k)$. Gabungan dua ruang metrik hiperkonveks dengan garis [a,b] sebagai irisan kedua ruang adalah jika $d(x, y) = \min_{c \in [a,b]} [d(x, c) + d(c, y)], x \in X \backslash [a, b], y \in Y \backslash [a, b]$. Gabungan dua ruang diversitas hiperkonveks dan ruang metrik hiperkonveks menghasilkan ruang hiperkonveks jika ruang tersebut *admissible*.

DAFTAR PUSTAKA

Hadley, G. 1992. *Aljabar Linear*. Terjemahan oleh Naispospos, Soemartoyo, N. Erlangga, Jakarta.

Kreyszig, Erwin. 1989. *Introductory Functional Analysis with Aplications*. John Wiley and Sons, New York.

Moosaei, Mohammad. 2012. Fixed Point Theory in Convex Metric Spaces. *Springer Open Journal : Fixed Point Theory and Applications***164**,1-6.

Nasyithoh, H. K. 2015. Teorema Titik Tetap di Ruang Hiperkonveks. Tesis. Tidak Diterbitkan. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.

Piatek, Bozena. 2014. On the Gluing of Hyperconvex Metrics and Diversities. *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis Studia Mathematica***13**, 65-76.

Soemantri, R. 1993. *Analysis Real I*. Departemen Pendidikan dan Kebudayaan Universitas Terbuka, Yogyakarta.

Susilo, Frans. 2006. *Himpunan dan Logika Kabur serta Aplikasinya*. Graha Ilmu, Yogyakarta.

Taylor, E. A. 1967. *Introduction to Functional Analysis*. Jhon Willey, New York.