MODEL *SEIR* PENYAKIT HEPATITIS B DENGAN VAKSINASI DAN MIGRASI

(Skripsi)

Oleh :

MIRA ANDANI

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

ABSTRAK

MODEL *SEIR* PENYAKIT HEPATITIS B DENGAN VAKSINASI DAN MIGRASI

Oleh

Mira Andani

Model SEIR memodelkan arus manusia antara empat kelas yaitu Susceptible (S), Exposed (E), Infected (I), dan Recovered (R). Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui titik ekuilibrium penyakit Hepatitis B dengan model SEIR dan menentukan jumlah individu yang divaksinasi. Hasil yang dperoleh adalah jika $R_0 < 1$ maka titik euilibrium bebas penyakit stabil asimtotik dan jika $R_0 > 1$ maka titik ekuilibrium endemik penyakit stabil aimtotik. Jumlah individu yang di vaksinasi untuk mencegah penularan penyakit Hepatitis B adalah $t_c > 1 - \frac{1}{R_0}$.

Kata kunci : Hepatitis B,Model SEIR, Titik Ekuilibrium

ABSTRACT

SEIR HEPATITIS DISEASE B MODEL WITH VACCINATION AND MIGRATION

By

Mira Andani

The SEIR model, models human flows between four classes, Susceptible (S), Exposed (E), Infected (I), and Recovered (R). This research aims to determine the equilibrium point of Hepatitis B with the SEIR model and determine the number of vaccinated individuals. The result obtained that if $R_0 < 1$ then the equilibrium point of disease-free is asymptotically stable. If $R_0 > 1$, then the equilibrium point of disease endemic is asymptotically stable. The number of individuals vaccinated to prevent transmission of hepatitis B is $t_c > 1 - \frac{1}{R_0}$

Keywords: Hepatitis B, SEIR Model, Point of Equilibrium

MODEL *SEIR* PENYAKIT HEPATITIS B DENGAN VAKSINASI DAN MIGRASI

Oleh

MIRA ANDANI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

Judul Skripsi : **MODEL SEIR PENYAKIT HEPATITIS B DENGAN VAKSINASI DAN MIGRASI**

Nama Mahasiswa : *Mira Andani*

No. Pokok Mahasiswa : 1517031037

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.
NIP 19700831 199903 1 002

Amanto, S.Si., M.Si.
NIP 19730314 200012 1 002

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Amanto, S.Si., M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Drs. Suratman, M.Sc.
NIP 19640604 199003 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **09 April 2019**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: **Mira Andani**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1517031037**
Judul	: **Model SEIR Penyakit Hepatitis B Dengan Vaksinasi dan Migrasi**
Jurusan	: **Matematika**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan semua tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah karya penulisan ilmiah Universitas Lampung.

Bandar Lampung, 09 April 2019
Penulis,

Mira Andani
NPM: 1517031037

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Lampung Barat pada tanggal 07 Desember 1996. Sebagai anak pertama Bapak Darman dan Ibu Surintan.

Penulis menempuh pendidikan Sekolah dasar Negeri (SDN) Luas Batu Ketulis pada tahun 2003-2009, Sekola Menengah Pertama Negeri (SMPN) Belalau Lampung Barat paa tahun 2009-2012, Sekolah Menengah Atas Negeri (SMAN) Belalau Lampung Barat pada tahun 2012-2015.

Pada tahun 2018 penulis melaksanakan Kerja Praktek (KP) di Badan Pusat Statistik (BPS) Lampung Barat. Pada tahun 2018 Penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata Kebangsaan (KKN KB) di Desa Karya Tani, Kecamatan Labuhan Maringgai, Kabupaten Lampung Timur, Provinsi Lampung. Pengalaman organisasi penuis yaitu menjadi staf ahli bidang Kominfo Badan Eksekutif Mahasiswa (BEM) Universitas Lampung tahun 2016-2017, Anggota Bidang Eksternal Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA) 2017.

PERSEMBAHAN

Puji Sykur kepada Allah SWT, Karena atas limpahan berkah dan rahmad-Nya skripsi ini dapat diselesaikan.
Saya persembahkan karya sederhana penuh perjuangan dan kesabaran ini sebagai ungkapan rasa sayang dan bukti kepada : Bapak dan Ibu tercinta yang selalu mencurahkan kasih sayang, memberi semangat dan selalu memotivasi, serta dalam doa dan sujud yang selalu menantikan keberhasilanku dengan sabar dan penuh pengertian.
Almamater yang kucintai, Universitas Lampung.

KATA INSPIRASI

"Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan,
sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan."

(Q.S. Al-Insyirah ayat 5-6)

"Tetap sabar, semangat, dan tersenyum, karena kamu sedang menimba ilmu di Universitas kehidupan. Allah menaruhmu di tempatmu yang sekarang bukan karena kebetulan."

(Dahlan Iskan)

"Jangan menunggu; tidak akan pernah ada waktu yang tepat. Mulailah di mana pun anda berada, dan bekerja dengan alat apa pun yang anda miliki. Peralatan yang lebih baik akan ditemukan ketika anda melangkah."

(Napoleon Hill)

"Kekuatan bukan berasal dari kemenangan. Perjuangan adalah yang melahirkan kekuatan. Ketika anda menghadapi kesulitan dan tak menyerah, itulah kekuatan."

(Arnold Schwrzenegger)

SANWACANA

Penulis mengucapkan puji syukur kehadirat Allah SWT, karena dengan ridho dankarunia-Nya serta atas berkah dan rahmat-Nya sehinga penulis dapat menyelesaikanskripsi yang berjudul “Model *SEIR* Penyakit Hepatitis B Dengan Vaksinasi dan Migrasi”. Skripsiini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains(S.Si.) di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan AlamUniversitas Lampung.

Selesainya penulisan skripsi ini adalah berkat motivasi, pengarahan serta

bimbingan dari berbagai pihak. Dengan segala kerendahan dan ketulusan hati penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada

1. Bapak Agus Sutrisno,S.Si.,M.Si, selaku Pembimbing pertama atas saran, pengarahan, motivasi, dan kesabaran dalam membimbing penulis selama penelitian hingga penyelesaian skripsi dan memberi arahan kepada penulis selama menuntut ilmu di Universitas Lampung.
2. Bapak Amanto,S.Si., M.Si., selaku Pembimbing kedua ataskesediaannya memberikan bimbingan, pengarahan, semangat, motivasi, waktu,saran, nasehat, dan bantuan selama penulis menyelesaikan skripsi.
3. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si selaku Penguji bukan Pembimbing yang telah memberikan saran, pengarahan, nasehat, kesabaran, dan bantuan yang sangat berharga untuk perbaikan penulisan skripsi.

4. Ibu Prof.Dra.Wamiliana,MA,Ph.D. selaku Kepala Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung.
5. Bapak Drs. Suratman,M.Sc. selaku Dekan FMIPA Universitas Lampung
6. Para Dosen dan Staff Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.
7. Ibu dan Bapak tercinta yang selalu memberikan motivasi, semangat, dan doakepada penulis.
8. Sahabat-sahabat penulis,Almira, caroline, Sandria, Dinda , Diana, Mira, Hanny yang telah membantu, memberikan semangat dan kecerian pada penulis.
9. Dewi Sundari teman berjuang menuju wisuda, terimakasih telah menjadi teman yang saling membantu.
10. Saudara ku Nelly, Eva, Tiara yang selalu memeberikan dukungan dan semangat kepada penulis.
11. Deki Saputra yang selalu memberikan semangat dan dukungan kepada penulis selama ini.

Akhir kata, semoga ketulusan serta bantuan dari semua pihak tersebut kiranya mendapat berkah dan anugrah dari Allah SWT.

Bandar Lampung,09 April 2019
Penulis

Mira Andani

DAFTAR ISI

Halaman

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Salah satu penyakit menular yag memiliki tingkat penyebaran yang tinggi adalah penyakit Hepatitis B. Saat ini di seluruh dunia diperkirakan sekitar dua miliar orang terinfeksi virus Hepatitis B, 240 juta orang secara kronis terinfeksi virus Hepatitis B (didefinisikan sebagai Hepatitis B antigen permukaan positif selama minimal 6 bulan) dan 780.000 orang meninggal setiap tahun karena terinfeksi virus Hepatitis B, 650.000 dari sirosis dan kanker hati akibat infeksi virus Hepatitis B kronis dan 130.000 dari Hepatitis B akut.

Hepatitis adalah peradanagan pada hati yang disebabkan oleh virus Hepatitis , sehigga hati tidak bisa menjalankan fungsinya degan optimal. Ada berbagai macam jenis virus Hepatitis yaitu Hepatitis A, B, C, D, dan E. Yang harus diwaspadai oleh tenaga kesahatan yang bekerja di Rumah sakit adalah Hepatitis B dan Hepatitis C. Seseorang di sebut menderita Hepatitis B bila dalam pemeriksaan laboratorium darah didapatkan hasil HbsAg positif/ reaktif/ hasil > 0,99 dan disebut menderita Hepatitis C bila dalam pemeriksaan laboratorium didapatkan hasil HCV total posotif. Kedua jenis Hepatitis ini bisa menular lewat darah maupun cairan tubuh lainnya (misal cairan semen, cairan di selaput otak) dan bersifat menetap (tidak bisa hilang dari tubuh) dan kronis. (Warta Katiga, 2012).

Salah satu cara yang efektif untuk tindakan pencegahan penyakit Hepatitis B adalah dengan melakukan vaksinasi. Vaksin Hepatitis B terbuat dari bagian virus Hepatitis B. Vaksin Hepatitis B tidak akan mengakbatkan infeksi Hepatitis B. Vaksin bisanya diberikan sebanyak tiga hingga empat kali suntik dalam jangka waktu enam bulan. Bayi harus mendapat dosis vaksin hepatitis B nya yang pertama saat kelahirannya dan biasanya seri vaksin lengkap sudah selesai diberikan saat berusia enam bulan. Semua anak-anak dan remaja yang berusia kurang dari 19 tahun yang belum pernah di vaksin wajib di vaksin juga. Vaksin Hepatitis B juga disarankan untuk diberkan pada orang dewasa yang beresiko terkena infkessi Hepatitis B.

Perkembangn ilmu pengetahuan memberikan peranan penting dalam mencegah meluasnya penyebara penyakit Hepatitis B. Peranan tersebut berupa model matematika yang memperlajari penyebaran penyakit. Walaupun model matematika tidak mampu untuk menyembuhkan penyakit, akan tetapi dapat membantu dalam memprediksi dan pengendalian penyakit endemik di masa yang akan datang.

Model dasar tentang penyebaran penyakit pertama kali dirumuskan oleh Kermack dan McKendrick pada tahun 1927 (Chasnov,2009). Dalam modelnya Kermack-Mchendrick membagi populasi total menjadi tiga kelas, yaitu *Susceptible (S)* merupakan jumlah individu yang sehat tetapi rentan terhadap penyakit, *Infected (I)* adalah jumlah individu yang terinfeksi dan dapat menularkan penyakit kepda individu yang sehat, dan *Recovered (R)* yang menotasikan jumlah individu yang telah sembuh dari penyakit dan akan kebal dari penyakit, beberapa penyakit seperti Hepatitis B, AIDS, TBC mempunyai periode laten, artinya ada selang waktu suatu individu terinfeksi sampai munculnya suatu penyakit. Periode laten ini akan terdapat pada kelas *Exsposed (E)*, artinya individu yang terdeteksi atau terjangkit virus. Penambahan kelas pada penyakit Hepatitis B ini akan membentuk model SEIR.

Model penyebaran penyakit telah banyak dibahas salah satunya jurnal yang berjudul *Model SEIR pada Penularan Hepatitis B* oleh syarfuddin Side (2015). Jurnal ini membahs tentang model SEIR pada penyakit Hepatitis B. Jurnal lain yang membahas tentang model SEIR adalah *Kesetabilan model SEIR*, oleh Aminah Ekawati (2011). Jurnal ini membahas tentang kesetabilan pada model SEIR tanpa adanya spesifikasi penerapannya pada suatu penyakit.

Berdasarkan pembahasan dari jurnal yang ditulis oleh Syarfuddin Side penulis tertarik untuk mengulas jurnal *Model SEIR pada Penularan Hepatitis B*degan menambahkan asumsi adanya pengaruh vaksinasi dengan judul “ Model SEIR Penyakit Hepatitis B dengan Vaksinasi”.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah :

1. Memproleh model penyakit Hepatitis B dengan model SEIR Vaksinasi.
2. Mengetahui kestabilan titik ekuilibrium penyakit hepaitis B dengan model SEIR vaksinasi.
3. Menentukan jumlah individu yang divaksinasi agar tidak terjadi endemik penyakit.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah :

1. Meningkatnya wawasan keilmuan matematika umumnya tentang pemodelan SEIR.
2. Membantu memprediksi dan pengendalian penyakit endemik di masa akan datang.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pemodelan Matematika

Teori model merupakan ilmu yang menyajikan konsep-konsep matematis melalui konsep himpunan atau ilmu tentang model-model yang mendukung suatu sistem matematis. Teori model dimulai dengan asumsi keberadaan objek-objek matematika dan selanjutnya mencari dan menganalisis keberadaan operasi-operasi, relasi-relasi, atau aksioma-aksioma yang melekat pada masing-masing atau kumpulan objek tertentu.

Pemodelan matematika adalah penyusunan suatu deskripsi dari beberapa perilaku dunia nyata (fenomena-fenomena alam) ke dalam bagian matematika yang disebut dunia matematika. Ada dua tipe model matematika, yaitu model bertipe deterministik dan model bertipe empirik. Model deterministik merupakan suatu model matematika yang dibangun dengan berlandaskan hukum-hukum atau sifat-sifat yang berlaku pada sistem. Sedangkan, model empirik cenderung kepada fakta yang diberikan oleh sistem atau data (Giordano dan Weir, 2002).

2.2 Sistem Persamaan Differensial

Persamaan differensial adalah suatu persamaan yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas, sedangkan sistem persamaan diferensial terdiri dari beberapa persamaan diferensial. Dibawah ini diberikan sistem persamaan diferensial linear dan nonlinear.

Diberikan sistem persamaan diferensial

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{2.1}$$

dengan $E \subset R^n$, dan $f: E \to R^n$ Fungsi kontinu pada E.

Sistem (2,1) dapat ditulis sebagai

$$x = \dot{f}(x) \tag{2.2}$$

Jika $f_1, f_2, \dots, f_n$ masing-masing linear dalam $x_1, x_2 \dots x_n$, maka sistem (2.2) disebut persamaan differensial linear yang dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n \end{aligned} \tag{2.3}$$

Sistem (2.3) dapat dinyatakam dalam bentuk $\dot{X} = AX$, dengan $X \in E$ dan A matrix $n\ x\ n$. Sistem (2.2) disebut sistem nonlinear jika tidak dapat dinyatakan dalam bentuk sistem (2.3).

2.3 Titik ekuilibrium

Titik ekuilibrium dari sistem merupakan titik yang mana sistem tersebut tidak mengalami perubahan sepanjang waktu (Panvilov, 2004). Secara matematis definisi titik ekuilibrium dapat dituliskan sebagai berikut.

Definisi 2.1(Perko,1991) *Titik* $x^* \in R^n$ *disebut titik ekuilibrium (titik kesetimbangan) dari sistem (2.2) jika* $f(x^*) = 0$

Definisi 2.2 (Perko, 1991)

$Titik\ ekuilibrium\ x^* \in R^n dari\ sistem\ (2.2)\ dikatakan$:

a. $stabil\ jika$ *untuk setiap* $\varepsilon > 0\ terdapat\ \delta > 0$ *sedemikian hinga untuk setiap x(t) yang memenuhi* $\parallel x(t_0) - x^* \parallel < \delta\ berlaku \parallel x(t) - x^* \parallel < \varepsilon\ untuk\ setiap\ t \geq t_0$.

b. Stabil asimtomik lokal jika titik ekuilibrium $x^* \in R^n$ *stabil dan terdapat bilangan* $\delta_0 > 0$ *sehingga untuk setiap solusi x(t) yang memenuhi* $\parallel x(t_0) - x^* \parallel < \delta_0$ *maka berlaku* $\lim_{t \to 0} x(t) = x^*$.

c) Tidak stabil jika titik ekuilibrium $x^* \in R^n$ *tak memenuhi (a).*

2.4 Matriks Jacobian

Definisi 2.3 (Kocak, 1991) Diberikan $f = (f_1, f_2, \dots \dots f_n)$ pada sistem (2.2) dengan $f_i \in C^1(E), i = 1,2, \dots n$. matriks

$$J(f(x^*)) = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1}(x^*) & \frac{\delta f_1}{\delta x_2}(x^*) \dots & \frac{\delta f_1}{\delta x_n}(x^*) \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1}(x^*) & \frac{\delta f_2}{\delta x_2}(x^*) \dots & \frac{\delta f_2}{\delta x_2}(x^*) \\ \frac{\delta f_n}{\delta x_1}(x^*) & \frac{\delta f_n}{\delta x_2}(x^*) \dots & \frac{\delta f_n}{\delta x_n}(x^*) \end{bmatrix}$$

$J(f(x^*))$ dinamakan matriks Jacobian dari f di titik x^*.

Definisi 2.4 (Anton, 1998) Jika *A* adalah matiks *n x n* ,maka vektor tak nol *x* didalam R^n disebut vektor eigen dari A, jika untuk suatu skalar λ , yang disebut nilai eigen dari A diperoleh AX=λX.

Definisi 2.5(Anton, 1998) Vektor x disebut vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen x.

Kestabilan dari titik ekuilibrium pada sistem (2.2) dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen matriks Jacobian pada metode linearisasi. Nilai eigen dapat ditentukan mealalui persamaan karakteristik dari matriks Jacobian di titik x^*. Kriteria kestabilan titik ekuilibrium pada sistem (2.2) tersebut disajikan pada teorema dibawah ini :

Teorema 2.1 (Wiggins, 1990) Jika semua nilai eigen matriks Jacobian mempunyai bagian real negatif, maka titik ekuilibrium x^* dari sistem (2.2) stabil asimtotik lokal.

Jika persamaan karakteristik yang diperoleh cukup rumit untuk mencari akar-akar karakteristiknya yaitu dengan bagian real negatif eigen matriks, maka untuk menentukan apakah nilai eigen bernilai negatif dapat diguakan kriteria Routh-Hurwitzh.

Teorema 2.2 Kriteria kestabilan Routh-Hurwitzh

Diberikan persamaan karakteristik $P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_{n.}$ Untuk $n = 2$ kondisi Routh-Hurwitz sebagai berikut : $a_1 > 0, a_1 > 0.$ untuk $n = 3$, Kondisi Routh-Hurwitz sebagai berikut : $a_3 > 0, a_1 > 0, a_1 a_2 > a_{3.}$ Jika kriteria Routh-Hurwitz terpenuhi, maka titik ekuilibrium x^* stabil asimtotik lokal.

2.5 Model SEIR Tanpa Vaksinasi dan Imigrasi

SEIR memodelkan arus manusia antara empat kelas : rentan (S), terpapar (E), terinfeksi (I), dan resisten (R). Masing-masing variabel tersebut mewakili jumlah orang dalam kelompok tersebut. Parameter alpha dan beta secara parsial mengontrol seberapa cepat orang bergerak dari rentan terhadap terpapar (beta), dari terpapar ke terinfeksi (sigma), dan dari terinfeksi ke tahan (gamma). Model ini memiliki dua parameter tambahan; salah satunya adalah mortalitas latar belakang (mu) yang tidak terpengaruh oleh penyakit, sementara yang lainnya adalah vaksinasi (nu). Vaksinasi memindahkan orang-orang dari yang rentan menjadi resisten secara langsung, tanpa terkena atau terinfeksi.

$$\frac{dS}{dt} = \mu(N - S) - \beta\frac{SI}{N} - vS$$
$$\frac{dE}{dt} = \beta\frac{SI}{N} - (\mu + \sigma)E$$
$$\frac{dI}{dt} = \delta E - (\mu + \gamma)I$$
$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R + vS \qquad (2.4)$$

$$S + E + I + R = N,$$

2.6 Titik Ekuilibrium

1. Titik ekuilibrium bebas penyakit

Populasi bebas penyakit asrtinya didalam populasi tidak ada yang sakit, $I = 0$. Sehingga diperoleh I pada titik ekuilibrium bebas penyakit yang dinotasikan dengan $\hat{I}$ yaitu $\hat{I} = 0$.

Dari persamaan (2.5) diperoleh

$$\partial E - (\mu + \gamma)I = 0$$

$$\delta E - (\mu + \gamma)0 = 0$$

$$\delta E = 0$$

$$E = 0$$

Sehingga diperoleh E untuk titik ekuilibrium bebas penyakit yang dinotasikan dengan E, yaitu $E = 0$

Dari persamaan (2.5) diperoleh

$$b - \mu S - \frac{\beta SI}{N} = 0$$

$$b - \mu S - \frac{\beta S.0}{N} = 0$$

$$b - \mu S - 0 = 0$$

$$b - \mu S = 0$$

$$b = \mu S$$

$$S = \frac{b}{\mu}$$

Sehingga diperoleh S untuk titik ekuilibrium bebas penyakit yang dinotasikan dengan $\widehat{S}$, yaitu $\widehat{S =} \frac{b}{\mu}$.

Jadi titik ekuilibrium bebas penyakit $\left(\widehat{S}, \widehat{E}, \hat{I}\right) = \left(\frac{b}{\mu}, 0{,}0\right)$.

2. Titik Ekuilibrium Endemik Penyakit

Endemik penyakit artinya didalam populasi selalu terdapat individu yang terserang penayakit ,$I > 0$. Sehingga diperoleh I pada titik ekuilibrium endemik penyakit yang dinotasikan denganI^*, yaitu $I^* > 0$.

Dari persamaan diatas diperoleh

$$\delta E - (\mu + \gamma)I = 0$$

$$\delta E = (\mu + \gamma)I$$

$$E = \frac{(\mu + \gamma)I}{\delta}$$

Setelah diperoleh nilai $E = \frac{(\mu+\gamma)I}{\delta}$, subsitusikan ke persamaan selanjutnya, sehingga diperoleh

$$\frac{\beta SI}{N} - (\mu + \delta)E = 0$$

$$\frac{\beta SI}{N} - (\mu + \delta)\left(\frac{(\mu + \gamma)I}{\delta}\right) = 0$$

$$\left(\frac{\beta SI}{N} - (\mu + \delta)\frac{(\mu + \gamma)}{\delta}\right) = 0$$

$$\frac{\beta S}{N} - (\mu + \delta)\frac{(\mu + \gamma)}{\delta} = 0$$

$$\frac{\beta S}{N} = (\mu + \delta)\frac{(\mu + \gamma)}{\delta}$$

$$S = (\mu + \delta)\frac{(\mu + \gamma)}{\delta}N\frac{1}{\beta}$$

Diperoleh S pada titik ekuilibrium yang dinotasikan dengan S^*, yaitu:

$$S^* = \frac{(\mu + \delta)(\mu + \gamma)}{\delta\beta}N$$

Selanjuttnya untuk memperoleh nilai I subsitasikan $S^* = \frac{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta\beta}N$ kepersamaan selanjutnya, sehingga diperoleh

$$b - \mu S - \frac{\beta SI}{N} = 0$$

$$b - \mu\left(\frac{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta\beta}N\right) - \frac{\beta\left(\frac{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta\beta}N\right)I}{N} = 0$$

$$b - \mu\left(\frac{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta\beta}N\right) = \frac{\beta\left(\frac{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta\beta}N\right)I}{N}$$

$$b - \mu\left(\frac{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta\beta}N(N)\right) = \beta\left(\frac{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta\beta}N\right)I$$

$$\beta\left(\frac{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta\beta}N\right)I = b - \mu\left(\frac{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta\beta}N(N)\right)$$

$$I = \frac{b - \mu\left(\frac{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta\beta}N(N)\right)}{\beta\left(\frac{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta\beta}N\right)}$$

Maka diperoleh I untuk titik ekuilibrium endemik penyakit yang dinotasikan dengan I^*, yaitu :

$$I^* = \frac{b - \frac{\mu N(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta\beta}}{\frac{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta}}$$

Subsitusikan I ke persamaan selanjutnya untuk memperoleh E sebagai berikut :

$$\delta E - (\mu+\gamma)I = 0$$

$$\delta E = (\mu+\gamma)I$$

$$\delta E = (\mu+\gamma)\left(\frac{b - \frac{\mu N(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta\beta}}{\frac{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta}}\right)$$

$$E = (\mu+\gamma)\left(\frac{b - \frac{\mu N(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta\beta}}{\frac{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta}}\right)\frac{1}{\delta}$$

Maka diperoleh E pada titik ekuilibrium endemik penyakit yang dinotasikan dengan E^*, yaitu :

$$E^* = \frac{b - \frac{\mu N(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta\beta}}{(\mu + \delta)}$$

Jadi, titik ekuilibrium endemik penyakit $(S^*, E^*, I^*) =$ $\left(\frac{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)N}{\delta\beta}, \frac{b-\frac{\mu N(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta\beta}}{(\mu+\delta)}, \frac{b-\frac{\mu N(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta\beta}}{\frac{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta}},\ \right)$.

Karena I^*> 0, artinya pada populasi selalu terdapat individuyang sakit maka pada model ini didefinisikan bilangan reproduksidasar . Bilangan reproduksi dasar (R_0) adalah rata-rata banyaknyainfeksi sekunder jika satu individu *infected* dimasukkan kedalam suatukelompok yang semuanya *susceptible*. Nilai R_0 digunakan untukmengetahui suatu populasi bebas penyakit atau endemic penyakit.

$$I^* => 0, maka\ \frac{b - \frac{\mu N(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta\beta}}{\frac{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta}} > 0,$$

Karena $N = \frac{b}{\mu}$

Maka persamaan menjadi

$$\frac{b - \frac{b(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta\beta}}{\frac{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta}} > 0$$

$$b - \frac{b(\mu + \delta)(\mu + \gamma)}{\delta\beta} > 0$$

$$\frac{b\delta\beta - b(\mu + \delta)(\mu + \gamma)}{\delta\beta} > 0$$

$$\frac{b(\delta\beta - (\mu + \delta)(\mu + \gamma)}{\delta\beta} > 0$$

$$\delta\beta - (\mu + \delta)(\mu + \gamma) > 0$$

$$\delta\beta > (\mu + \delta)(\mu + \gamma)$$

Karena $\delta\beta > (\mu + \delta)(\mu + \gamma)$ maka dapat didefinisikan bilangan reproduksi dasar sebagai berikut :

$$R_0 = \frac{\delta\beta}{(\mu + \delta)(\mu + \gamma)}$$

2.7 Kestabilan Titik Ekuilibrium

Untuk menentukan sifat kestabilan sistem, maka digunakan

Matriks Jacobian. Matriks Jacobian dari model SEIR adalah :

sebagai beikut :

$$If(S,E,I) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial E} & \frac{\partial f_1}{\partial I} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial E} & \frac{\partial f_2}{\partial I} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S} & \frac{\partial f_3}{\partial E} & \frac{\partial f_3}{\partial I} \end{bmatrix}$$

Dengan $f_1(S,E,I), f_2(S,E,I)$, dan $f_3(S,E,I)$ sebagai berikut :

$$s - \mu S - \frac{\beta SI}{N} = f_1(S,E,I)$$

$$\frac{\beta SI}{N} - (\mu + \delta)E = f_2(S,E,I)$$

$$\delta E - (\mu + \gamma)I = f_3(S,E,I)$$

Selanjutnya fungsi $f_1(S,E,I)$, $f_2(S,E,I)$, dan $f_3(S,E,I)$ diturunkanterhadap parameternya sehinnga diperoleh matriks jacobian dalam bentuk sebagai berikut :

$$If(S,E,I) = \begin{bmatrix} -\mu - \frac{\beta I}{N} & 0 & -\frac{\beta S}{N} \\ \frac{\beta I}{N} & -\mu - \delta & \frac{\beta S}{N} \\ 0 & \delta & -\mu - \gamma \end{bmatrix}$$

Teorema 2.3

(i) Jika $R_0 < 1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit $(\hat{S}, \hat{E}, \hat{I}) = (\frac{s}{\mu}, 0, 0)$

stabil asimtotik lokal.

(ii) Jika $R_0 > 1$ maka titik ekuilibrium endemic penyakit $(S^*, E^*, I^*) = \left(\frac{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)N}{\delta\beta}, \frac{s - \frac{\mu N(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta\beta}}{(\mu+\beta)}, \frac{s - \frac{\mu N(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta\beta}}{\frac{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta}} \right)$stabilasimtotik lokal.

2.8 Definisi Titik Kesetimbangan

Titik tetap dari suatu pemetaan $T = M \rightarrow M$, dengan M merupakan suatu himpunan sebarang, dan $m \in M$ yang dipetakan pada dirinya sendiri oleh pemetaan tersebut. Dengan kata lain dibuat titik tetap oleh pemetaan tersebut T dan dinotasikan sebaga berikut : $T(m) = m$

Misalkan diberikan sistem persamaan

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y, z)$$

$$\frac{dy}{dt} = Y(x, y, z)$$

$$\frac{dz}{dt} = Z(x, y, z)$$

Titik (x^*, y^*, z^*) dengan $X(x^*, y^*, z^*) = 0, Y(x^*, y^*, z^*) = 0, Z(x^*, y^*, z^*) = 0$ disebut titik kritis persamaan, titik kritis $E = ({x_1}^*, {x_2}^*, {x_3}^*)$ini merupakan solusi persamaan di atas yang bernilai konstan sebab $\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = 0, \frac{dz}{dt} = 0$. Keadaan yang menyebabkan $\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = 0, \frac{dz}{dt} = 0$ disebut dengan keadaan setimbang dan titik yang memenuhi disebut titik kesetimbangan (Sari,2010).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Tempat dan Waktu

Penelitian akan dilakukan pada semester ganjil tahun akademik 2018/2019 di Jurusan Matematika dan Laboratorim Komputer Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan secara studi literatur secara sistematis yang diperoleh dari buku-buku, jurnal-jurnal, atau media lain yang dapat menunjang proses penulisan skripsi ini. Adapun langkah-langkah yang dilakukan di dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Tahap Pertama, dalam tahapan ini dilakukan pengumpulan bahan pustaka berupa hasil-hasil penelitian yang dipaparkan pada jurnal–jurnal international terdahulu untuk kemudian dilakukan studi proses pengkajian model epidemik SEIR .
2. Menentukan asumsi dan mendefinisikan parameter yang digunkan pada model SEIR dengan asumsi adanya vaksinasi dan migrasi.
3. Menyelesaikan sisterm persamaan diferensial.
4. Mencari titik ekuilibrium model.

5. Menganalisa sifat kestabilan titik ekuilibrium.
6. Menginterpretasikan hasil yang diperoleh untuk mengetahui jumlah individu yang harus di vaksinasi agar tidak terjadi endemik penyakit.

V. PENUTUP

Bab V dalam penelitian ini terdiri dari kesimpulan dari pembahasan yangtelah dilakukan pada Bab IV dan saran bagi pembaca yang ingin melanjutkan penelitian ini.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab IV yaitu model SEIR penyakitHepatitis B dengan adanya vaksinasi dan migrasi dapat diambil kesimpulansebagai berikut :

1. Model penyebaran penyakit Hepatitis B menggunakan model SEIRdengan adanya asumsi vaksinasi dan migrasi adalah sebagai berikut :

$$\frac{dS}{dt} = s(1-t)N + p_1 S - \frac{\beta SI}{N} - \mu S - p_2 S$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \delta E - \mu E - p_2 E$$

$$\frac{dI}{dt} = \delta E - \gamma I - \mu I - \alpha I - p_2 I$$

$$\frac{dR}{dt} = stN + \gamma I - p_2 R - \mu R$$

2. Titik ekuilibrium terdiri atas dua, yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik penyakit. Titik ekuilibriumbebas penyakit $(\hat{S},\hat{E},\hat{I}) = \left(\frac{s(1-t)N}{(-p_1+\mu+p_2)}, 0{,}0\right)$, Sedangkan titikekuilibrium endemik penyakit adalah

$$(S^*, E^*, I^*) = \left(\frac{(\delta+\mu+p_2)(\delta+\mu+p_2)N}{\delta\beta}, \frac{s(1-t)N - \frac{(-p_1-\mu-p_2)(\delta+\mu+p_2)(\delta+\mu+p_2)N}{\delta\beta}}{\frac{(\delta+\mu+p_2)(\gamma+\mu+\alpha+p_2)N}{\delta}}, \left(s(1 - t)N - \frac{(-p_1-\mu-p_2)(\delta+\mu+p_2)(\delta+\mu+p_2)N}{\delta\beta} \right) \frac{1}{(\delta+\mu+p_2)} \right)$$

3. Bilangan Reproduksi Dasar (*R0*) dapat didefinisikan sebagai berikut :

$$R_0 = \frac{s(1-t)\beta\delta}{(-p_1+\mu+p_2)(\delta+\mu+p_2)(\gamma+\delta+\mu+p_2)}$$

4. Jika Jika R_0< 1 maka titik ekuilibrium bebas penyakit penyakit$(\hat{S}, \hat{E}, \hat{E})$stabil asimtotik. Dan jika R_0 > 1 maka titik ekuilibriumendemik penyakit (S^*, E^*, I^*)stabil asimtotik.

5. Jumlah individu yang harus divaksinasi agar tidak terjadi endemik pada penyakit Hepatitis B adalah $t_c > 1 - \frac{1}{R_0}$. Jika tingkat minimumjumlah orang yang divaksinasi terpenuhi, maka jumlah individu yangterkena penyakit Hepatitis B akan berkurang dan didalam populasi tidakterjadi endemik pada penyakit Hepatitis B.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H, *Aljabar Linear Elementer*, Terjemahan Pantur Silaban dan I NyomanSusila, Edisi ke-5, Erlangga, Jakarta, 1998.

Chasnov, R. Jeffrey, *Mathematical Biology*, The Hong Kong University Of Science and Technology, Hong Kong, 2009.

Ekawati, Aminah, Kestabilan Model SEIR, *Media Sains*. Vol. 3, No. 2, Oktober2011.

Edelstein-Keshet L. 1988. *Mathematical Models in Biology*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM, 3600 Market Street, Floor 6, Philadelphia, PA 19104.

Giordano, F. R and Weir, M. D. 2002. *Different Equations a Modelling Approach.* Addision Wesley Publishing Company, New York.

Kocak, H. dan Hale, J. K. , *Dynamic and Bifurcation,* Springer-verlag, New York,1991.

Panfilov, A., *Qualitative Analysis Of Differential Equation*, Utrecht University,Utrecht, 2004.

Perko, L., 1991, *Differential Equations and Dynamical Systems,* Springer-verlag,New York, 1991.

Sari, Damayekti Intan Permata. 2010. *Model Epidemi SIS dengan Vaksinasi da Imigrasi*. Skripsi. Tidak diterbitkan. Malang: UNIBRAW Malang.

Side, Syafruddin, Model SEIR pada Penularan Hepatitis B, *Scientific Pinisi.* Vol. 1, No. 1, Oktober 2015.

Wiggins, S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos,*Springer Verlag, New York, 1990.

Warta Katiga, 2012. Mengenal Hepatitis Di Tempat Kerja. Edisi 6, 2012.