PENENTUAN BANYAKNYA GRAF TERHUBUNG BERLABEL TITIK BERORDE ENAM DENGAN MAKSIMAL LIMA BELAS GARIS 2-PARALEL

(Skripsi)

Oleh
Gusti Sayu Putu Widya Sasti

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

ABSTRACT

COUNTING THE NUMBER OF CONNECTED VERTEX LABELLED GRAPHS WITH ORDER SIX WITH MAXIMUM FIFTEEN 4-PARALLEL EDGES

By

GUSTI SAYU PUTU WIDYA SASTI

A graph G is connected graph if there exists at least one path between every pair of vertices in G. A labelled graph is the assignment of values or label at each vertex or each edge. The label given at each vertex called vertex labeling, the label given on each edge is called the edge labeling , and if the label is given on each edge and vertex is called total labeling. Paralel lines are two or more line whose starting point and end point are the same. If given n vertex and m edge then many connected graphs can be formed. In this research obtained the formula for counting the number of vertex labeled connected graphs with order six with maximal fifteen 4-parallel edges.

Keywords: graph, connected graph, labeled graph, and parallel lines

ABSTRAK

PENENTUAN BANYAKNYA GRAF TERHUBUNG BERLABEL TITIK BERORDE ENAM DENGAN MAKSIMAL LIMA BELAS GARIS 2-PARALEL

Oleh

GUSTI SAYU PUTU WIDYA SASTI

Suatu graf G disebut graf terhubung jika terdapat sekurang – kurangnya ada satu *path* yang menghubungkan sepasang titik di G. Graf berlabel merupakan graf yang setiap titik atau garisnya diberi label. Label yang diberikan pada tiap titik disebut sebagai pelabelan titik, label yang diberikan pada tiap garis disebut pelabelan garis, dan jika label diberikan pada tiap garis dan titik disebut sebagai pelabelan total. Garis paralel adalah dua garis atau lebih yang titik awal dan titik akhirnya sama. Jika diberikan n titik dan m garis maka banyak graf terhubung dapat dibentuk. Pada penelitian ini diperoleh rumus untuk menghitung banyaknya graf terhubung berlabel titik berorde enam dengan maksimal lima belas garis 2-paralel.

Kata Kunci : graf, graf terhubung, graf berlabel dan garis paralel

PENENTUAN BANYAKNYA GRAF TERHUBUNG BERLABEL TITIK BERORDE ENAM DENGAN MAKSIMAL LIMA BELAS GARIS 2-PARALEL

Oleh

Gusti Sayu Putu Widya Sasti

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

Judul Skripsi : **PENENTUAN BANYAKNYA GRAF TERHUBUNG BERLABEL TITIK BERORDE ENAM DENGAN MAKSIMAL LIMA BELAS GARIS 2-PARALEL**

Nama Mahasiswa : Gusti Sayu Putu Widya Sasti

Nomor Pokok Mahasiswa : 1517031022

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.	**Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.**
NIP 19631108 198902 2 001	NIP 19720227 199802 1 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.** ....

Sekretaris : **Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Drs. Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

KEMENTERIAN RISET, TEKNOLOGI DAN PENDIDIKAN TINGGI
UNIVERSITAS LAMPUNG
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

Drs. Suratman, M.Sc.
NIP 19640604 199003 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **1 April 2019**

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: Gusti Sayu Putu Widya Sasti
Nomor Induk Mahasiswa	: 1517031022
Judul	: PENENTUAN BANYAKNYA GRAF TERHUBUNG BERLABEL TITIK BERORDE ENAM DENGAN MAKSIMAL LIMA BELAS GARIS 2-PARALEL
Jurusan	: Matematika

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan semua tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah karya penulisan ilmiah Universitas Lampung.

Bandar Lampung, 1 April 2019

Penulis

Gusti Sayu Putu Widya Sasti
NPM. 1517031022

RIWAYAT HIDUP

Penulis lahir di Sidoharjo, Lampung Selatan pada tanggal 2 Agustus 1997 dengan nama lengkap Gusti Sayu Putu Widya Sasti, anak pertama dari pasangan Bapak I Gusti Nyoman Alit dan Ibu Gusti Sayu Ketut Sukiasih. Penulis mempunyai dua orang adik laki-laki yang bernama I Gusti Kade Bagus Prananda dan I Gusti Komang Arya Ananta.

Penulis mengawali pendidikan Taman Kanak-kanak di TK MMT Rawajitu Selatan pada tahun 2002-2003, kemudian menempuh pendidikan sekolah dasar di SDN 02 Gedung Karya Jitu, Rawajitu Selatan pada tahun 2003-2009, selanjutnya pada tahun 2009-2012 penulis melanjutkan pendidikan Sekolah Menengah Pertama di SMPN 01 Rawajitu Timur dan tahun 2012-2015 penulis melanjutkan Sekolah Menengah Atas di SMA Yos Sudarso Metro.

Pada tahun 2015 penulis melanjutkan pendidikan Strata Satu (S1) di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Penulis pernah mengikuti kegiatan yang diadakan universitas sebagai anggota UKM Hindu Unila Universitas Lampung. Selanjutnya, penulis melaksanakan kerja praktik pada tanggal 18 Januari 2018 sampai dengan 28 Februari 2018 di

Dinas Pekerjaan Umum dan Penataan Ruang Provinsi Lampung bertempat di Jalan HI. Zainal Abidin Pagar Alam KM. 11 Rajabasa, Bandar Lampung, Lampung dan mengikuti kuliah kerja nyata (KKN) Periode II tahun 2018.

KATA INSPIRASI

Jangan pernah menyerah ketika anda masih mampu berusaha lagi. Tidak ada kata berakhir sampai anda berhenti mencoba.

(Brian Dyson)

“Selalu bersyukur dengan apa yang dimiliki dan selalu menjadi lebih baik dari yang terbaik”

(Gusti Sayu)

Ia yang mengerjakan lebih dari apa yang dibayar pada suatu saat akan dibayar lebih dari apa yang ia kerjakan

(Napoleon Hill)

SANCAWACANA

Puji syukur penulis haturkan kepada Tuhan Yang Maha Esa karena berkat limpahan rahmat dan karunia-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Penentuan Banyaknya Graf Terhubung Berlabel Titik Berorde Enam Dengan Maksimal Lima Belas Garis 2-Paralel". Dapat diselesaikannya skripsi ini tidak terlepas dari bantuan dan kerjasama berbagai pihak yang telah membantu dan memberikan bimbingan, saran maupun mootivasi sehingga skripsi dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terimakasih kepada :

1. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, MA., Ph.D., selaku dosen pembimbing I dan Ketua Jurusan Matematika yang selalu bersedia memberikan bimbingan, saran, motivasi dan semangat dalam menyelesaikan skripsi ini.
2. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si, M.Si., selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan bimbingan dan motivasi selama proses penulisan skripsi.
3. Bapak Drs. Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D., selaku dosen penguji yang selalu memberikan saran yang membangun serta membimbing penulis sehingga terselesaikannya skripsi ini.
4. Bapak Drs. Suratman , M.Sc., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.

5. Aji, Mama, Bagus dan Arya yang selalu mendoakan, memberikan semangat, motivasi, nasihat dengan penuh kasih sayang sehingga menguatkan penulis dalam menjalani setiap proses hingga meraih gelar sarjana.
6. Gede Kusuma Admaja yang selalu menemani dan selalu memberikan semangat kepada penulis.
7. Irma, Dita, Suci, Nurhayati, Winda, Martha, Elvira, Wiwin, Lena, Leni, dan semua teman-teman matematika angkatan 2015 yang selalu memberikan semangat dan selalu memberikan dukungan kepada penulis.
8. Seluruh pihak yang telah berperan dalam penyelesaian skripsi ini, yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih banyak kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran. Terimakasih.

Bandar Lampung, April 2019

Penulis

Gusti Sayu Putu Widya Sasti

PERSEMBAHAN

Puji Syukur ku panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa karena berkat limpahan rahmad dan karunia-Nya akhirnya aku bisa menyelesaikan studi ini, aku persembahkan hasil karyaku untuk orang-orang yang selalu mendukung, memotivasi, menyayangi, dan memberikan semangat dalam segala hal.

Aji dan Mama tercinta yang selalu mendoakan, mendidik, memberikan motivasi, dukungan, semangat, selalu menemani dalam segala hal, dan banyak lagi yang tidak akan pernah habis diungkapkan oleh kata-kata.

Adik-adikku tercinta dan semua saudara-saudaraku yang selalu memberikan semangat, mendukung, menemani dan selalu memberikan motivasi.

Dosen Pembimbing dan Penguji yang sangat berjasa dan selalu memberikan motivasi kepada penulis untuk hingga terselesaikannya skripsi ini.

Sahabat dan teman-teman ku yang selalu membantu, menemani dan memberikan semangat.

Almamater Universitas Lampung

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

Tabel **Halaman**

DAFTAR GAMBAR

Gambar **Halaman**

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Perkembangan ilmu pengetahuan pada saat ini sangat pesat terutama dalam bidang sains dan teknologi. Teori graf merupakan salah satu teori atau cabang matematika yang banyak digunakan untuk merepresentasikan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari. Hal ini karena teori graf memuat informasi yang diinterpretasikan secara tepat, yang digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Representasi dari graf adalah dengan menyatakan objek sebagai titik atau *vertex*, dan hubungan antara objek dinyatakan dengan garis atau *edge*.

Teori graf muncul pertama kali pada tahun 1736 melalui tulisan Leonhard Euler yang berisi tentang upaya penyelesaian masalah jembatan Konigsberg, di Kaliningrad, Rusia. Di kota tersebut terdapat sungai Pregal yang membelah kota menjadi empat daratan yang terpisah. Daratan tersebut dihubungkan oleh tujuh jembatan. Warga kota tersebut ingin melewati setiap jembatan tepat satu kali dan kembali ke tempat awal. Dengan memisalkan daratan sebagai titik dan jembatan sebagai garis, Leonhard Euler menyatakan bahwa tidak mungkin seseorang dapat melalui tiap jembatan tersebut tepat satu kali dan kembali lagi ke tempat awal.

Hal tersebut dapat terjadi jika jumlah jembatan yang menghubungkan tiap-tiap daratan adalah genap.

Graf G (V, E) dikatakan terhubung jika untuk setiap dua titik yang berbeda di G, terdapat suatu lintasan atau *path* yang menghubungkan titik tersebut. Sebaliknya jika di G tidak terdapat *path* yang menghubungkan maka dikatakan graf tidak terhubung. Dalam suatu teori graf dikenal istilah garis paralel dan *loop*. Garis paralel adalah dua atau lebih garis yang menghubungkan dua titik yang sama dalam suatu graf dan *loop* adalah suatu garis yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama.

Selain itu, dalam teori graf juga mengenal istilah graf berlabel. Graf berlabel merupakan graf yang tiap titik atau garisnya memiliki label. Jika hanya titiknya yang diberi label maka pelabelan tersebut disebut pelabelan titik, sedangkan jika hanya garis yang diberikan label maka disebut pelabelan garis dan jika titik serta garis diberikan label maka disebut pelabelan total. Fatimah (2016) berhasil menentukan banyaknya graf terhubung berlabel tanpa garis paralel dengan $n = 6$ serta $m \geq (n - 1)$, dengan n adalah titik dan m adalah garis. Oleh karena itu penulis tertarik untuk meneliti tentang banyaknya graf terhubung berlabel titik berorde enam dengan maksimal lima belas garis 2-paralel.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan rumus umum banyaknya graf terhubung berlabel titik dengan maksimal lima belas garis 2-paralel jika diberikan 6 titik dan m garis ; $m \geq 5$.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang diperoleh dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Memperluas pengetahuan teori graf khususnya tentang graf terhubung
2. Sebagai sumber referensi bagi pembaca untuk penelitian selanjutnya serta dapat memberikan motivasi bagi pembaca untuk dapat mengembangkan ilmu matematika di bidang teori graf.

II. TINJAUAN PUSTAKA

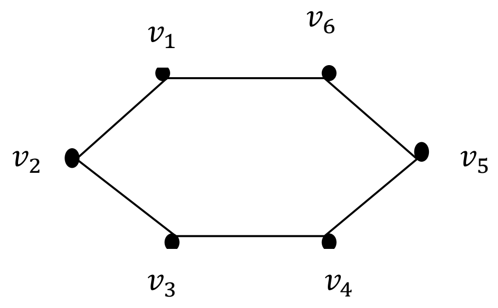
Pada bab ini akan diberikan beberapa definisi dan teorema yang berhubungan dengan penelitian yang akan dilakukan.

2.1 Konsep Dasar Teori Graf

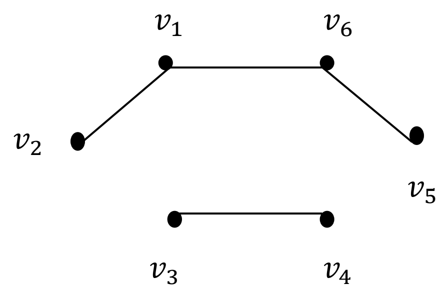
Istilah-istilah dan definisi yang digunakan pada subbab ini diambil dari Deo (1989). Suatu graf G adalah himpunan terurut (V,E) dengan V(G) menyatakan himpunan tak kosong dan memuat elemen-elemen yang disebut *vertex* atau titik, dan E(G) (mungkin kosong) menyatakan himpunan sisi yang elemen-elemennya berbentuk garis atau disebut *edge* yang menghubungkan pasangan titik di G.

Adapun konsep dasar yang perlu diketahui diantaranya adalah graf terhubung, graf tak terhubung, graf sederhana, graf tidak sederhana, *loop*, garis paralel, *walk*, *path*, *cycle*, derajat (*degree*) dan graf isomorfis.

Suatu graf G disebut graf terhubung (*connected graph*) jika terdapat sekurang-kurangnya ada satu *path* (lintasan) yang menghubungkan sepasang titik di G. Graf tidak terhubung G merupakan graf yang terdiri dari dua atau lebih graf terhubung.

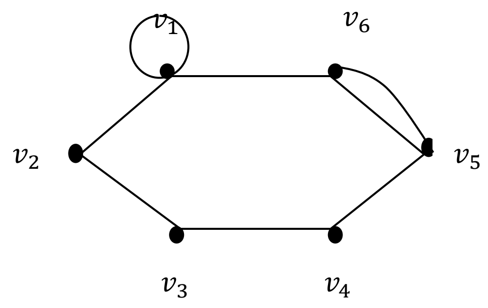


Gambar 2.1 Contoh graf terhubung



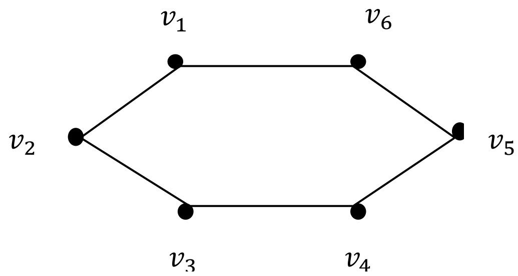
Gambar 2.2 Contoh graf tidak terhubung

Loop adalah satu garis yang titik awal dan titik ujungnya sama. Garis Paralel adalah dua garis atau lebih yang menghubungkan sepasang titik yang sama.

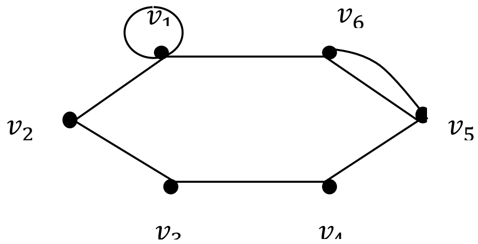


Gambar 2.3 Contoh graf dengan *loop* dan garis paralel

Walk adalah barisan berhingga dari suatu titik dan garis yang dimulai dan diakhiri dengan titik, sedemikian sehingga setiap garis menempel pada titik sebelum dan sesudahnya. *Walk* yang berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut *closed walk*. *Walk* yang melewati titik yang berbeda-beda disebut sebagai *path* (lintasan). *Path* yang berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut *cycle*. Graf sederhana adalah suatu graf yang tidak memuat *loop* atau garis paralel sedangkan jika memuat *loop* atau garis paralel, maka disebut graf tak sederhana.

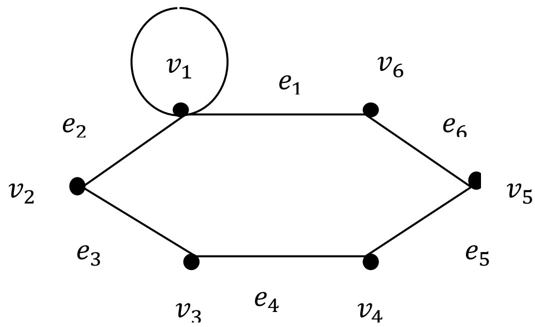


Gambar 2.4 Contoh graf sederhana



Gambar 2.5 Contoh graf tidak sederhana

Derajat (*degree*) dari suatu titik v pada graf G dinotasikan *deg(v)* adalah banyaknya garis yang menempel pada titik v dengan *loop* terhitung dua. Sebagai contoh pada Gambar 2.6 *deg* (v_1) = 4 dan *deg* (v_2) = *deg* (v_3) = *deg* (v_4) = *deg* (v_5) = *deg* (v_6) = 2

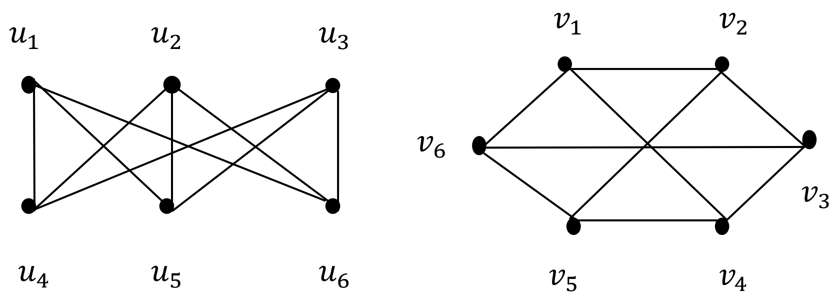


Gambar 2.6 Contoh graf untuk menentukan derajat

Dua graf dikatakan ekuivalen dan disebut isomorfis jika keduanya memiliki ciri-ciri yang sama pada istilah dalam teori graf. Dua graf isomorfis harus memiliki

- Jumlah *vertex* yang sama.
- Jumlah *edge* yang sama.
- Mempunyai jumlah *vertex* yang sama berderajat tertentu

Perlu diperhatikan bahwa dua graf yang memiliki jumlah *vertex* yang sama, *edge* yang sama, dan mempunyai jumlah *vertex* yang sama berderajat tertentu belum tentu isomorfis.



Gambar 2.7 Contoh graf isomorfis

2.2 Konsep Dasar Teknik Pencacahan

Konsep-konsep dasar teknik pencacahan yang biasanya digunakan dalam teori graf diantaranya:

1. Faktorial

Misalkan n adalah bilangan bulat positif. Besaran n factorial (simbol n!) di definisikan sebagai hasil kali semua bilangan bulat antara n hingga 1 (Siang, 2002).

$$n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 1$$

2. Permutasi

Permutasi r objek dari n objek adalah suatu urutan r objek yang diambil dari n objek yang berbeda yang dapat dibentuk. Secara umum, permutasi r objek dari n buah objek dapat dihitung dengan persamaan

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Jika r = n, maka persamaan menjadi

$$P(n, n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

$P(n, n)$ sering disebut permutasi *n* objek karena permutasi tersebut menyusun keseluruhan objek yang ada (Siang, 2002).

3. Kombinasi

Misalkan himpunan S memiliki $|S|$ = *n* elemen. Banyaknya himpunan bagian S yang terdiri dari r $(r \leq n)$ disebut kombinasi *n* objek yang diambil sebanyak r objek sekaligus. Simbolnya adalah $\binom{n}{r}$ atau $C(n, r)$ atau ${}_{n}C_{r}$. Rumus kombinasi adalah sebagai berikut.

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Dalam himpunan bagian yang dipilih, urutan kemunculan anggotanya tidaklah diperhatikan. Hal yang diperhatikan adalah objek yang muncul (Siang, 2002).

2.3 Konsep Dasar Barisan

Barisan merupakan suatu fungsi yang semua domainnya merupakan bilangan bulat dan dinotasikan dengan $\{a_n\}$ (Rosen, 2012). Secara umum, barisan yang terbentuk adalah sebagai berikut :

$$a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots \dots \dots \dots a_n$$

Contoh : 5,10,15,20,25,30, …

Barisan dibagi menjadi dua yaitu, barisan aritmatika dan barisan geometri. Barisan aritmatika adalah barisan yang berbentuk $a, a + d, a + 2d, \dots, a + nd, \dots$, dengan a dan d adalah bilangan rill, dimana d merupakan beda dan barisan yang memiliki pola $a, ar, ar^2, \dots \dots, ar^n, \dots .$, dengan a dan r adalah bilangan riil dimana r merupakan rasio (beda) disebut barisan geometri (Rosen, 2012).

III. METODE PENELITIAN

Pada bab ini akan diberikan tempat dan waktu penelitian, penelitian yang telah dilakukan yang berkaitan, serta metode yang digunakan untuk penelitian ini.

3.1 Penelitian yang Telah Dilakukan

Diberikan $n, m \in \mathbb{N}$ dengan $0 \leq m \leq \binom{n}{2}$

1. Graf g_n dengan n sebagai titiknya merupakan graf sederhana, maka banyaknya graf g_n adalah :

$$g_n = 2^{\binom{n}{2}}$$

2. Graf g_n (m) dari graf sederhana yang memiliki n titik dan m garis, maka banyaknya graf g_n adalah :

$$g_n(m) = \binom{\binom{n}{2}}{m}$$

(Agnarsson dan Raymond, 2007)

Selanjutnya, Wamiliana, dkk. (2016) melakukan penelitian tentang graf tak terhubung berlabel tanpa garis paralel dengan $n = 5$ dan $m \geq 1$ dapat dirumuskan secara umum, yaitu :

$$N(G'_{5,m}) = N(G'_{5,m}) + \sum_{g=1}^{6} N(G'_{5,m,g})$$

$$= \binom{m+4}{4} + N(G'_{5,m,1}) + N(G'_{5,m,2}) + N(G'_{5,m,3}) + N(G'_{5,m,4}) + N(G'_{5,m,5})$$

$$+ N(G'_{5,m,6})$$

$$= \binom{m+4}{4} + 10\binom{m+3}{4} + 45 \times \binom{m+2}{4} + 120 \times \binom{m+1}{4} + 85 \times \binom{m}{4}$$

$$+30 \times \binom{m-1}{4} + 5 \times \binom{m-2}{4}$$

Dengan :

$N(G'_{5,m})$ = Jumlah graf tak terhubung berlabel tanpa garis paralel untuk $n = 5$ dan $m \geq 1$.

Fatimah (2016), melakukan penelitian untuk menentukan banyaknya graf terhubung berlabel berorde enam tanpa garis paralel dengan banyaknya garis $\geq$ 5 adalah

1. Untuk $n = 6$ dan $g = 5$ diperoleh rumus umum yaitu:

$$N(G_{n,m,l,5}) = 1296\binom{m}{5}$$

2. Untuk $n = 6$ dan $g = 6$ diperoleh rumus umum yaitu:

$$N(G_{n,m,l,6}) = 1980\binom{m-1}{5}$$

3. Untuk $n = 6$ dan $g = 7$ diperoleh rumus umum yaitu:

$$N(G_{n,m,l,7}) = 3330\binom{m-2}{5}$$

Dengan ketentuan sebagai berikut

n = banyaknya titik pada graf

m = banyaknya garis pada graf

g = garis bukan *loop*

Kemudian, pada tahun 2017, Amanto dkk., melakukan penelitian untuk menentukan banyaknya graf tak terhubung berlabel titik berorde maksimal empat dengan hasil sebagai berikut :

$$N\left(G'_{4,m,g_i}\right) = N\left(G'_{4,m,g_0}\right) + N\left(G'_{4,m,g_1}\right) + N\left(G'_{4,m,g_2}\right) + N\left(G'_{4,m,g_3}\right)$$

$$N\left(G'_{4,m,g_i}\right) = \binom{m+3}{3} + \frac{3}{2}m\binom{m+3}{3} + 15\binom{m+3}{5} + 4\binom{m+3}{6}$$

Dengan ketentuan sebagai berikut.

n = banyaknya titik

m = banyaknya garis

g_i = banyaknya garis bukan *loop* pada G dengan garis paralel dihitung satu

$i = 0,1,2,3$

$G'_{n,m,g_i} =$ graf tak terhubung berlabel dengan garis paralel atau *loop* dengan *n* titik, *m* garis, dan g_i = banyaknya garis bukan *loop* pada G dengan garis paralel dihitung satu.

Selanjutnya Efendi, pada tahun 2018 melakukan penelitian untuk menentukan graf-graf tak terhubung berlabel berorde lima tanpa *loop* serta banyaknya garis 3-paralel maksimal enam dengan n=5, 1 ≤ m ≤ 18 dengan hasil sebagai berikut.

1. $\mathrm{N}(G^d_{5,m,1}) = 10 \quad ; 1 \leq m \leq 3$
2. $\mathrm{N}(G^d_{5,m,2}) = \begin{cases} 45(m-1)\ ;\ 2 \leq m \leq 4 \\ -45(m-7)\ ;\ 4 \leq m \leq 6 \end{cases}$
3. $\mathrm{N}(G^d_{5,m,3}) = \begin{cases} -60\,(m^3 - 13\,m^2 + 50\,m - 62)\ ;\ 3 \leq m \leq 6 \\ 60\,(m^3 - 23\,m^2 + 170\,m - 394)\ ;\ 6 \leq m \leq 9 \end{cases}$

4. $N(G_{5,m,4}^{d}) = \begin{cases} \frac{-510}{12}(m^3 - 18\,m^2 + 95\,m - 10658)\,; & 4 \le m \le 8 \\ \frac{510}{12}\,m^3 - \frac{153000}{12}m^2 + \frac{176370}{12}m - \frac{548785500}{12}\,; & 8 \le m \le 12 \end{cases}$

5. $N(G_{5,m,5}^{d}) =$

$$\begin{cases} -5\,(m^4 - 25\,m^3 + 215\,m^2 - 785\,m + 1044)\,; & 5 \le m \le 10 \\ -5\,(m^4 - 55\,m^3 + 1115\,m^2 - 9815\,m + 31344)\,; & 10 \le m \le 15 \end{cases}$$

6. $N(G_{5,m,6}^{d}) =$

$$\begin{cases} \frac{75}{720}\left(m^6 - 53\,m^5 + 1141\,m^4 - 12803\,m^3 + 79402\,m^2 - 259160\,m + 348720\right); \\ \qquad 6 \le m \le 12 \\ \frac{75}{720}\left(m^6 - 91\,m^5 + 3421\,m^4 - 67933\,m^3 + 750802\,m^2 - 4376392\,m + 10516080\right); \\ \qquad 2 \le m \le 18 \end{cases}$$

dengan :

$N(G_{n,m,t}^{d})$ = banyaknya graf tak terhubung berlabel titik tanpa *loop* berorde *n* dengan *m* garis dan *t* adalah banyaknya garis yang menghubungkan pasangan titik yang berbeda

3.2 Waktu dan Tempat

Penelitian ini dilakukan di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung pada semester ganjil pada tahun ajaran 2018/2019.

3.3 Metode Penelitian

Adapun langkah-langkah yang digunakan penulis dalam menyelesaikan penelitian ini sebagai berikut.

1. Mengumpulkan bahan literatur serta studi kepustakaan yang berhubungan dengan graf.
2. Menentukan banyaknya titik dan garis yang akan dicari banyakanya graf terhubung berlabel titik dengan maksimal lima belas garis 2-paralel.
3. Menggambar graf terhubung dengan maksimal lima belas garis 2- paralel, dengan n adalah banyaknya titik dan m adalah banyaknya garis.
4. Mengelompokkan graf terhubung untuk n titik dan m garis yang sama.
5. Menghitung jumlah graf terhubung untuk setiap n titik dan m garis.
6. Menentukan pola yang terbentuk dari banyaknya graf yang dapat dibentuk dari n titik dan m garis.
7. Menentukan rumus umum untuk menghitung jumlah graf terhubung berlabel titik dengan maksimal lima belas garis 2- paralel untuk n titik dan m garis.
8. Membuktikan rumus yang terbentuk.

V. KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil observasi yang telah dilakukan, dapat disimpulkan rumus untuk menentukan banyaknya graf terhubung berlabel titik berorde enam $N(G_{6,m,t})$ dengan maksimal lima belas garis 2-paralel adalah sebagai berikut ;

Untuk t = 5

$$N(G_{6,m,5}) = \begin{cases} 648\left(m^2 - 3m - 8\right); 5 \leq m \leq 7 \\ 648\left(m^2 - 27m + 172\right); 8 \leq m \leq 10 \end{cases}$$

Untuk t = 6

$$N(G_{6,m,6}) = \begin{cases} 660\,(-4m^3 + 90m^2 - 647m + 1509)\,; 6 \leq m \leq 9 \\ 660\,(4m^3 - 126m^2 + 1295m - 4305); 9 \leq m \leq 12 \end{cases}$$

Untuk t = 7

$$N(G_{6,m,7}) = \begin{cases} 1110\,(-4m^3 + 108m^2 - 926m + 2565)\,; 7 \leq m \leq 10 \\ 1110\,(4m^3 - 144m^2 + 1682m - 6297); 11 \leq m \leq 14 \end{cases}$$

Untuk t = 8

$$N(G_{6,m,8}) = \begin{cases} \frac{385}{2}\left(17m^4 + 626m^3 - 8467m^2 + 50170m - 110328\right) \\ \qquad ; 8 \leq m \leq 12 \\ \frac{385}{2}(-17m^4 + 1006m^3 - 22147m^2 + 214550m - 769608) \\ \qquad ; 12 \leq m \leq 16 \end{cases}$$

Untuk t = 9

$$N(G_{6,m,9}) = \begin{cases} \frac{555}{2}\,(-29\,m^4 + 1226\,m^3 - 19123\,m^2 + 131014\,m \\ \qquad - 333624)\,;\, 9 \le m \le 13 \\ \frac{555}{2}\,(-29\,m^4 + 1906\,m^3 - 46663\,m^2 + 503594\,m \\ \qquad - 2017344)\,;\, 14 \le m \le 18 \end{cases}$$

Untuk t =10

$$N(G_{6,m,10}) = \begin{cases} \frac{79}{4}\,(m^5 - 255\,m^4 + 10685\,m^3 - 179025\,m^2 \\ \qquad + 1346274m - 3795120)\,;\, 10 \le m \le 15 \\ -\frac{79}{4}\,(m^5 + 105\,m^4 - 10915\,m^3 + 324375\,m^2 \\ \qquad - 4035726m + 18284400)\,;\, 15 \le m \le 20 \end{cases}$$

Untuk t = 11

$$N(G_{6,m,11}) = \begin{cases} \frac{77}{8}\,(-34m^5 + 1995\,m^4 - 45900\,m^3 + 518325\,m^2 \\ \qquad - 2872946\,m + 6245040)\,;\, 11 \le m \le 16 \\ \frac{77}{8}\,(34\,m^5 - 3615\,m^4 + 152820\,m^3 - 3209025\,m^2 \\ \qquad + 33448106m - 138305520)\,;\, 17 \le m \le 22 \end{cases}$$

Untuk t = 12

$$N(G_{6,m,12}) = \begin{cases} \frac{7}{3}\,(29\,m^6 - 2649\,m^5 + 99755\,m^4 - 1983525\,m^3 \\ + 21983156m^2 - 128871306\,m + 312455340)\,;\, 12 \le m \le 18 \\ \frac{7}{3}\,(29\,m^6 - 3615\,m^5 + 186695\,m^4 - 5110635\,m^3 \\ +78172856m^2 - 633248550m + 2121797700);\, 18 \le m \le 24 \end{cases}$$

Untuk t = 13

$$N(G_{6,m,13}) = \begin{cases} \frac{5}{6}\,(23\,m^6 - 2355\,m^5 + 98795\,m^4 - 2177505\,m^3 \\ +26643152m^2 - 171874650m + 457350840);\, 13 \le m \le 19 \\ \frac{5}{6}\,(23\,m^6 - 3027\,m^5 + 164315\,m^4 - 4701705\,m^3 \\ +74652932m^2 - 622189998m + 2120576040);\, 20 \le m \le 26 \end{cases}$$

Untuk t = 14

$$N(G_{6,m,14}) = \begin{cases} \frac{1}{42}(43\,m^7 - 5110m^6 + 258601\,m^5 - 7227745\,m^4 + 120555442\,m^3 \\ - 1200611965m^2 + 6613492164m - 15550701390); 14 \le m \le 21 \\ \\ \frac{1}{42}\,(-43m^7 + 7532m^6 - 563773m^5 + 23370305m^4 - 579324802m^3 \\ + 8585913623m^2 - 70428668232m + 246625248870); 21 \le m \le 28 \end{cases}$$

Untuk t = 15

$$N(G_{6,m,15}) = \begin{cases} \frac{45}{28350}(64\,m^7 - 8197\,m^6 + 447223\,m^5 - 13479130\,m^4 + 242482891\,m^3 \\ - 2604768733m^2 + 15476660982m - 39251762550)\ ; 15 \le m \le 22 \\ \frac{45}{28350}(-64m^7 + 11963m^6 - 955633m^5 + 42282170m^4 - 1118872741m^3 \\ +17704403927m^2 - 155081980962m + 580037102190); 23 \le m \le 30 \end{cases}$$

Dengan;

N($G_{n,m,t}$) = banyaknya graf terhubung berlabel titik berorde *n* dengan *m* garis dan *t* adalah banyaknya garis yang menghubungkan pasangan titik yang berbeda.

5.2 Saran

Penelitian dapat di lanjutkan untuk menentukan rumus umum jumlah graf terhubung berlabel titik maksimal garis 2-paralel untuk n ≥ 7.

DAFTAR PUSTAKA

Agnarsson, G. and Raymond, D.G. 2007. *Graph Theory Modeling, Applications, and Algorithms*. Pearson/Prentice Education Inc., New Jersey.

Amanto, Wamiliana, Mustofa Usman, dan Reni Permata Sari. 2017. Counting The Number of Disconnected Vertex Labelled Graphs with Order Maximal Four. *Science International Lahore*, Vol.29, No.6, Hal. 1181-1186.

Deo, N. 1989. *Graph Theory with Applications to Enginering and Computer Science*. Pretice Hall Inc., New York.

Efendi, M.F. 2018. Penentuan Banyaknya Graf-Graf Tak Terhubung Berlabel Titik Berorde Lima Tanpa Loop Serta Banyaknya Garis 3-Paralel Maksimal Enam. Skripsi. Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung, Bandar Lampung.

Fatimah, S. 2016. Penentuan Pola-Pola Graf Terhubung Berlabel Berorde Enam Tanpa Garis Paralel Dengan Banyaknya Garis ≥ 5. Skripsi. Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung, Bandar Lampung.

Rosen, H. 2012. *Discrete Mathematics and its Applications*. McGraw-Hill, New York.

Siang, J.J. 2002. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer*. Edisi Ketiga. ANDI Yogyakarta, Yogyakarta.

Wamiliana, Amanto, dan Grita Tumpi N. 2016. Counting the Number of Disconnected Labelled Graphs of Order Five Without Paralel Edges. *Journal INSIST*, Vol.1, No.1, eISSN. Hal. 4-7.