REPRESENTASI PERKALIAN PADA BARISAN BILANGAN DAN APLIKASI UNTUK BILANGAN FIBONACCI YANG DIPERUMUM

(Skripsi)

Oleh

HILYATUSH SHOLIHAH

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

ABSTRAK

REPRESENTASI PERKALIAN PADA BARISAN BILANGAN DAN APLIKASI UNTUK BILANGAN FIBONACCI YANG DIPERUMUM

Oleh

HILYATUSH SHOLIHAH

Bilangan Fibonacci, bilangan Lucas, bilangan Pell, dan bilangan Pell-Lucas adalah contoh paling menonjol dari barisan rekursif. Penulis menyelidiki sifat umum dari barisan bilangan yang memungkinkan representasi eksplisit dalam suku-suku perkalian. Selanjutnya diperoleh bahwa bilangan tersebut membentuk semua himpunan barisan bilangan yang memiliki identitas rekursif serupa. Dan menerapkan identitas yang diperoleh untuk himpunan kekuatan barisan dan himpunan bilangan Pochhammer, menemukan dan menggeneralisasi relasi rekursif yang diketahui. Dan mempelajari kasus khusus himpunan bilangan Fibonacci yang diperumum, dan menyajikan rekursi umum dan identitas yang menghubungkan barisan ini.

Kata Kunci : Representasi perkalian, Bilangan Fibonacci, Bilangan Pell, Bilangan Pocchammer, identitas rekursif

ABSTRACT

ON THE PRODUCT REPRESENTATION OF NUMBER SEQUENCES, WITH APPLICATION TO THE FAMILY OF GENERALIZED FIBONACCI NUMBERS

By

HILYATUSH SHOLIHAH

It is well known that Fibonacci numbers, Lucas numbers, Pell numbers, and Pell-Lucas numbers are the most prominent examples of recursive sequences. The author investigate the general properties of number sequences which allow explicit representation in terms of products. And find that such sequences form whole families of number sequences sharing similar recursive identities. Applying the proposed identities to power sequences and the sequence of Pochhammer numbers, and recover and generalize known recursive relations. And restricting to the cosine of fractional angles, and study the special case of the family of k-generalized Fibonacci numbers, and present general recursions and identities which link these sequences.

Keywords : Product representation, Fibonacci number, Pell number, Pochhammer number, recursive identity**.**

REPRESENTASI PERKALIAN PADA BARISAN BILANGAN DAN APLIKASI UNTUK BILANGAN FIBONACCI YANG DIPERUMUM

Oleh

HILYATUSH SHOLIHAH

Skripsi

Sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar

SARJANA SAINS

pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

Judul Skripsi	: **REPRESENTASI PERKALIAN PADA BARISAN BILANGAN DAN APLIKASI UNTUK BILANGAN FIBONACCI YANG DIPERUMUM**
Nama Mahasiswa	: ***Hilyatush Sholihah***
Nomor Pokok Mahasiswa	: 1217031035
Program Studi	: Matematika
Fakultas	: Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Amanto, S.Si., M.Si.	**Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.**
NIP 19730314 200012 1 002	NIP 19700831 199903 1 002

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, MA, Ph.D.
NIP 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Amanto, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Drs. Suratman, M.Sc.
NIP 19640604 199003 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **05 Agustus 2019**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: **Hilyatush Sholihah**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1217031035**
Jurusan	: **Matematika**
Judul Skripsi	: **REPRESENTASI PERKALIAN PADA BARISAN BILANGAN DAN APLIKASI UNTUK BILANGAN FIBONACCI YANG DIPERUMUM**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan semua tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah penulisan Karya Ilmiah Universitas Lampung.

Bandar Lampung, 05 Agustus 2019

Yang Menyatakan

METERAI TEMPEL
461E8AFF995691815
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Hilyatush Sholihah
NPM 1217 031 035

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Kota Metro, pada tanggal 5 April 1994, anak ketiga dari enam bersaudara dari seorang Abi bernama Agus Wibowo dan Umi bernama Umi Sa'diyah. Adik dari Mas Ahan, Mba Ifah dan Kakak dari Hafidz, Amal dan Sholih.

Penulis menempuh pendidikan awal, Taman Kanak-kanak (TK) di TK Wahdatul Ummah diselesaikan pada tahun 1999. Kemudian dilanjutkan Sekolah Dasar (SD) Muhammadiyah 1 Metro sampai di tahun 2005. Meluluskan Sekolah Menengah Pertama (SMP) Negeri 4 Metro ditahun 2008. Dan pada tahun 2011 menyelesaikan studinya di Madrasah Aliyah Negeri (MAN) 1 Metro.

Sempat berhenti 1 tahun, akhirnya pada tahun 2012 penulis terdaftar sebagai mahasiswa Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam melalui jalur PMPAP (Penerimaan Mahasiswa Perluasan Akses Pendidikan). Selama menjadi mahasiswa, penulis aktif dibeberapa organisasi yaitu pada periode 2012/2013 terdaftar sebagai anggota di Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA), ROIS (Rohani Islam) selama 2 Periode yaitu menjabat sebagai Sekretaris Bidang Kajian dan Humas, dan juga aktif sebagai anggota di KAMMI (Kesatuan Aksi Mahasiswa Muslim Indonesia) Universitas Lampung.

Sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu kepada masyarakat, penulis melaksanakan

Kuliah Kerja Nyata (KKN) pada tahun 2015 di Desa Suka Jaya, Kecamatan Gunung Agung Kabupaten Tulang Bawang Barat selama enam puluh hari. Dan sebagai bentuk aplikasi pada bidang ilmu di dunia kerja, penulis telah melaksanakan Kerja Praktik (KP) selama empat puluh hari di Kantor Badan Perencanaan Pembangunan Daerah disingkat Bappeda Kota Metro pada tahun 2016.

KATA INSPIRASI

Layani ilmu dengan khidmah penadah faidah sejati.
Langgengkan pembelajarannya dengan perilaku terpuji.
Salami kehati-hatian suci duhai penuntut ilmu;
Jauhi nyenyak dan tinggalkan kenyangmu.
Sambung –sinambungkan belajarmu dan jangan beranjak.
Dengan dikaji, ilmu tegak, kian menanjak.
-Ta'limul Muta'allim-

Kita adalah tawanan dunia yang sudah divonis mati.
Hanya tak tahu kapan waktunya dieksekusi.
Maka nikmati saja waktu yang tersisa.
Anggap ia perjalanan kita.
-Salim A Fillah-

Bumi senantiasa berbisik.
Pada segala tonggak yakinmu.
Alam deras mengalir.
Dalam deru derasnya semangatmu.
Inilah saat jiwamu harus kembali.
Mengabdi pada penciptamu.
Pada segala nikmat.
Dicipta oleh Robb Semestamu.
-Sholihah Hilya-

"Apakah manusia akan mendapat segala yang dicita-citakannya? (Tidak) Maka milik Allah-lah kehidupan Akhirat dan kehidupan Dunia."
Qs. An-Najm (53) : 25-26

'Allah dulu, Baru Cita-Citamu kemudian.'

PERSEMBAHAN

Alhamdulillah, puji syukur atas rahmat dan keberkahan Allah Subhanahuwata'ala yang telah memperkenankan saya untuk mempersembahkan sebuah karya kecil dan sederhana ini sebagai bukti kesungguhan teruntuk:

Abiya dan Umiya tercinta yang tak henti menghadiahkan do'a, selalu memberi semangat, dan telah menjadi motivasi terbesar untuk mempertanggung jawabkan apa yang telah dimulai selama ini.

Kakak, adik dan keluarga tersayang yang telah menghaturkan do'a dan memberikan penyemangat untuk penulis.

Para pendidik, dosen pembimbing dan penguji yang memberikan bimbingan, motivasi dan dukungan kepada penulis.

Sahabat-sahabat tersayang. Terimakasih atas kebersamaan keceriaan canda dan tawa serta doa dan semangat yang diselipkan selama ini.

Almamater Universitas Lampung.

SANWACANA

Assalamu'alaikum Warohmatullahi Wabarokatuh.

Puji syukur penulis haturkan kepada Allah Subhanahuwata'ala atas limpahkan rahmat, ridho dan hidayah-Nya, semoga Allah senantiasa memberikan kasih sayangnya kepada kita semua. Dan Sholawat serta salam semoga selalu tercurah kepada *Qudwah Hasanah* tercinta Rasulullah Shallallaahu 'alaihi wasallam, semoga kita mendapatkan syafaat di Yaumil Akhir kelak, dan dijumpakan di taman syurga bersama para sahabatNya. Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung penulis telah menyelesaikan skripsi dengan judul "**Representasi Perkalian pada Barisan Bilangan dan Aplikasi untuk Bilangan Fibonacci yang Diperumum.**"

Dalam proses penyusunan skripsi ini sesungguhnya tak terlepas dari peran dari berbagai pihak, oleh karena itu, dengan ketulusan hati, penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada :

1. Bapak Amanto, S.Si., M.Si., selaku dosen pembimbing utama. Terima kasih telah membimbing penulis, menyumbangkan ilmu, memberikan motivasi dan pengarahan, serta kesedian waktu yang diberikan.
2. Bapak Agus Sutrisno, S.Si., M.Sc., selaku dosen pembimbing kedua. Terima

kasih telah membimbing penulis, menyumbangkan ilmu, memberikan motivasi dan pengarahan, serta kesedian waktu yang diberikan.

3. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si., selaku dosen penguji. Terima kasih atas kesediaan waktu, memberikan semangat dan motivasi, serta kritik dan saran yang membangun dalam proses penyusunan skripsi ini.
4. Ibu Widiarti, S.Si., M.Si., selaku dosen pembimbing akademik yang telah memberikan pengarahan dan motivasi selama menjalani masa perkuliahan.
5. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Bapak Drs. Suratman, M.Sc., selaku Dekan FMIPA Universitas Lampung.
7. Seluruh dosen, staff, dan karyawan Jurusan Matematika FMIPA Unila.
8. Abiya dan Umiya tersayang yang selalu memberikan doa, semangat, motivasi, nasihat, dukungan dan pengorbanan yang tak tergantikan kepada penulis. Semoga Allah gantikan dengan SyurgaNya.
9. Kakak-kakak, adik-adik, mas Ahan, mba Ifah, mas Hafidz, mas Amal, dan Solih yang selalu menjadi penyemangat dan terus memberikan dukungan kepada penulis. Semoga Allah kumpulkan di JannahNya.
10. Sahabat-sahabat terbaik, temen dua tahun diasrama Ncas, Maida, Titin, Nina, MasyaAllah Tabarokallah, temen ‘main’ Ratih, Lina, Isti, Zee, Afi, terimakasih karena sudah menjadi teman terbaik, selalu membantu, memberi semangat dan mengisi keseharian selama masa perkuliahan.
11. Keluarga yang dipertemukan dalam organisasi HIMATIKA, ROIS FMIPA, KAMMI, dan GK terimakasih atas warna dan pengalaman yang telah diberikan selama ini.

12. Teman-teman jurusan matematika angkatan 2012 serta seluruh pihak yang telah membantu penulis yang tidak dapat disebutkan satu persatu, atas peran dan dukungannya dalam menyusun skripsi ini.

Semoga Allah Subhanahuwata'ala senantiasa memberikan balasan atas kebaikan yang telah diberikan kepada penulis dan penulis berharap semoga karya kecil ini dapat bermanfaat bagi kita semua, *Aamiin ya Robbal 'alamin.*

Wassalamu'alaikum Warohmatullahi Wabarokatuh.

Bandar Lampung, 5 Agustus 2019
Penulis,

Hilyatush Sholihah

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

Halaman

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Pada dasarnya ilmu-ilmu yang dipelajari pada jenjang sekolah sampai dengan jenjang perkuliahan itu diawali dari ilmu matematika. Ilmu matematika adalah ilmu yang spesial karena ilmu matematika tidak pernah lepas dari kehidupan sehari-hari, seperti di pasar, sekolah, kantor maupun di rumah. Karena itu, matematika menjadi ilmu yang menarik untuk dipelajari dan diteliti disebabkan luasnya bahasan yang melingkupinya dan segala keunikan di dalamnya. Seperti contohnya yaitu bilangan.

Tak dapat dipungkiri bahwa dalam praktek kehidupan sesungguhnya, manusia tidak akan bisa terlepas dari bilangan. Bilangan menjadi aspek yang selalu muncul dalam ilmu kehidupan, sains, teknologi, ekonomi serta yang lainnya. Walaupun awal munculnya bilangan dipergunakan untuk mengingat jumlah, namun pada perkembangannya para pakar matematika menambahkan pembendaharaan simbol dan kata yang tepat untuk mendefinisikan bilangan.

Banyak jenis-jenis bilangan yang sering dijumpai dalam matematika. Misalkan bilangan real, bilangan rasional, bilangan cacah, bilangan asli, bilangan kompleks dan lain sebagainya. Bilangan-bilangan tersebut dapat membentuk pola barisan bilangan, baik itu bilangan geometri maupun bilangan aritmetika.

Salah satu bahasan yang akan penulis teliti yaitu bilangan Fibonacci. Barisan bilangan Fibonacci ditemukan oleh seorang ahli matematika berkebangsaan Italia yaitu Leonardo Pisano dikenal juga dengan nama Fibonacci. Ia adalah seorang matematikawan terbesar pada abad pertengahan yang lahir di Pisa, Italia sekitar tahun 1170. Meskipun lahir di Pisa, tetapi ia banyak menyerap ilmu pengetahuan dari orang-orang timur, karena ia ikut ayahnya yang bekerja di Aljazair.

Barisan yang ditemukan Fibonacci disebut dengan barisan bilangan Fibonacci. Barisan Fibonacci adalah barisan bilangan yang bentuknya unik dan mudah dikenali. Suku pertama barisan ini adalah 1, begitu pula dengan suku ke-2. Suku berikutnya merupakan penjumlahan 2 suku sebelumnya. Barisan bilangannya yakni seperti berikut : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, … dst.

Barisan ini diperoleh Fibonacci dari pengamatannya terhadap perkembangbiakan dipeternakan kelinci. Dan yang membuat bilangan Fibonacci ini menjadi menarik yaitu, jika dilakukan pembagian salah satu bilangan dengan satu bilangan setelahnya maka hasil yang didapatkan adalah sama yaitu nilai decimal 0,61 (dengan pembulatan), inilah yang disebut dengan rasio emas. Yang mencengangkan, aplikasi bilangan Fibonacci ini muncul secara nyata di alam, contohnya adalah jumlah kelopak bunga Aster, inti bunga matahari, kepakan sayap kupu-kupu dan beberapa contoh lainnya.

Pada penelitian kali ini penulis merepresentasikan perkalian barisan bilangan dengan aplikasi untuk bilangan Fibonacci diperumum dan manyajikan beberapa generalisasinya.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dilakukannya penelitian ini yaitu :

1. Mengkaji dan menyelidiki sifat umum dari barisan bilangan $x_{n,m}$ dalam himpunan bilangan tertentu pada relasi rekursif linear antara barisan individu.
2. Mengkaji himpunan bilangan Fibonacci yang diperumum.
3. Mengkaji kasus khusus dari himpunan bilangan Fibonacci yang diperumum.
4. Menyajikan rekursi umum dan identitas yang menghubungkan antar barisan.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah :

1. Memahami sifat-sifat umum dari barisan bilangan $x_{n,m}$ dalam himpunan bilangan tertentu.
2. Menambah wawasan tentang himpunan bilangan Fibonacci yang diperumum.
3. Mengembangkan pengetahuan tentang bilangan Fibonacci yang diperumum.
4. Memahami tentang rekursi umum dan identitas yang menghubungkan antar bilangan.
5. Memberikan sumbangan pemikiran dalam rangka memperluas dan memperdalam ilmu matematika khususnya tentang bilangan Fibonacci.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Himpunan

Definisi 2.1.1 (Himpunan)

Himpunan adalah kumpulan objek-objek yang terdefinisi dengan jelas. Objek-objek yang termasuk dalam suatu himpunan disebut unsur atau anggota himpunan. (Abdussakir, 2006)

Definisi 2.1.2 (Bilangan Asli)

Himpunan bilangan asli atau bilangan bulat positif dinotasikan dengan N. Berikut adalah himpunan bilangan asli $\{1, 2, 3, \ldots\}$ (Abdussakir, 2006).

Definisi 2.1.3 (Bilangan Bulat)

Himpunan bilangan bulat termasuk bilangan real, dinotasikan dengan *Z*. berikut adalah himpunan bilangan bulat {…, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …} (Lipschutz, 1981).

Definisi 2.1.4 (Bilangan Bulat)

Jika *n* bilangan bulat, maka *n* didefinisikan tunggal sehingga $n + (-n) = (-n) + n = 0$. Himpunan bilangan bulat adalah gabungan himpunan bilangan cacah dan himpunan bilangan asli sehingga untuk setiap bilangan bulat *n* berlaku $n + (-n) = (-n) + n = 0$. Jadi himpunan bilangan bulat dapat ditulis dalam bentuk daftar sebagai Z. (Sukirman, 2005)

Definisi 2.1.5 (Sifat Bilangan Bulat)

Sifat yang berlaku dalam himpunan bilangan bulat yaitu :

1. Sifat tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian $\forall\, a, b \in Z$, maka:

   Ada dengan tunggal $a + b \in Z$

   Ada dengan tunggal $a \times b \in Z$

2. Sifat komutatif terhadap operasi penjumlahan dan perkalian $\forall\ a, b\ \in Z$, maka :

$$a + b\ = b\ + a$$

$$a \times b\ = b\ \times a$$

3. Sifat assosiatif penjumlahan dan perkalian $\forall\ a, b, c\ \in Z$, maka :

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a \times (b\ \times c) = (a \times b) \times c$$

4. Sifat distributif kiri kanan perkalian pada penjumlahan $\forall\ a, b, c\ \in Z$ maka:

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c$$

5. Ketunggalan invers penjumlahan $\forall\ a \in Z$, ada elemen $-\ a \in Z$ dinamakan invers penjumlahan dari a.
6. Ada elemen identitas penjumlahan $\forall\ a \in Z$, ada elemen 0 dalam Z sehingga $a + 0 = 0 + a = a$, 0 dinamakan elemen identitas penjumlahan.
7. Ada elemen identitas perkalian $\forall\ a \in Z$, ada dengan elemen 1 dalam Z sehingga $a \times 1\ = 1\ \times a = a$, 1 dinamakan elemen identitas perkalian.
8. Perkalian dengan nol, $\forall\ a \in Z$, maka :

$$0 \times a\ = a\ \times 0 = 0$$

(Sukirman, 2005).

Definisi 2.1.6 (Bilangan Rasional)

Himpunan bilangan rasional termasuk bilangan real yang dapat dituliskan sebagai rasio dari dua bilangan bulat. Bilangan rasional dinotasikan dengan Q, dan dirumuskan sebagai berikut :

$$Q = \{x | x = \frac{p}{q}, \quad \text{di mana } p, q \in Z, q \neq 0\}$$

(Lipszchutz, 1981).

Contoh :

$$5 = \frac{5}{1}.$$

dengan demikian Z himpunan bagian dari Q.

Definisi 2.1.7 (Bilangan Irasional)

Himpunan bilangan real yang tidak dapat dinyatakan sebagai $\frac{a}{b}$ dengan a, b $\in$ Z dan b $\neq$ 0 disebut himpunan bilangan irasional. Bilangan $\sqrt{2}, \sqrt{3}$, dan $\sqrt{8}$ adalah contoh bilangan irrasional. (Abdussakir, 2006)

Definisi 2.1.8 (Bilangan Kompleks)

Bilangan kompleks didefinisikan sebagai pasangan berurut (x, y) dari bilangan real yang dapat diinterpretasikan sebagai suatu titik di bidang kompleks. Karena bilangan real *x* dinyatakan sebagaik titik $(x, 0)$ pada sumbu real, maka himpunan bilangan real merupakan subhimpunan dari himpunan bilangan kompleks. Bilangan kompleks dalam bentuk $(0, y)$ merujuk pada titik di sumbu y dan disebut bilangan imajiner asli. Sumbu *y* yang dimaksud adalah sumbu imajiner dalam bidang kompleks. Bilangan kompleks (x, y) didefinisikan sebagai berikut :

$$z = (x, y) = x + iy,$$

(Brown & Churchill, 2004)

Definisi 2.1.9 (Bilangan Imajiner)

Bilangan real *x* dan *y* disebut bagian real dan imajiner dari *z*, maka dapat ditulis

$$Re\ (z) = x \text{ dan } Im(z) = y$$

(Brown & Churchill, 2004)

Definisi 2.1.10 (Sifat Bilangan Kompleks)

Sifat dari bilangan kompleks yaitu :

1. Jika $z_1 = (x_1, y_1)$ dan $z_2 = (x_2, y_2)$ maka hasil penjumlahan dan perkalian dari z_1 dan z_2 didefinisikan sebagai berikut :

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_1),$$

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, y_1, x_2 + y_2 x_1),$$

2. Jika $z_1 = r_1, e^{i\theta_1}$ dan $z_2 = r_2, e^{i\theta_2}$ maka hasil perkalian z_1 dan z_2 didefinisikan sebagai berikut

$$z_1 z_2 = r_1, e^{i\theta_1} r_2, e^{i\theta_2} = r_1 r_2, e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = r_1 r_2, e^{i(\theta_1 + \theta_1)}$$

(Brown & Churchill, 2004)

Lemma 2.1.11

Untuk sebuah bilangan kompleks $z = x + iy$ maka

$$\sqrt{\mathrm{x + iy}} = \left(\frac{\sqrt{r + x}}{\sqrt{2}} + i\, sgn\,(y) \frac{\sqrt{r - x}}{\sqrt{2}}\right), \qquad (2.1.1)$$

dengan $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ dan

$$sgn(y) = \begin{cases} -1, y < 0 \\ 0, y = 0 \\ 1, y > 0 \end{cases},$$

(Abramowitz & Stegun, 1972)

Bukti :

Karena $r \geq |x|$ maka persamaan berikut berlaku

$$\left(\frac{\sqrt{r+x}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{r+x}{2} \qquad (2.1.2)$$

$$\left(\frac{\sqrt{r-x}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{r-x}{2} \qquad (2.1.3)$$

berdasarkan persamaan (2.1.2) dan persamaan (2.1.3) diperoleh

$$\frac{\sqrt{r+x}}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{r-x}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{r^2-x^2}}{2} = \frac{|y|}{2}$$

sehingga

$$\left(\frac{\sqrt{r+x}}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{r-x}}{\sqrt{2}}\right)^2 = x + i|y|$$

untuk $y > 0$

$$\left(\frac{\sqrt{r+x}}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{r-x}}{\sqrt{2}}\right)^2 = x + iy$$

untuk $y > 0$

$$\left(\frac{\sqrt{r+x}}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{r-x}}{\sqrt{2}}\right)^2 = x - iy$$

maka terbukti

$$\sqrt{x+iy} = \left(\frac{\sqrt{r+x}}{\sqrt{2}} + i\, sgn\,(y)\frac{\sqrt{r-x}}{\sqrt{2}}\right) \qquad \blacksquare$$

dengan

$$sgn(y) = \begin{cases} -1, y < 0 \\ 0, y = 0 \\ 1, y > 0 \end{cases}$$

Lemma 2.1.12

Untuk suatu bilangan kompleks $z = x + iy$ maka

$$\frac{1}{\sqrt{x+iy}} = \left(\frac{\sqrt{r+x} - i\, sgn\,(y)\sqrt{r-x}}{\sqrt{2}}\right)$$

dengan $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ dan

$$sgn(y) = \begin{cases} -1, y < 0 \\ 0, y = 0 \\ 1, y > 0 \end{cases},$$

(Abramowitz & Stegun, 1972)

Bukti :

Berdasarkan Lemma 2.1.11 diperoleh

$$\sqrt{x+iy} = \left(\sqrt{\frac{r+x}{2}} + i\ sgn\ (y)\sqrt{\frac{r-x}{2}}\right)$$

maka

$$\frac{1}{\sqrt{x+iy}} = \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{r+x}{2}} + i\ sgn\ (y)\sqrt{\frac{r-x}{2}}\right)} \frac{\left(\sqrt{\frac{r+x}{2}} - i\ sgn\ (y)\sqrt{\frac{r-x}{2}}\right)}{\left(\sqrt{\frac{r+x}{2}} - i\ sgn\ (y)\sqrt{\frac{r-x}{2}}\right)}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{\frac{r+x}{2}} - i\ sgn\ (y)\sqrt{\frac{r-x}{2}}\right)}{\frac{r+x}{2} + \frac{r-x}{2}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{\frac{r+x}{2}} - i\ sgn\ (y)\sqrt{\frac{r-x}{2}}\right)}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{r+x} - i\ sgn\ (y)\sqrt{r-x}\right)}{\sqrt{2}r}$$

terbukti bahwa

$$\frac{1}{\sqrt{x+iy}} = \frac{\left(\sqrt{r+x} - i\ sgn\ (y)\sqrt{r-x}\right)}{\sqrt{2}r} \qquad \blacksquare$$

dengan

$$sgn(y) = \begin{cases} -1, y < 0 \\ 0, y = 0 \\ 1, y > 0 \end{cases},$$

Lemma 2.1.13.

Untuk suatu bilangan kompleks $z = x + iy$ berlaku identitas $\ln z = \ln r + i\theta$ (Abramowitz & Stegun, 1972).

Bukti :

Untuk suatu bilangan kompleks $z = r, e^{i\theta}$ dilakukan operasi logaritma natural pada kadua ruas persamaan, sehingga diperoleh

$$\ln z = \ln\left(re^{i\theta}\right) = \ln r + \ln e^{i\theta} \qquad \blacksquare$$

2.2 Barisan

Definisi 2.2.1 (Barisan Bilangan Asli)

Barisan bilangan asli adalah suatu fungsi dengan daerah asalnya himpunan bilangan asli dan daerah hasilnya adalah himpunan bagian dari bilangan real. Jika $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ merupakan barisan, maka biasanya ditulis dengan x pada n yang dinotasikan dengan $\{x_n\}$ (Bartle & Shebert, 1999).

Contoh :

Barisan $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ merupakan barisan bilangan real dengan unsur ke-n adalah $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ dengan nilai $n = 1,2,3, \ldots$ maka $\{x_n\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$. Jika dinotasikan dalam suatu fungsi $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sehingga $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Definisi 2.2.2 (Barisan Konvergen)

Barisan $\{x_n\}_{n-1}^{\infty}$dikatakan konvergen ke bilangan real x, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sehingga berlaku $|x_n - x\ | < \varepsilon$ untuk $n \geq\ k(\varepsilon)$. Dengan kata lain barisan menjadi konvergen ke bilangan real x apabila $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. (Bartle & Shebert, 1999).

Contoh :

Diberikan barisan $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ mempunyai limit $L = 0$ atau ditulis

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Definisi 2.2.3 (Barisan Divergen)

Suatu barisan yang tidak kovergen ke suatu bilangan x yang terhingga disebut barisan divergen. (Leithold, 1991)

Contoh :

Diberikan barisan $\{x_n\} = \{k\}$ mempunyai limit

$$\lim_{n\to\infty} k = \infty$$

maka barisan $\{x_n\} = \{k\}$ adalah barisan divergen.

Teorema 2.2.4

Jika barisan $\{x_n\}_{n-1}^{\infty}$ konvergen ke bilangan real *x* maka barisan $\{x_n\}_{n-1}^{\infty}$terbatas. (Bartle & Shebert, 1999)

Definisi 2.2.5 (Barisan Turun)

Misalkan $\{x_n\}_{n-1}^{\infty}$ barisan pada bilangan real. Dikatakan barisan turun jika $x_n \geq x_{n+1}$, untuk $n = 1,2,3,...$. (Bartle & Shebert, 1999)

Definisi 2.2.6 (Barisan Naik)

Misalkan $\{x_n\}_{n-1}^{\infty}$ barisan pada bilangan real. Dikatakan barisan naik jika $x_n \leq x_{n+1}$ untuk $n = 1,2,3,....$ (Bartle & Shebert, 1999)

Teorema 2.2.7

Misalkan $\{x_n\}_{n-1}^{\infty}$ barisan monoton pada bilangan real adalah konvergen jika dan hanya jika barisan itu terbatas, selanjutnya dapat ditulis bahwa :

1) Jika $x = x_n$ barisan naik terbatas, maka lim $\{x_n\} = \sup\{x_n : \in N\}$

2) Jika $Y = Y_n$ barisan turun terbatas, maka lim $\{Y_n\} = \inf\{Y_n : \in N\}$

(Bartle & Shebert, 1999)

2.3 Himpunan Barisan Bilangan

Definisi 2.3.1 (Himpunan Barisan Bilangan)

Misalkan $\{x_{n,l}\}$ dengan $x_{n,l} \in \mathbb{C}$ dan $n, l \in N$ menjadi himpunan dua parameter bilangan yang berubah-ubah. Himpunan barisan bilangan yang sesuai $\{x_{n,m}\}$ didefinisikan oleh himpunan semua $x_{n,m}$ dengan

$$x_{n,m} = \prod_{l=1}^{n} (m + x_{n,l}),$$

di mana $m \in \mathbb{C}$ memberi label barisan bilangan individual dalam himpunan, dan *n* anggota dari setiap barisan (Abramowitz & Stegun, 1972).

2.4 Representasi Perkalian dari suatu Barisan Bilangan.

Definisi 2.4.1 (Himpunan Bilangan)

Untuk himpunan bilangan yang diberikan $\{x_{n,m}\}$, didefinisikan

$$x_n \coloneqq \sum_{l=1}^{n} x_{n,l},$$

(Abramowitz & Stegun, 1972)

Lemma 2.4.2

Untuk setiap himpunan bilangan $\{x_{n,l}\}$ dengan $x_{n,l} \in \mathbb{C}, n, l \in \mathbb{N}$, jumlah $x_{n,l}$ diberikan oleh

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{l=1}^{n} (-1)^l \binom{n}{l} l \, x_{n,l} - \frac{1}{2} \, n(n+1),$$

di mana $x_{n,m}, m \in \mathbb{Z}$ menunjukkan barisan bilangan dengan $\{x_{n,l}\}$. (Abramowitz & Stegun, 1972)

2.5 Teorema Binomial

Teorema Binomial adalah rumus penting yang memberikan ekspansi pangkat dari penjumlahan. Pertama-tama akan didefinisikan koefisien binomial. Koefisien binomial dapat didefinisikan dalam bentuk fungsi faktorial sebagai berikut :

Definisi 2.5.1 (Koefisien Binomial)

Untuk $k \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{R}$, maka kombinasi *k* dan *p* untuk koefisien binomial didefinisikan sebagai berikut.

$$\binom{p}{k} = C_k^p = \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-k+1)}{k!}$$

(Abrahamowitz & Stegun, 1972)

Definisi 2.5.2 (Bilangan Binomial)

Bentuk umum bilangan binomial dapat dinyatakan sebagai :

$$(a+x)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^k a^{p-k}$$

(Abrahamowitz & Stegun, 1972)

2.6 Bilangan Lucas

Definisi 2.6.1 (Bilangan Lucas)

Mirip dengan bilangan-bilangan Fibonacci, ada kelompok bilangan menarik lain yang dikenal sebagai bilangan Lucas. Seperti bilangan Fibonacci, setiap istilah dari bilangan Lucas ditemukan dengan menghitung jumlah dari dua istilah sebelumnya. Namun, bilangan Lucas dimulai dengan istilah $L_0 = 2$ dan $L_1 = 1$ bukan $F_0 = 1$ dan $F_1 = 1$. Daftar 30 bilangan Lucas pertama yaitu 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, 2207, 3571, 5778, 9349, 15127, 24476, 39603, 64079, 103682, 167761, 271443, 439204, 710647, 1149851, … (Verner, 1969)

2.7 Persamaan Diophantine

Dalam matematika, persamaan Diophantine adalah sebuah persamaan polinomial yang memberikan variabel-variabel tertentu dengan penyelesaian berupa bilangan bulat. Permasalahan dari persamaan Diophantine adalah persamaan yang memiliki sedikit variabel yang tidak diketahui dan meliputi cara menentukan bilangan bulat dengan benar dari seluruh persamaan.

Definisi 2.7.1 (Persamaan Diophantine)

Misalkan $a_1, a_2, \dots, a_n$ adalah bilangan bulat, dan semuanya bukan nol $x_1, x_2, \dots, x_n$ menyatakan variabel dan c adalah konstanta maka bentuk umum persaman Diophantine dapat dituliskan dengan

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = c$$

Persamaan Diophantine dibagi menjadi dua, yaitu persamaan Diophantine linear dan non linear. (Niven, dkk, 1991)

Definisi 2.7.2 (Persamaan Diophantine Linear)

Persamaan Diophantine linear dengan dua variabel terbentuk $ax + by = c$ di mana a, b, c adalah bilangan bulat dengan selesaian dari persamaan ini yaitu *x* dan *y* juga bilangan bulat. Jika $a = b = c = 0$ maka sepasang bilangan bulat (x, y) merupakan solusi dari $ax + by = c$. Jika $a = b = 0$ dan $c \neq 0$ maka $ax + by = c$ tidak ada penyelesaiannya (Niven, dkk, 1991).

Definisi 2.7.3 (Persamaan Diophantine Linear)

Persamaan Diophantine linear yang memiliki variabel dua disebut persamaan Diophantine linear dua peubah, jika variabelnya tiga disebut persamaan Diophantine tiga peubah dan seterusnya (Niven, dkk, 1991).

Definisi 2.7.4 (Persamaan Diophantine Kuadrat)

Persamaan Diophantine non linear merupakan persamaan Diophantine yang variabelnya berpangkat lebih dari satu. Misal $a_1, a_2, \ldots, a_k$, *n* bilangan bulat, kemudian ditentukan bentuk polinomial $f(x_1, \ldots, x_k)$ dengan variabel $x_1, \ldots, x_k$ yang diberikan oleh $f(x_1, \ldots, x_k) = a_1x_1^2 + \cdots + a_kx_k^2$, maka $f(x_1, \ldots, x_k) = n$ disebut persamaan Diophantine kuadrat (Dickson, 1971).

Definisi 2.7.5 (Persamaan Diophantine Non Linear)

Beberapa dari persamaan Diophantine non linear dapat berupa persamaan Phythagoras $x^2 + y^2 = z^2$ dengan nilai *x*, *y* dan *z* bilangan bulat positif. Phythagoras menggambarkan solusi untuk ruas paling kecil dari persamaan Phythagoras diberikan $x = 2a + 1$, untuk ruas yang lebih besar diberikan $y = 2a^2 + 2a$, dan ruas miringnya diberikan $z = y + 1$ (Dickson, 1971).

2.8 Persamaan Pell

Selain persamaan Phythagoras juga terdapat bentuk lain dari persamaan Diophantine non linear yaitu $x^2 - Dy^2 = N$. Fermat adalah seorang pemula yang mengawali pembahasan persamaan Diophantine modern. Fermat menghabiskan banyak waktunya untuk merealisasikan apa yang telah dilibatkannya dalam menyelesaikan suatu persamaan. Fermat pernah ditantang ahli matematika Inggris Wallis untuk menyelesaikan persamaan Fermat-Pell $x^2 - dy^2 = 1$ dan Wallis memberikan penyelesaian $x = 1$ dan $y = 0$. Penyelesaian percobaan itu sekarang biasa disebut dengan persamaan Pell.

Definisi 2.8.1 (Persamaan Pell)

Persamaan Pell $x^2 - dy^2 = N$ dengan diberikan koefisien berupa bilangan bulat *d* dan konstanta *N* serta variabel *x* dan *y* adalah variabel yang tidak diketahui menyebut persamaan ini sebagai persamaan Pell. Jika nilai *d* negative, maka persamaaan tersebut mempunyai solusi terbatas. Jika nilai *d* berupa kuadrat sempurna, katakan $d = a^2$, maka persamaan dapat dibentuk menjadi

$$(x - ay)(x + ay) = N$$

dan persamaan tersebut juga mempunyai solusi yang terbatas. (Zuckerman, 1991)

2.9 Fungsi Pembangkit

Definisi 2.9.1 (Fungsi Pembangkit)

Fungsi pembangkit adalah salah satu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan berbagai permasalahan dalam dunia matematika antara lain, permasahan rekurensi, *counting*, membuktikan identitas kombinatorika, maupun aplikasi-aplikasi lain yang beragam. Dengan mengaitkan persoalan ke dalam dunia fungsi pembangkit, maka sifat-sifat khusus dari fungsi pembangkit dapat digunakan sebagai jalan untuk memcahkan masalah. Fungsi pembangkit ini dapat diperlakukan sebagaimana fungsi-fungsi pada umumnya. Misalnya suatu fungsi pembangkit dapat didiferensialkan. (Rosen, 1995).

Definisi 2.9.2 (Bentuk Fungsi Pembangkit)

Diberikan barisan S (tak hingga atau terhingga) $a_0(\xi), a_1(\xi), a_2(\zeta), \ldots$ dapat didefinisikan bentuk.

$$G(x) = a_0(\xi) + a_1(\xi)x + a_2(\xi)x^2 + a_3(\xi)x^3 + \cdots$$

Atau $G(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(\xi)x^i$sebagai fungsi pembangkit dari barisan S. (Rosen, 1995)

2.10 Polinomial Chebyshev

Polinomial Chebyshev terdiri dari empat jenis yaitu :

Definisi 2.10.1 (Polinomial Chebyshev ke-1)

Polinomial Chebyshev jenis pertama $T_n(x)$ adalah polinomial dalam *x* dengan derajat *n* yang didefinisikan dengan hubungan

$$T_n(x) = \cos n\theta \ ,$$

di mana $x = \cos\theta \ , x \in [-1,1] \, , \theta \in [0, \pi], n \in N$. (Mason & Handscomb, 2003)

Definisi 2.10.2 (Polinomial Chebyshev ke-2)

Polinomial Chebyshev jenis kedua $U_n(x)$ adalah polinomial dalam *x* dengan derajat *n* yang didefinisikan sebagai

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta},$$

di mana $x = \cos\theta \ , x \in [-1,1] \, , \theta \in [0, \pi], n \in N$. (Mason & Handscomb, 2003)

Definisi 2.10.3 (Polinomial Chebyshev ke-3)

Polinomial Chebyshev jenis ketiga $V_n(x)$ adalah polinomial dalam *x* dengan derajat *n* didefinisikan sebagai:

$$V_n(x) = \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{\theta}{2}},$$

di mana $x = \cos\theta$, $x \in [-1,1]$, $\theta \in [0,\pi], n \in N$. (Mason & Handscomb, 2003)

Definisi 2.10.4 (Polinomial Chebyshev ke-4)

Polinomial Chebyshev jenis keempat $W_n(x)$ adalah polinomial dalam *x* dengan derajat *n* didefinisikan sebagai

$$W_n(x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}},$$

di mana $x = \cos\theta$, $x \in [-1,1]$, $\theta \in [0,\pi], n \in N$. (Mason & Handscomb, 2003)

2.11 Barisan Fibonacci

Definisi 2.11.1 (Barisan Fibonacci)

Misalkan $\{x_n\}$ adalah barisan bilangan. Dikatakan $\{x_n\}$ adalah barisan bilangan Fibonacci jika suku berikutnya merupakan hasil penjumlahan dari dua suku sebelumnya. Dengan kata lain bentuk umum dari barisan bilangan Fibonacci yaitu:

$$F_1 = F_2 = 1$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ untuk } n \geq 3$$

(Vorob'ev, N.N.,1961).

Lemma 2.11.2

Jumlah barisan Fibonacci *n* pertama dapat dinyatakan sebagai

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = x_{n+2} - 1$$

(Vorob'ev, N.N.,1961).

Bukti :

Dari Definisi 2.11.1, berlaku bahwa

$$x_1 = x_3 - x_2$$

$$x_2 = x_4 - x_3$$

$$x_3 = x_5 - x_4$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1} = x_{n+1} - x_{n+2}$$

$$x_n = x_{n+2} - x_{n+1}$$

kemudian dimasukkan ke dalam persamaan berikut

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = x_{n+2} - x_2$$

di mana $x_2 = 1$, persamaan ini setara dengan yang berlaku,

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = x_{n+2} - 1 \qquad \blacksquare$$

Lemma 2.11.3

Jumlah dari suku ganjil dari barisan Fibonacci

$$x_1 + x_3 + x_5 \dots x_{2n-1} = x_{2n},$$

(Vorob'ev, N.N.,1961).

Lemma 2.11.4

Jumlah dan syarat genap dari barisan Fibonacci.

$$x_2 + \ x_4 + x_6 \dots x_{2n} = x_{2n+1} - 1,$$

(Vorob'ev, N.N.,1961).

Lemma 2.11.5

Jumlah barisan Fibonacci dengan tanda bergantian

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \cdots + \ -1^{n+1}x_n = -1^{n+1}x_{n-1} + \ 1$$

(Vorob'ev, N.N.,1961).

Definisi 2.11.6 (Barisan Fibonacci Penuh)

Misalkan $\{x_n\}$ adalah barisan $(-1)^{n+1}x_n$ disebut barisan Fibonacci penuh untuk $n > 0$ dan n adalah barisan Fibonacci (Verner, 1969).

Definisi 2.11.7 (Barisan Fibonacci Genap)

Misalkan $\{x_n\}$ adalah barisan Fibonacci dengan $x_{n+1} = -x_{n+1} + x_n$, maka $\{x_n\}$ adalah barisan Fibonacci genap. (Verner, 1969)

2.12 Himpunan Bilangan Pocchammer

Definisi 2.12.1 (Simbol Pocchammer)

Simbol Pochhammer $(z)_n$ didefinisikan oleh

$$(z)_0 = 1, (z)_n = z(z+1)\dots(z+n-1) = \frac{\Gamma(\mathrm{z+n})}{\Gamma(z)}$$

di mana Γ(z) adalah fungsi Gamma

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\, dt(\Re(z) > 0)$$

untuk bilangan tetap *b* dan barisan $\{an\}$, simbol Pochhammer $(b)\ n$ memenuhi transformasi Euler

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n}{n!} a_n z^n = (1-z)^{-b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n}{n!} \Delta^n a_n \left(\frac{z}{1-z}\right)^n$$

(Wilf, 1990)

2.13 Bilangan Oblong

Studi tentang bilangan-bilangan ini berasal dari Aristoteles. Mereka juga disebut bilangan bujursangkar, namun "bujursangkar" juga telah diterapkan pada bilangan komposit. Bilangan pronik dipelajari sebagai bilangan kiasan bersama bilangan segitiga dan bilangan kuadrat dalam Metafisika Aristoteles, dan penemuan mereka telah dikaitkan jauh lebih awal dengan Phythagoras. Sebagai semacam bilangan kiasan, bilangan pronic kadang-kadang disebut lonjong karena dianalogikan dengan bilangan poligon.

Definisi 2.13.1 (Bilangan Oblong atau Pronik)

Bilangan oblong atau biasa disebut dengan bilangan pronik adalah bilangan yang merupakan perkalian dari dua bilangan bulat berturut-turut, yaitu dalam bentuk $n(n+1)$. Bilangan pronik pertama yaitu 0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90, 110, 132, 156, 182, 210, 240, 272, 306, 342, 380, 420, 462, … (J.H. Conway & R.K Guy,1996).

Definisi 2.13.2 (Bilangan Pronik)

Jika n adalah bilangan pronik, maka dapat didefinisikan dalam bentuk :

$$\left|\sqrt{n}\right| \cdot \left|\sqrt{n}\right| = n$$

(J.H. Conway & R.K Guy,1996).

Definisi 2.13.3 (Bilangan Pronik n)

Bilangan pronik n adalah dua kali bilangan triangular n dan n lebih dari bilangan kuadrat n, seperti yang diberikan oleh rumus alternatif $n^2 + n$ untuk bilangan pronik. Bilangan pronik n juga merupakan perbedaan antara kuadrat ganjil $(2n + 1)^2$ dan $(n + 1)$ bilangan heksagonal terpusat (J.H. Conway & R.K Guy,1996).

Definisi 2.13.4 (Kebalikan dari Bilangan Pronik)

Jumlah dari kebalikan dari bilangan pronik (tidak termasuk 0) adalah seri teleskop yang berjumlah 1:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)}$$

(J.H. Conway & R.K Guy,1996).

Definisi 2.13.5 (Jumlah Parisal Bilangan Pronik)

Jumlah parsial dari n istilah pertama dalam seri ini adalah :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

(J.H. Conway & R.K Guy,1996).

Definisi 2.13.6 (Bilangan Pronik n pertama)

Jumlah parsial dari bilangan pronik n pertama adalah dua kali nilai dari bilangan tetrahedral ke-n:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} = 2T_n = \frac{n^3}{3}$$

Bilangan pronik ke-n adalah jumlah dari bilangan bulat n pertama. Oleh karena itu semua bilangan pronik adalah genap, dan 2 adalah satu-satunya bilangan pronik prima. Ini juga satu-satunya bilangan pronik dalam barisan bilangan Fibonacci dan satu-satunya bilangan pronik Lucas (J.H. Conway & R.K Guy,1996).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat

Penelitian ini dilaksanakan pada semester ganjil tahun akademik 2018/2019 bertempat di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan untuk penulisan skripsi ini adalah :

1. Menunjukkan himpunan bilangan Fibonacci yang diperumum.
2. Membuktikan sifat umum dari barisan bilangan dalam himpunan bilangan tertentu pada relasi rekursif linear antar barisan individu.
3. Merepresentasikan perkalian dari suatu barisan bilangan.
4. Membuktikan bahwa himpunan barisan pangkat ialah contoh dari himpunan barisan bilangan.

5. Membuktikan bahwa himpunan barisan pochhammer adalah contoh dari himpunan barisan bilangan.

V KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah penulis lakukan maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut :

1. Representasi barisan

$$F_n = \prod_{l=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \left(3 + 2\cos\left(\frac{2l\pi}{n}\right)\right) = \prod_{l=1}^{n-1} \left(1 - 2i\ \cos\left(\frac{l\pi}{n}\right)\right),$$

$$P_n = 2^{\left[\frac{n}{2}\right]} \prod_{l=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \left(3 + \cos\left(\frac{2l\pi}{n}\right)\right) = \prod_{l=1}^{n-1} \left(2 - 2i\ \cos\left(\frac{l\pi}{n}\right)\right),$$

   adalah contoh khusus dari barisan Fibonacci dan barisan Lucas yang diperumum, yang kemudian didefinisikan oleh relasi rekursif

$$L_0^{(m,p)} = 0, L_1^{(m,p)} = 1, L_n^{(m,p)} = mL_{n-1}^{(m,p)} - pL_{n-2}^{(m,p)}$$

$$F_0^{(m)} = 0, F_1^{(m)} = 1, F_n^{(m)} = mF_{n-1}^{(m)} + F_{n-2}^{(m)}$$

2. Relasi rekursif dan identitas menjadi bersifat umum dan berlaku untuk setiap himpunan barisan bilangan $\{X_{n,m}\}$ dan menunjukkan bahwa semua relasi yang dibangun dari barisan bilangan

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{l=1}^{n} (-1)^l \binom{n}{l} l\, x_{n,l} - \frac{1}{2}\, n(n+1),$$

   diatur oleh relasi yang identik antara anggota mereka.

3. Himpunan barisan pangkat dan himpunan bilangan Pochhammer adalah dua contoh sederhana dari himpunan barisan bilangan yang merupakan serangkaian kecil aplikasi yang potensial.
4. Bilangan Fibonacci yang diperumum memungkinkan untuk mengekspresikan setiap $F_n^{(m)}$ dalam syarat $F_{n'}^{(m)}, n < n$ untuk *m* tetap, sedangkan relasinya memungkinkan untuk mengekspresikan setiap $F_n^{(m)}$ dalam hal $F_{n'}^{(m)}, m' \neq m$ untuk setiap *n* yang diberikan.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2006. *Analisis Real 1*. Universitas Islam Negeri (UIN) Malang. Malang.

Abramowitz, M., & I.A.Stegun. 1972. *Handbook of Mathematical Function with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.* Dover.

Bartle, R.G., & R.D. Shebert. 1999. .*Introduction to Real Analysis.* John Wiley & Sons. New York.

Brown, J.W., & R.C.Churchill. 2004. *Compleks Varibles and Applications.* Mc Graww Hill. Michigan.

Conway,J.H., & Guy,R.K. 1996. *The Book of Numbers*. Copernicus. New York

Dickson, Leonard Eugene. 1971. *History of The Theory of Number Volume II Diophantine analysis.* Chelsea Publising Company. New York.

Gould, H.W. 1972. *Combinatorial Identities.* Morgantown.

Gradshteyn, I.S., & Ryzhik, I.M. 2007. *Table of Integrals, Series, and Products.* Elsevier.

Hendel, R.J., & Cook, C.K. 1996. Recursive Properties of Trigonometric products, in G. E Bergum, A Philippou and A.F Horadam, eds, *Applicatioan of Fibonacci Numbers Vol.* **6**, Springer. hal :201-214.

Hoggat, Jr, Verner. 1969. *Fibonacci and Lucas Numbers.* Houghton Mifflin Company. Boston.

Humble, S. 2004. Grandma's Identity. *Math. Gaz* ***88***. hal: 524-525.

Lind, D. 1965. Problem H-64. *Fibonacci Quart.* **3**. hal:116

Lipschutz, S. Ph. D. 1981. *Theory and Problems of Set Theory and Related TopicsI.* Kin Keong Printing Co. PTE. LTD. Singapura.

Mason, J., & Handzcomb, D. 2003. *Chebyshev Polynomials.* Chapman and Hall.

Niven, Ivan, dkk. 1991. *Introduction to The Theory Number Fifth Edition.* John Wiley Addison. New York.

Rosen, K. H. 1995. *Disrete Mathematics and Its Application 3rd ed.* Mc Graw Hill.

Rudolph-Lilith, M. 2015. *On the Product Representation of Number Sequences, with Applications to the Family of Generalized Fibonacci Number.* Prancis.

Rutherford, D.E. 1952. Some Continuant Determinants Arising in Physics and Chemistry. *Proc. Roy.Soc. Edinburgh Seet.* ***63***. hal: 229-241.

Shapiro, L. 1994. Solution to Problem B-742. *Fibonacci Quart.* **32**, hal:470-471

Sloane, N.J.A. The on-Line Encyclopedia of integer sequences, *http://oeis.org*.

Sukirman. 2005. *Pengantar Aljabar Abstrak.* IKIP Malang. Malang.

Sun, Z.H. 2006. Expansion and Identities concerning Lucas Sequences*, Fibonacci Quart* ***4***. hal :144-152.

Verner,E.H. Jr.1969. *Fibonacci and Lucas Number.* Houghton Mifflin Compant.Boston.

Vorob’ev, N.N.1961. *Fibonacci Number.* Blaisdell Publising Company. New York.

Wilf, H.S. 1990. *Generating Functionology.* Academic Press. New York.

Zeitlin, D. 1967. Solution to Problem H-64*. Fibonacci Quart.* **5**. hal:74-75