PEMODELAN MATEMATIKA DINAMIKA PERTUMBUHAN NYAMUK DAN ANALISIS KESTABILANNYA

(Skripsi)

Oleh

FITROTIN MUBAROROH

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
JURUSAN MATEMATIKA
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

ABSTRAK

PEMODELAN MATEMATIKA DINAMIKA PERTUMBUHAN NYAMUK DAN ANALISIS KESTABILANNYA

Oleh

FITROTIN MUBAROROH

Nyamuk merupakan serangga yang dapat bertindak sebagai vector beberapa penyakit serius. Dinamika pertumbuhan nyamuk dapat digambarkan dengan persamaan diferensial biasa dimana variabel yang digunakan adalah E, L, P, A_h, A_r, dan $A_o$yang beturut-turut menyatakan telur, larva, pupa, nyamuk yang mencari tempat tinggal, nyamuk yang beristirahat, dan nyamuk yang siap bertelur. Pada penelitian ini dikaji mengenai titik kesetimbangan pertumbuhan nyamuk dan analisis kestabilannya melalui angka reproduksi dasar (R_0). Dengan menggunakan data sekunder dilakukan simulasi numerik dengan asumsi tertentu untuk mengetahui perilaku sistem. Hasil penelitian menunjukkan bahwa keadaan bebas nyamuk stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$ dan tidak stabil jika $R_0 > 1$. Pertumbuhan nyamuk akan ada dan stabil asimtotik lokal jika $R_0 > 1$ dan tidak stabil jika $R_0 < 1$. Dari hasil pengujian, diperoleh perubahan nilai parameter mempengaruhi laju pertumbuhan nyamuk. Artinya, dengan mengatur nilai parameter kita dapat mengatur strategi sebagai kontrol pertumbuhan nyamuk.

Kata kunci: nyamuk, persamaan diferensial biasa, titik kesetimbangan, dan angka reproduksi dasar.

ABSTRACK

MODELING OF MATHEMATICAL DYNAMICS OF MOSQUITO GROWTH AND ITS ANALYSIS OF STABILIY

By

FITROTIN MUBAROROH

Mosquitoes are insects that can act as vectors for some serious diseases. The dynamics of mosquito growth can be described by Ordinary Differential Equations where the variables used are E, L, P, A_h, A_r, and A_o. This study examined the equilibrium point of mosquito growth and its stability analysis through basic reproductive numbers (R_0). By using secondary data, numerical simulations will be carried out with certain assumptions to determine the behavior of the system. From the results of the study it is known that the mosquito-free state is stable asymptotically if R_0 <1 and unstable if R_0> 1. Mosquito growth will be asymptotically stable and local if R_0> 1 and unstable if R_0 <1. From the test results, it was found that changes in parameter values affected the mosquito growth rate. That is, by setting the value of the boundary parameter we can set the strategy as a control of mosquito growth.

Keyword: Mosquito, Ordinary Differential Equation, Equilibrium Point, and Basic Reproduction Numbers.

PEMODELAN MATEMATIKA DINAMIKA PERTUMBUHAN NYAMUK DAN ANALISIS KESTABILANNYA

Oleh

Fitrotin Mubaroroh

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

Judul Skripsi : **PEMODELAN MATEMATIKA DINAMIKA PERTUMBUHAN NYAMUK DAN ANALISIS KESTABILANNYA**

Nama Mahasiswa : *Fitrotin Mubaroroh*

Nomor Pokok Mahasiswa : 1417031053

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 19740316 200501 1 001

Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.
NIP. 19700831 199903 1 002

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP. 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.** ....

2. Plt. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Dr. Sutopo Hadi, S.Si., M.Sc.
NIP. 19710415199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **20 Februari 2019**

SURAT PERNYATAAN

Yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama	: **Fitrotin Mubaroroh**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1417031053**
Jurusan	: **Matematika**
Judul Skripsi	: **Pemodelan Matematika Dinamika Pertumbuhan Nyamuk dan Analisis Kestabilannya**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan sepanjang pengetahuan saya tidak berisi materi yang telah dipublikasikan atau ditulis orang lain atau telah dipergunakan dan diterima sebagai persyaratan penyelesaian studi pada Universitas atau Institut lain.

Bandar Lampung, 15 Maret 2019

Yang menyatakan

METERAI TEMPEL
7CEFDAFF842520203
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Fitrotin Mubaroroh

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Fitrotin Mubaroroh, lahir di Gayau Sakti, pada tangga 24 Maret 1996. Penulis merupakan anak pertama dari tiga bersaudara dari pasanagan Sulemi dan Qonik Mahbubah.

Penulis menyelesaikan pendidikan dasar di Madrasah Ibtidaiyyah Jauharotul Mualimin pada tahun2007, pendidikan menengah pertama di MTs Jauharotul Mualimin pada tahun 2010, dan menyelesaikan pendidikan menengah atas di MA Negeri 1 Metro pada tahun 2014. Kemudian pada tahun 2014, penulis diterima melalui jalur SNMPTN dan terdaftar sebagai mahasiswa reguler Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam di Universitas Lampung.

Pada tahun awal 2017 sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu di dunia kerja, penulis telah melaksanakan Kerja Praktik di Dealer Honda CV Istana Motor Bandar Jaya. Sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu kepada masyarakat, penulis telah melaksanakan Kuliah Kerja Nyata pada tahun 2017 di Desa Sumur Kumbang, kab. Kalianda, Prov. Lampung.

MOTTO

RIDHOLLAHUFI RIDHO WALIDAIN
(Ridho Allah berada pada Ridho Orang Tua)

LILLAH BILLAH ILALLAH MINALLAH
(Karena Allah dengan Allah Menuju Allah dari Allah)

PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Alhamdulillahirabbil'alamiin
Dengan kerendahan hati dan rasa syukur kepada Allah SWT
Kupersembahkan karya ini kepada:

Orang tua tercinta Bapak Sulemi dan Ibu Qonik Mahbubah
atas limpahan kasih sayang, do'a dan tetesan keringat dalam merawat
dan menyekolahkanku selama ini demi kesuksesanku. Serta adik-adik tersayang Arif
Fuad Kamali dan Fiki Amalia yang selalu
memberikan semangat dan dukungan.

Para pendidikku, Dosen dan Guruku yang telah memberikan
ilmu kepadaku.

Semua sahabat terbaik yang selalu memberikan inspirasi,
dukungan, pertolongan, semangat dan motivasi.

Almamater dan Negeriku Tercinta.

SANWACANA

Ahamdulillahirabbil'alamiin, Puji Syukur kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **"Pemodelan Matematika Dinamika Pertumbuhan Nyamuk dan Analisis Kestabilannya".**

Penulis menyadari bahwa dalam penyelesaian skripsi ini tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak dan Ibu tercinta, serta adik-adikku tersayang, yang selalu mendoakan, memberi motivasi, semangat, dan dukungan baik secara moril maupun materil.
2. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing I yang telah meluangkan waktu untuk membimbing, memberikan masukan, motivasi, serta kritik dan saran yang membangun kepada penulis dalam penyusunan skripsi sehingga skripsi ini menjadi lebih baik lagi.
3. Bapak Agus Sutrisno, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing II atas bimbingan dan saran yang membangun dalam penyusunan skripsi ini.
4. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D., selaku Dosen Pembahas yang telah memberikan kritik dan saran yang positif dalam penyusunan skripsi ini.
5. Bapak Agus Sutrisno, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah memberikan arahan, bimbingan, motivasi semangat bagi penulis selama masa studi.

6. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Bapak Prof.Dr. Sutopo Hadi, S.Si., M. Sc., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
8. Seluruh Dosen dan staff Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung, khususnya Bu Anita dan Bapak Drajat.
9. Teman-teman baik, Rahmad, Kasandra Ndut, Dek Septi, Rere, Riya dan Unung yang telah memberikan semangat, motivasi, pertolongan dan insprasi dari awal perkuliahan hingga skripsi ini berhasil terbuat.
10. Sang Motivator Ainun Nadiyah dan Rinaldi Okka Saputra Ahza yang telah setia menemani dan mewarnai hari-hari penulis.
11. Teman-teman seperjuangan seluruh Keluarga Matematika 2014, serta kakak dan adik tingkat 2013 dan 2015 terimakasih atas kebersamaannya selama ini.

Semoga dengan kebaikan, bantuan, dan dukungan yang telah diberikan mendapat balasan pahala yang setimpal dari Allah SWT dan mudah-mudahan skripsi ini bermanfaat.

Bandar Lampung, 18 Maret 2019
Penulis

Fitrotin Mubaroroh

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Halaman

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Nyamuk adalah serangga yang tergolong dalam ordo *Diptera*. Beberapa genus yang termasuk adalah nyamuk *Anopheles, Culex*, *Psorophora*, O*chlerotatus*, *Aedes, Sabethes*, *Wyeomyia*, *Culiseta*, dan *Haemagoggus* yang tersebar di 35 negara. Nyamuk memiliki dua sayap bersisik, tubuh yang langsing, dan enam kaki panjang. Pada nyamuk betina, bagian mulutnya membentuk probosis panjang untuk menembus kulit mamalia untuk menghisap darah. Oleh karena makanan nyamuk terdiri dari madu dan sari buah yang tidak mengandung protein, nyamuk betina perlu menghisap darah mamalia untuk memenuhi kebutuhan protein sebagai senyawa untuk pertumbuhan telur.

Nyamuk merupakan serangga yang keberadaannya paling dekat dengan manusia. Hal ini menimbulkan masalah yang cukup serius karena selain mengganggu nyamuk juga dapat bertindak sebagai vektor beberapa penyakit yang serius dengan tingkat kesakitan dan kematian yang tinggi. Genus nyamuk yang telah disebutkan di atas dapat menyebarkan penyakit yang merugikan dan berbahaya bagi manusia. Penyakit yang dapat ditularkan oleh nyamuk antara lain malaria, demam berdarah, penyakit kuning, filariasis dan zika.

Sebagian penyakit yang disebabkan oleh nyamuk belum memiliki pengobatan atau vaksin. Sehingga, salah satu cara untuk mecegah atau mengurangi proses transmisi virus yang disebabkan oleh nyamuk dapat dilakukan melalui pengendalian pertumbuhan populasi nyamuk. Untuk keperluan tersebut, pengetahuan mengenai dinamika nyamuk sangat diperlukan. Hal ini disebabkan karena dengan mengetahui dinamika pertumbuhan nyamuk dapat diprediksi pertumbuhan atau penurunan populasi dari nyamuk dengan mempertimbangkan rantai hidup nyamuk.

Oleh karena itu, penulis tertarik untuk mengkaji dinamika pertumbuhan nyamuk melalui pendekatan pemodelan matematika dan menganalisis perilaku sistemnya. Melalui pengetahuan model matematika dari perilaku dinamika sistem pertumbuhan nyamuk dapat dijadikan acuan dalam menentukan strategi pengendalian pertumbuhan nyamuk.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dalam penelitian ini adalah untuk mendapatkan model pertumbuhan nyamuk, menganalisis kestabilan dan mensimulasikan titik kesetimbangan model matematika pertumbuhan nyamuk.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menambah pengetahuan mengenai model pertumbuhan nyamuk.
2. Diharapkan model yang diperoleh dapat digunakan sebagai kontrol penyakit yang disebabkan oleh nyamuk dalam dunia kesehatan.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pemodelan Matematika

Pemodelan matematika merupakan penyusunan suatu deskripsi dari beberapa perilaku di dunia nyata (fenomena-fenomena alam) ke dalam bagian matematika yang disebut dunia matematika. Pemodelan matematika merupakan proses dalam menurunkan model matematika dari suatu fenomena berdasarkan asumsi-asumsi yang digunakan. Proses ini merupakan langkah awal yang tak terpisahkan dalam menerapkan maematika untuk mempelajari fenomena-fenomena alam, ekonomi, sosial maupun fenomena lainnya. Secara umum dalam menerapkan matematika untuk mempelajari suatu fenomena meliputi 6 langkah, yaitu:

1. Perumusan masalah

Langkah ini untuk menterjemahkan data maupun informasi yang diperoleh tentang suatu fenomena dari masalah nyata menjadi model matematika. Data maupun informasi tentang suatu fenomena dapat diperoleh melalui eksperimen di laboratorium, pengamatan di industri ataupun dalam kehidupan sehari-hari. Dalam model matematika, suatu fenomena dapat dipelajari secara lebih terukur (kuantitatif) dalam bentuk (sistem) persamaan/pertidaksamaan matematika maupun ekspresi matematika. Namun demikian, karena asumsi-asumsi yang digunakan dalam prosesnya, model matematika juga mempunyai kelemahan-kelemahan dibandingkan fenomena sebenarnya, yaitu keterbatasan dalam generalisasi interpretasinya.

2. Membuat Asumsi

Secara umum, tidak semua faktor masalah dapat diidentifikasi dalam masalah matematika. Peyederhanaan dilakukukan untuk mengurangi jumlah faktor yang diperimbangkan. Kemudian, hubungan antar variabel harus ditentukan dengan mengasumsikan hubungan yang relatif sedehana untuk mengurangi kompleksitas masalah.

3. Penyelesaian Model

Pada langkah ini diperoleh model untuk suatu masalah. Jika model terlalu sulit ditafsirkan, maka kembali ke langkah 2, kemudian tambahkan asumsi sederhana untuk mendapat solusi yang optimal.

4. Verifikasi Model

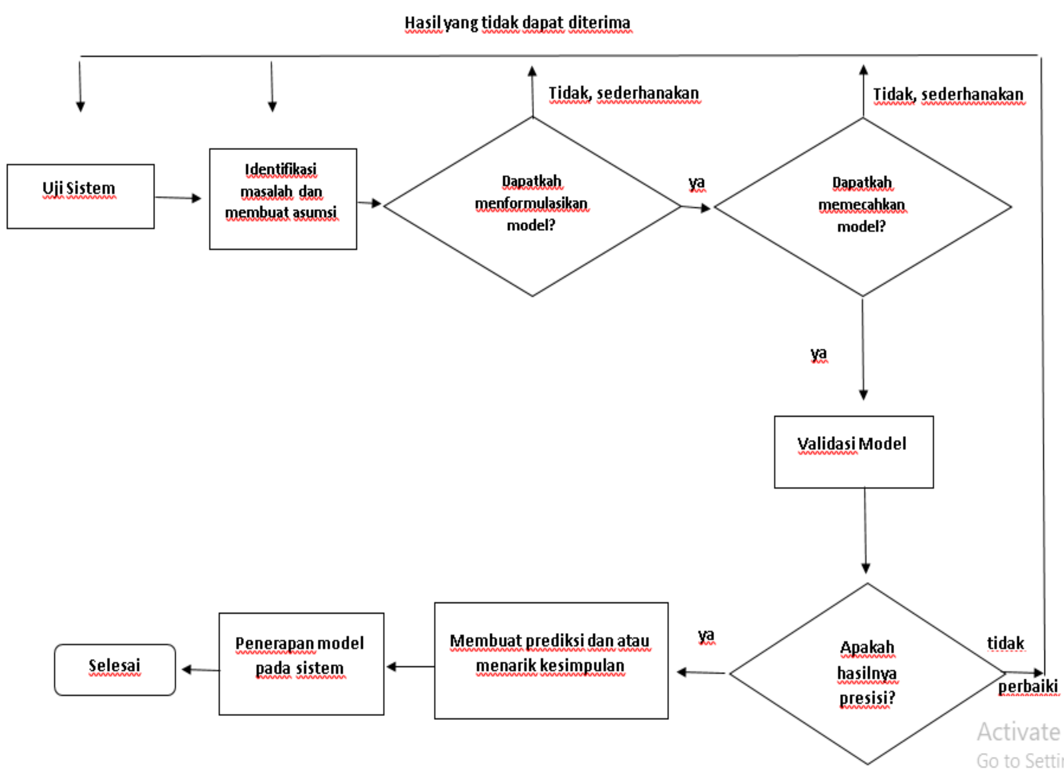
Sebelum model dapat digunakan, maka model harus diuji terlebih dahulu. Uji model meliputi:

a. Apakah model tersebut dapat mengatasi masalah?
b. Apakah model tersebut masuk akal?
c. Uji dengan data asli.

5. Implementasi dari Model

6. Mempertahankan Model

Secara umum beberapa hal yang terlibat dalam pemodelan matematika diperlihatkan pada Gambar 1.



Gambar 1. Skema pemodelan matematika

(Giordano, 2003).

2.2 Persamaan Diferensial

Dengan memperhatikan banyaknya variable bebas yang terlibat, maka ada dua bentuk persamaan diferensial yaitu persamaan diferensial biasa jika hanya ada satu variabel bebas yang terlibat dan persamaan differensial parsial jika ada lebih dari satu variabel bebas yang terlibat. Bentuk umum dari persamaan diferensial biasa (PDB) adalah

$$F\left(x, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{2.1}$$

Ekspresi ini mengatakan bahwa terdapat hubungan antara variabel bebas x dan variabel tak bebas y beserta derivatif-derivatifnya dalam himpunan persamaan yang secara identik sama dengan nol yang menyatakan model matematika dari fenomena perubahan yang terjadi. Sebuah persamaan diferensial dikatakan mempunyai orde n jika orde turunan tertinggi yang terlibat adalah n, sedangkan jika turunan dengan orde tertinggi itu berderajat k maka persamaan itu dinamakan persamaan diferensial berderajat k. (Kartono,2012)

2.3 Sistem Persamaan Diferensial

Kumpulan dari beberapa persamaan diferensial disebut sebagai sistem persamaan diferensial. Diberikan vektor $x \in E$, $E \subseteq R^n$ dengan $x = (x_1, x_{2,} x_{3,\dots,} x_n)^T$ dan E adalah himpunan terbuka dari R^n. $f: E \to R^n$ dengan $f = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_n)^T$ dan $f \in C'(E)$ dimana $C'(E)$ adalah himpunan semua fungsi yang mempunyai turunan pertama yang kontinu di E. Jika $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ menyatakan turunan x terhadap t maka sistem persamaan diferensial dapat dituliskan menjadi,

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\
\dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\
\dot{x}_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

Sistem (2.2) dapat dituliskan dalam notasi vektor menjadi

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \qquad (2.3)$$

2.3.1 Sistem Persamaan Diferensial Linear

Secara umum sistem persamaan diferensial linear orde satu dengan variabel tak bebas $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ serta variabel bebas t dapat dinyatakan sebagai berikut,

$$\dot{x_1} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \qquad (2.4)$$

$$\dot{x_2} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \qquad (2.5)$$

...

$$\dot{x_n} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \qquad (2.6)$$

Atau dalam bentuk notasi matriks, Persamaan (2.4) sampai (2.6) dapat dituliskan sebagai

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \vdots \\ \dot{x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\, a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_{n1}\, a_{n2} \cdots a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

Selanjutnya sistem (2.7) dapat dinyatakan menjadi

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{f}(\mathbf{t}) \tag{2.8}$$

Dengan $\mathbf{x} \in R^n$ merupakan variabel tak bebas dan A adalah matriks ukuran $n \times n$. Matriks A dengan $a_{ij}(t), i = 1,2,3, \ldots, n,\ j = 1,2,3, \ldots, n$ dan $F(t)$ adalah matriks ukuran $n \times 1$ dalam fungsi t.

Jika $f_i(t) = 0$ dengan $i = 1,2,3, \ldots, n$ untuk setiap t maka sistem (2.5) disebut sistem persamaan diferensial linear homogen . Sedangkan jika $f_i(t) \neq 0$ maka sistem (2.5) disebut sistem persamaan linear nonhomogen (Ross,1984).

2.3.2 Sistem Persamaan Diferensial Non Linear

Persamaan diferensial non linear adalah persamaan diferensial biasa yang tidak linear. Persamaan diferensial dikatakan tidak linear jika persamaan diferensial tersebut memenuhi paling sedikit satu dari kriteria berikut ini:

1. Memuat variabel tak bebas dan atau turunan-turunannya berpangkat selain satu.

2. Mengandung bentuk perkalian antara sebuah variabel terikat dengan variabel terikat lainnya, atau turunan yang satu dengan turunan yang lainnya, atau variabel terikat dengan sebuah turunan.
3. Terdapat fungsi transenden dari variabel tak bebas dan turunan-turunannya

(Ross, 1984).

2.4 Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan (ekuilibrium) merupakan merupakan titik tetap yang tidak berubah terhadap waktu. Misalkan suatu sistem persamaan diferensial dinyatakan sebagai berikut:

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{f}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in R^n. \tag{2.10}$$

Definisi 2.4.1

Titik $\overline{\boldsymbol{x}} \in R^n$ disebut titik kesetimbangan (titik eqiulibrium) sistem (2.10) jika $\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}}) = 0$ (Perko,1991).

Diberikan $\overline{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t})$ sebagai solusi dari persamaan (2.10). Titik kesetimbangan $\bar{x}$ dikatakan stabil jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, sedemikian sehingga untuk setiap nilai awal x_0 berlaku $|x_0 - \overline{\boldsymbol{x}}| < \varepsilon$ untuk setiap $t > 0$ (Wiggins, 2003).

2.5 Linierisasi Sistem Persamaan Nonlinear

Linierisasi merupakan proses mengubah suatu sistem nonlinear menjadi sistem linear. Linearisasi dilakukan pada sistem nonlinear untuk mengetahui perilaku sistem disekitar titik kesetimbangan sistem tersebut. Linearisasi pada sistem nonlinear dimaksudkan untuk memperoleh aproksimasi yang baik. Untuk mencari hasil pelinearan dari sistem persamaan differensial tak linear digunakan matriks Jacobi (Iswanto, 2012).

Diberikan sistem persamaan diferensial non linear

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{2.11}$$

Dengan x $\in E \subseteq R^n$,f: $E \to R^n$, f merupakan fungsi non linear dan kontinu. Misalkan $\bar{\boldsymbol{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)^T$ adalah titik kesetimbangan dari sistem (2.10), diperoleh matriks Jacobian dari f dititik $\bar{x}$:

$$Jf(\bar{x}) = \left. \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \right|_{\mathbf{x} = \bar{\boldsymbol{x}}} \tag{2.12}$$

Definisi 2.5.1 (Perko, 1991: 102)

Diberikan matriks Jacobian $Jf(\bar{x})$. Sistem Linear $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Jf}((\bar{\boldsymbol{x}}))\boldsymbol{x}$ disebut linearisasi dari sistem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ di sekitar $\bar{\boldsymbol{x}}$.

2.6 Bilangan Reproduksi Dasar

Menurut Driessche dan Watmough (2001) bilangan reproduksi dasar adalah bilangan yang menyatakan rata-rata banyaknya individu yang dapat terinfeksi akibat tertular individu terinfeksi yang berlangsung dalam populasi rentan penyakit. Pada model ekologi, banyaknya individu yang terinfeksi ekuivalen dengan kelahiran baru di kompartemen. Bilangan reproduksi dasar dinotasikan dengan R_0. Dalam kasus dinamika populasi nyamuk, jika $R_0 < 1$ maka keadaan dikatakan bebas nyamuk, sedangkan jika $R_0 > 1$ maka keadaan dikatakan terdapat populasi nyamuk.

2.7 Nilai Eigen

Jika J adalah matriks $n \times n$, maka vektor tak nol $\boldsymbol{x}$ pada R^n disebut vektor eigen dari J jika Jx adalah sebuah kelipatan skalar dari $\boldsymbol{x}$; jelasnya,

$$J\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

Untuk skalar dengan sembarang λ. Skalar λ disebut nilai eigen dari J dan $\boldsymbol{x}$, disebut vektor eigen dari J yang terkait dengan λ (Anton dan Rorres, 2004).

Teorema 2.7.1 Nilai Eigen

Jika J adalah sebuah matriks $n \times n$ dan λ adalah sebuah bilangan real, maka pernyataan-pernyataan berikut ini adalah ekuivalen.

a). λ adalah sebuah nilai eigen dari J.

b). Sistem persamaan $(\lambda\mathrm{I} - \mathrm{J})\mathbf{x} = 0$ memiliki solusi nontrivial.

c). Terdapat sebuah vektor tak nol $\boldsymbol{x}$ pada R^n sedemikian rupa sehingga $J\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$.

d). λ adalah sebuah solusi dari persamaan karakteristik $\det((\lambda\mathrm{I} - \mathrm{J})\mathbf{x} = 0$ (Anton dan Rorres, 2004).

2.8 Persamaan Karakteristik

Untuk memperoleh nilai eigen dari sebuah matriks $A_{n\times n}$, didapat dengan menuliskan kembali $J\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ sebagai

$$J\boldsymbol{x} = \lambda I\boldsymbol{x}$$

Atau secara ekuivalen

$$|\lambda\mathrm{I} - \mathrm{J}|\mathbf{x} = 0 \qquad (2.13)$$

Agar λ dapat menjadi nilai eigen, harus terdapat satu solusi tak nol dari persamaan (2.13) memiliki solusi tak nol jika dan hanya jika $|\lambda\mathrm{I} - \mathrm{J}|\mathbf{x} = 0$.

Persamaan ini disebut sebagai persamaan karakteristik matriks J, skalar-skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai-nilai-eigen J. Diperluas lagi, $\det(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{J})$ adalah sebuah polinomial p dalam variabel λ yang disebut sebagai polinomial karakteristik matriks J. Jika J adalah matriks $n \times n$, maka polinomial karakteristiknya menjadi:

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n\lambda = 0$$

Berdasarkan teorema aljabar persamaan menjadi:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n\lambda = 0$$

yang memiliki sebanyak-banyaknya n solusi yang berbeda, sehingga matriks $n \times n$ memiliki sebanyak-banyaknya n nilai eigen berbeda (Anton dan Rorres, 2004).

2.9 Kriteria Routh-Hurwitz

Jika sebuah persamaan dari nilai eigen berbentuk $|\lambda I - A|x = 0$, dimana

$$|\lambda I - A| = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

Dibawah kondisi bahwa nilai $a_0 > 0$. Maka dapat dikatakan bahwa $(\lambda I - A)$ akan stabil jika semua nilai eigen memiliki bagian real negatif. Oleh karena itu, akan diberikan teknik standar untuk mendeskripsikan mengenai kestabilan langsung dari koefisien ini.

Mengutip pada apa yang dikatakan oleh Clark, mengulang dari versi Methods of Analytical Dinamic, L., Meirovitch, McGraw-Hill, 1970, jika diberikan polinominal yang kemudian dapat dituliskan dalam bentuk $n \times n$ matriks H berikut ini.

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_1 \cdots 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \cdots 0 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \cdots 0 \\ . & . & . & . \cdots . \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & . \cdots a_n \end{bmatrix}$$

Semua unsur pada subscrip $> n$ atau < 0 dapat digantikan dengan 0. Prinsip yang terpenting dan harus ditemukan mengenai stabilitas adalah mengenai prinsip subdeterminant dari polinomial seperti yang ada dibawah ini

$$D_1 = a_1.$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix}.$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}.$$

....

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_1 \cdots 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \cdots 0 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \cdots 0 \\ . & . & . & . \cdots . \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & . \cdots a_n \end{vmatrix}$$

Dari penjelasan di atas maka dapat digunakan masing-masing kriteria. Dalam bentuk kubik atau pangkat tiga atau $|\lambda I - A| = a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$. Kriteria Routh-Hurwitz yang berlaku ada tiga, yaitu

$$D_1 = a_1 > 0,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_0a_3 > 0,$$

$$D_{3=} \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} = a_3D_2 > 0.$$

Ketiga kriteria tersebut akan menjadi bentuk tunggal, yaitu $a_1a_2 - a_0a_3 > 0$. Sehingga syarat perlu dan kondisi cukup bahwa polinominal kubik menjadi stabil adalah semua koefisien adalah positif dan nilai $D_2 > 0$ (Iswanto, 2012).

III. METODE PENELITIAN

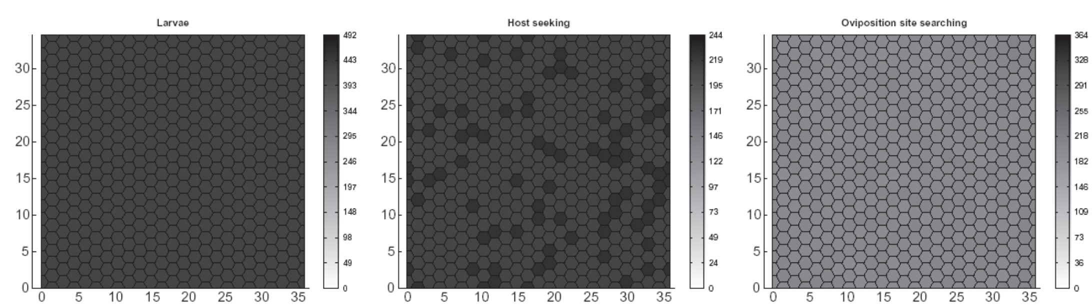
Pada bab ini akan diberikan penelitian yang telah dilakukan yang berkaitan, waktu dan tempat penelitian, dan metode yang digunakan dalam penelitian ini.

3.1 Penelitian yang Telah Dilakukan

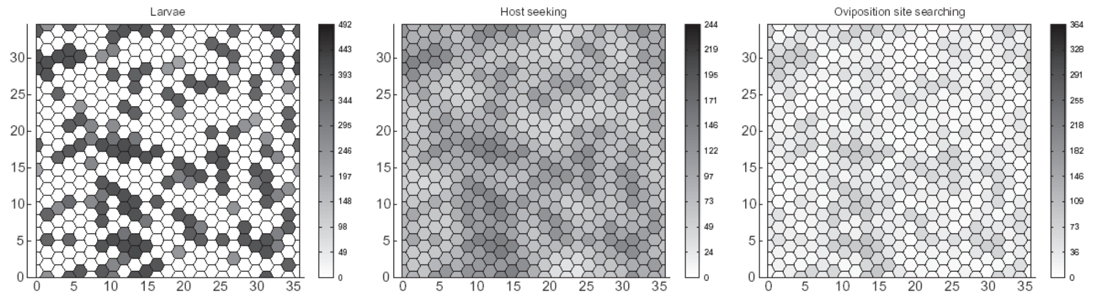
Berdasarkan penelitian mengenai pemodelan matematika penyebaran nyamuk di lingkungan heterogen, diperoleh hasil di hari ke 250 ketika sistem berada di titik kesetimbangan sebagai berikut:

a. Dampak lingkungan heterogen dalam distribusi spasial

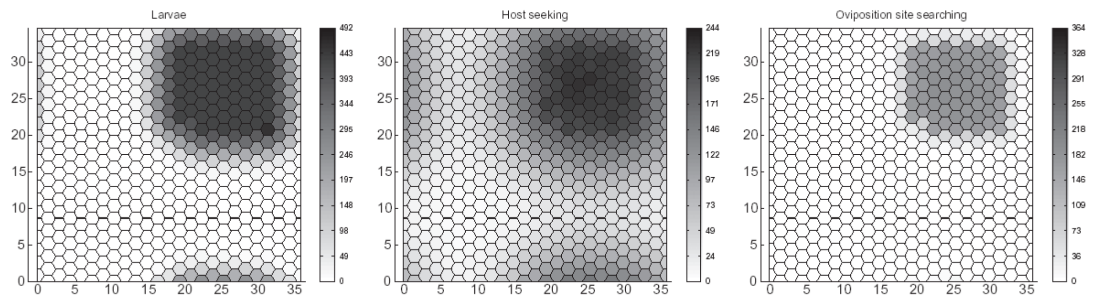
Berikut distribusi spasial populasi nyamuk berdasarkan scenario dan fase hidup:



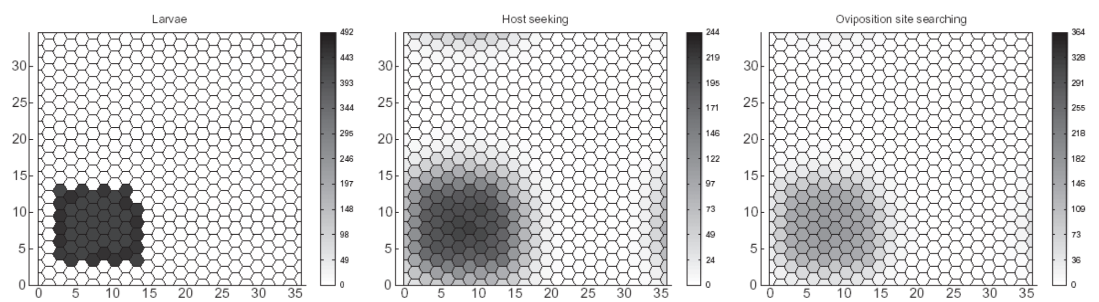
Gambar 2. Skenario 1: semua patch berisi tempat tinggal dan tempat berkembang biak.



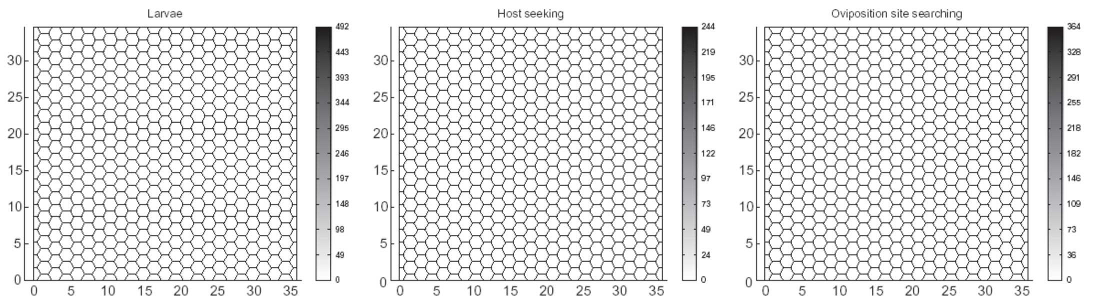
Gambar 3. Skenario 2: distribusi acak tempat tinggal dan tempat berkembang biak.



Gambar 4. Skenario 3: seluruh patch berisi tempat berkembang biak tetapi tempat tinggal berada di sisi lain grid.



Gambar 5. Skenario 4: seluruh patch berisi tempat tinggal tetapi tempat berkembang biak berada di sisi lain grid.



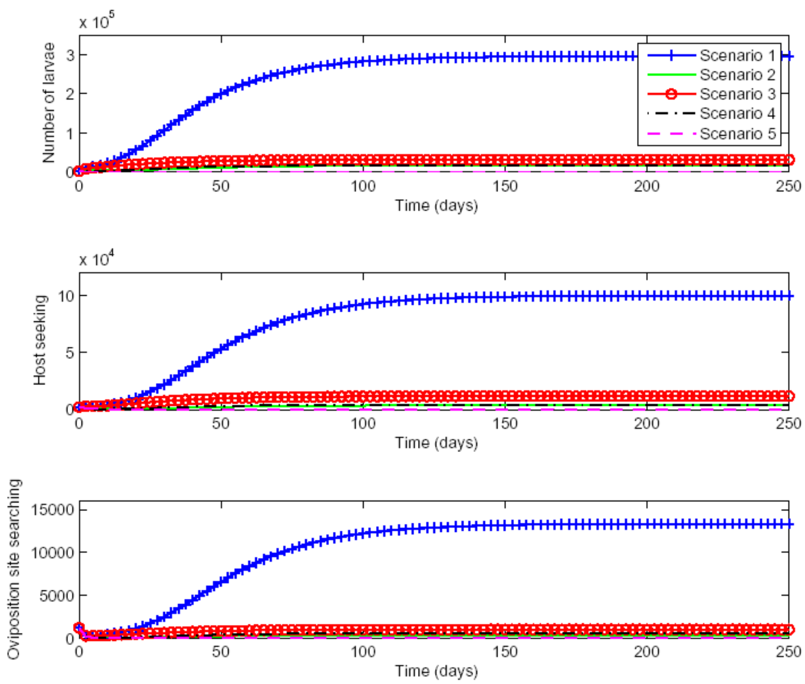
Gambar 6. Skenario 5: kelompok tempat tinggal dan tempat berkembang biak saling berjauhan.

Gambar 2 sampai 6 menunjukkan dampak heterogenitas terhadap distribusi spasial larva, nyamuk yang bertempat tinggal, dan nyamuk siap bertelur ketika sistem berada pada titik kesetimbangan. Distribusi populasi sangat bergantung pada distribusi antara tempat tinggal dan tempat berkembang biak. Ketika seluruh patch berisi tempat tinggal dan tempat berkembang biak, seluruh grid menjadi populasi nyamuk. Nyamuk yang mencari tempat tinggal menunjukkan penyebaran terbesar ketika tempat tinggal dan tempat berkembang biak terdistribusi acak, berbanding lurus dengan nyamuk yang siap bertelur. Ketika tempat berkembang biak berada di seluruh patch dan tempat tinggal dikelompokkan dalam satu grid, nyamuk yang mencari tempat tinggal menyebar di area yang lebih luas, berbanding lurus dengan skenario dimana tempat tinggal dan tempat berkembang biak dikelompokkan dalam satu grid.

b. Dampak penyebaran dalam distribusi populasi

Penyebaran nyamuk berpengaruh ketika distribusi tempat tinggal dan tempat berkembang biak berada pada satu grid heterogen. Ketika tempat tinggal dan tempat berkembang biak terletak di grid terpisah , populasi akan berakhir dalam beberapa hari.

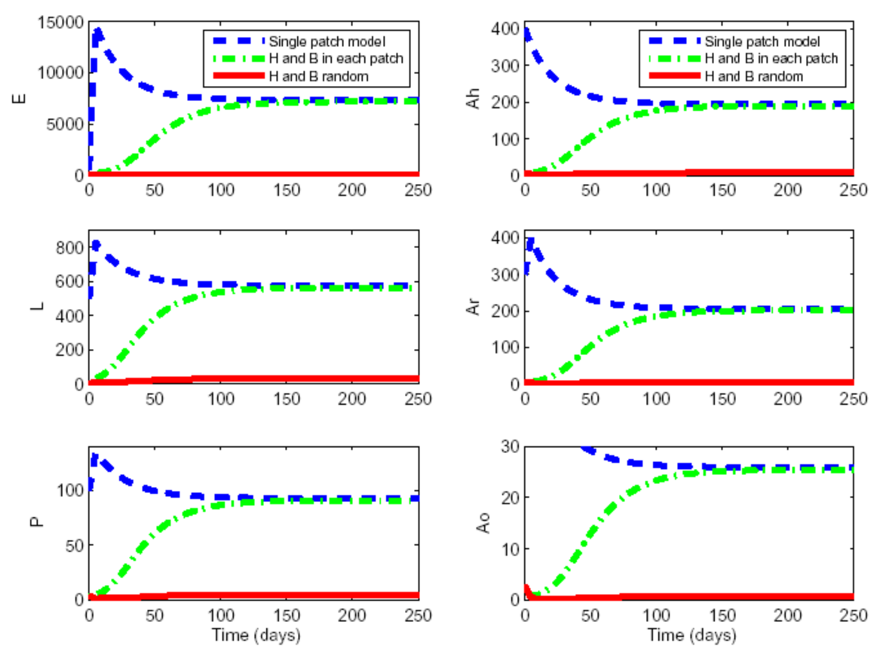
c. Dampak heterogenitas terhadap dinamika populasiBerikut dinamika populasi nyamuk berdasarkan skenario dan fase hidupnya:



Gambar 7. Dinamika populasi nyamuk berdasarkan scenario dan fase hidup. Skenario 1: semua patch berisi tempat tinggal dan tempat berkembang biak. Skenario 2: distribusi acak tempat tinggal dan tempat berkembang biak. Skenario 3: seluruh patch berisi tempat berkembang biak tetapi tempat tinggal berada di sisi lain grid. Skenario 4: seluruh patch berisi tempat tinggal tetapi tempat berkembang biak berada di sisi lain grid. Skenario 5: kelompok tempat tinggal dan tempat berkembang biak saling berjauhan.

Distribusi heterogen tempat berkembang biak dan tempat tinggal, sebagian besar populasi berkurang pada titik kesetimbangan. Ketika kelompok tempat tinggal dan tempat berkembang biak dilokasikan saling berjauhan, nyamuk menjadi tidak dapat bereproduksi karena jarak yang harus ditempuh menjadi meningkat. Akan tetapi, masih terdapat kemungkinan untuk bertambahnya populasi nyamuk.

d. Dampak penyebaran dan heterogenitas terhadap dinamika populasi



Gambar 8. Perbandingan plot *time series* model pertumbuhan nyamuk tanpa memperhatikan penyebaran dengan model pertumbuhan nyamuk dengan memperhatikan penyebaran.

Pada bagian ini, dilakukan simulasi numerik pada kedua model. Kedua model menunjukkan keseimbangan yang sedikit berbeda. Pada model tanpa penyebaran diperoleh titik kesetimbangan (7339, 577, 93, 194, 206, 26) dan pada model dengan penyebaran diperoleh titik kesetimbangan (7197, 564, 91, 190, 202, 25). (Lutambi. A. M., 2013)

3.2 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester genap tahun ajaran 2017/2018 bertempat di jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.3 Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan secara studi pustaka yaitu mempelajari buku-buku literature yang terdapat di perpustakaan Jurusan Matematika atau Universitas Lampung serta jurnal ilmiah yang dapat menunjang proses penelitian.

Langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah:

1. Menentukan model deskripsi pada fase hidup nyamuk.
2. Menentukan model pertumbuhan nyamuk menggunakan persamaan differensial biasa.
3. Menentukan bilangan reproduksi dasar (R_0) dari sistem persamaan diferensial biasa pertumbuhan nyamuk.
4. Menentukan titik kesetimbangan (E) pada model pertumbuhan nyamuk.

5. Mengkaji kestabilan titik kesetimbangan berdasarkan bilangan reproduksi dasar pada model pertumbuhan nyamuk.
6. Membuat simulasi numerik pada model pertumbuhan nyamuk dengan beberapa variasi nilai parameter.
7. Menginterpretasikan hasil dari solusi dinamika pertumbuhan nyamuk.

V. KESIMPULAN

Pada penelitian ini telah dikaji mengenai model pertumbuhan nyamuk dengan menggunakan persamaan differensial biasa, analisis kestabilan dan simulasi titik kesetimbangan model pertumbuhan nyamuk. Dari hasil penelitian ini, diperoleh model pertumbuhan nyamuk sebagai berikut:

$$\frac{dE}{dt} = b\rho_{A_o}A_o - (\mu_E + \rho_E)E$$

$$\frac{dL}{dt} = \rho_E E - \left(\mu_{L_1} + \mu_{L_2}L + \rho_L\right)L$$

$$\frac{dP}{dt} = \rho_L L - \left(\mu_p + \rho_p\right)P$$

$$\frac{dA_h}{dt} = \rho_p P + \rho_{A_o}A_o - \left(\mu_{A_h} + \rho_{A_h}\right)A_h$$

$$\frac{dA_r}{dt} = \rho_{A_h}A_h - \left(\mu_{A_r} + \rho_{A_r}\right)A_r$$

$$\frac{dA_0}{dt} = \rho_{A_r}A_r - \left(\mu_{A_o} + \rho_{A_o}\right)A_o$$

Dari model pertumbuhan nyamuk diperoleh dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas nyamuk $E_0 =$ (0,0,0,0,0,0) dan titik kesetimbangan populasi nyamuk

$$E_1(E, L, P, A_h, A_r, A_o)\left(\frac{b\rho_{A_o}A_o}{\mu_E+\rho_E}, \frac{(\mu_{L_1}+\rho_L)(R_o-1)}{\mu_{L_2}}, \frac{\rho_L L}{\mu_p+\rho_p}, \frac{\mu_P P R_0}{(\mu_{A_h}+\rho_{A_h})B_1}, \frac{\rho_{A_h}A_h}{\mu_{A_r}+\rho_{A_r}}, \frac{\rho_{A_r}A_r}{\mu_{A_o}+\rho_{A_o}}\right).$$

Titik kesetimbangan pertumbuhan nyamuk dipengaruhi oleh bilangan reproduksi dasar (R_0), yang dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$R_0 = \frac{b \prod_j \frac{\rho_j}{(\mu_j + \rho_j)}}{1 - \prod_{A_i} \frac{\rho_{A_i}}{\mu_{A_i} + \rho_{A_i}}}$$

R_0 merupakan indikator penyebaran suatu populasi. Jika $R_0 < 1$ maka tidak ada pertumbuhan populasi yang terjadi, namun jika $R_0 > 1$, maka sangat mungkin terjadi pertumbuhan nyamuk sehingga dapat menyebabkan lonjakan populasi nyamuk.

Dari hasil uji kestabilan diperoleh dua kestabilan yaitu kestabilan saat bebas nyamuk dan kestabilan saat ada populasi nyamuk.

Dari simulasi yang telah dilakukan dalam penelitian ini dapat diketahui bahwa cara untuk mencegah terjadinya lonjakan populasi nyamuk adalah dengan mengontrol nilai-nilai parameter batasan. Misalnya dengan mengeringkan tempat bertelur nyamuk, dan pemberian bubuk abate untuk memperbesar laju kematian telur (μ_E), larva (μ_L), dan pupa (μ_P) serta melakukan pengasapan (*fogging*) untuk memperbesar laju kematian nyamuk (μ_{A_i}) sehingga laju pertumbuhan nyamuk berkurang dan tidak terjadi lonjakan populasi.

DAFTAR PUSTAKA

Anton , H. dan Rorres, C. 2004. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi, Edisi kedelapan*. Erlangga: Jakarta.

Driessche, P.V.D. dan Watmough, j. 2002. Reproduction Number and Subtreshold Endemic Equilibria for Compartmental of Disease Transmission. *Mathematical Biosciences*. 180: 29 – 48.

Giordano, F. R., Weir, M. D., dan Fox, W. P. 2003. *A First Course in Mathematic Modeling*. China Press. China.

Iswanto, R. J. 2012. *Pemodelan Matematika (Aplikasi dan Terapannya)*. Graha Ilmu: Jogjakarta.

Kartono. 2012. *Persamaan Diferensial Biasa Model Matematika Fenomena Perubahan*. Graha Ilmu: Yogyakarta.

Lutambi Angelina Mageni, Melissa A. Penny, Thomas Smith, Nakul Chitnis. 2013. Mathematical Modelling of Mosquito Dispersal in a Heterogeneus Environment. *Mathematical Bioscience*. 241:198-202.

Perko, L. 1991. *Differential equation and Dynamical System*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg: New York.

Ross, L. 1984. *Differential Equation*. Springer. New York.

Wiggins, S. 2003. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos, Second Edition*. Springer –Verlag: New York.