II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Geometri Insidensi

Suatu geometri dibentuk berdasarkan aksioma yang berlaku dalam geometri-geometri tersebut. Geometri insidensi didasari oleh aksioma insidensi. Di dalam sebuah geometri selain aksioma diperlukan juga unsur-unsur tak terdefinisi. Untuk membangun suatu geometri diperlukan unsur tak terdefinisi sebagai berikut :

1. Titik.

   Titik dilambangkan dengan bulatan kecil (.). Titik hanya mempunyai posisi, tetapi titik tidak mempunyai panjang, lebar, maupun ketebalan.

2. Himpunan titik-titik yang dinamakan garis.

   Garis dilambangkan dengan simbol $\overleftrightarrow{AB}$. Garis mempunyai panjang tapi tidak mempunyai lebar maupun ketebalan. Suatu garis bisa lurus, melengkung, maupun kombinasi dari keduanya.

3. Himpunan titik-titik yang dinamakan bidang.

   Bidang mempunyai panjang dan lebar tapi tidak mempunyai ketebalan. Bidang adalah suatu permukaan di mana suatu garis yang menghubungkan dua titik pada permukaan tersebut secara keseluruhan akan terletak pada permukaan tersebut.

Ketiga unsur tak terdefinisi tersebut dikaitkan satu sama lain dengan sebuah sistem aksioma.

Pada geometri insidensi sistem aksioma yang digunakan adalah sistem aksioma insidensi yang terdiri dari enam aksioma, yaitu :

1.1 Garis adalah himpunan titik-titik yang mengandung paling sedikit dua titik.

1.2 Dua titik yang berlainan terkandung dalam tepat satu garis (satu dan tidak lebih dari satu garis).

1.3 Bidang adalah himpunan titik-titik yang mengandung paling sedikit tiga titik yang tidak terkandung dalam satu garis (tiga titik tak segaris atau tiga titik yang tak kolinear).

1.4 Tiga titik berlainan yang tak segaris terkandung dalam satu dan tidak lebih dari satu bidang.

1.5 Apabila sebuah bidang memuat dua titik berlainan dari sebuah garis, maka bidang itu akan memuat setiap titik pada garis tersebut (garis terkandung dalam bidang itu, atau garis terletak pada bidang itu).

1.6 Apabila dua bidang bersekutu pada sebuah titik maka kedua bidang itu akan bersekutu pada titik kedua yang lain (ada titik lain dimana bidang tersebut juga bersekutu).

Sebuah himpunan titik-titik bersama dengan himpunan bagian seperti garis dan bidang yang memenuhi sistem aksioma 1.1 sampai dengan 1.6 disebut suatu geometri insidensi (Rawuh, 2009).

2.2 Geometri Insidensi Terurut

Geometri insidensi terurut adalah geometri insidensi yang telah diperkaya dengan aksioma urutan.

2.2.1 Urutan Pada Garis

Urutan adalah salah satu pengertian yang amat mendasar dalam matematika. Konsep urutan dapat dijumpai dalam kalkulus khususnya dalam himpunan bilangan real. Secara matematika diperkenalkan pengertian urutan tersebut dalam bentuk suatu aksioma yang selanjutnya akan dinamakan sistem *Aksioma Terurut*. Sistem aksioma tersebut adalah sebagai berikut:

U_1 : *(ABC)* mengakibatkan *(CBA)*, *(ABC)* dibaca "titik *B* antara titik *A* dan titik *C*".

U_2 : *(ABC)* mengakibatkan ~ *(BCA)* dan ~ *(BAC)*, ~ *(BCA)* dibaca "tidak *(BCA)*".

U_3 : Titik-titik *A*, *B*, *C* berlainan dan segaris jika dan hanya jika *(ABC)*, *(BCA)*, atau *(CAB)*.

U_4 : Jika *P* segaris dan berbeda dengan *A*, *B*, *C* maka *(APB)* mengakibatkan *(BPC)* atau *(APC)* tetapi tidak sekaligus dua-duanya.

U_5 : Jika $A \neq B$ maka ada *X*, *Y*, *Z* sehingga *(XAB)*, *(AYB)*, *(ABZ)*.

a. Ruas Garis (Schaum's, 2005)

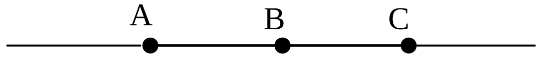
Ruas garis lurus dilambangkan dengan $\overline{AB}$. Ruas garis lurus adalah bagian dari garis lurus yang berada di antara dua titik pada garis lurus tersebut, termasuk kedua titik tersebut.

Jika suatu ruas garis dibagi menjadi bagian-bagian:

1. Panjang keseluruhan ruas garis sama dengan jumlah dari panjang semua bagiannya.
2. Panjang keseluruhan ruas garis lebih besar dari panjang bagiannya yang manapun.
3. Dua ruas garis yang mempunyai panjang sama dikatakan *kongruen*. Jadi, jika *AB* = *CD* maka $\overline{AB}$ kongruen dengan $\overline{CD}$, sehingga ditulis $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

Jika suatu ruas garis dibagi menjadi dua bagian yang sama:

1. Titik bagiannya adalah titik tengah ruas garis tersebut.
2. Garis yang memotong pada titik tengah dikatakan membagi dua ruas garis tersebut.
3. Jika tiga titik *A, B,* dan *C* terletak pada satu garis, maka ketiganya disebut *kolinear*. Jika *A, B,* dan *C* kolinear dan *AB* + *BC* = *AC*, maka *B* terletak di antara *A* dan *C*.



Gambar 2.1. Tiga titik *A*, *B*, dan *C* yang kolinear.

Teorema 2.1 (Rawuh, 2009)

(ABC) mengakibatkan *(CBA)* dan *(ABC)* mengakibatkan ~ *(BCA),* ~ *(BAC),* ~ *(ACB),* dan ~ *(CAB).*

Bukti:

Menurut U_1, jika (*ABC)* mengakibatkan *(CBA)*, menurut U_2, *(ABC)* dan *(CBA)* mengakibatkan ~ *(BCA)* dan ~ *(BAC).* Misalkan *(ACB)* maka menurut U_1 akan diperoleh *(BCA).* Hal ini berlawanan dengan *(BCA).* Jadi haruslah ~ *(ACB).* Misalkan *(CAB)* menurut U_2, maka diperoleh ~ *(ABC).* Hal ini berlawanan dengan *(ABC).* Ini haruslah ~ *(CAB).*

Definisi 2.1 (Rawuh, 2009)

Apabila $A \neq B$, maka himpunan $H = \{X|(AXB)\}$ disebut ruas garis *AB* atau disingkat $\overline{AB}$. Titik *A* dan *B* disebut ujung-ujung ruas.

Akibat

$$\overline{AB} = \{X|(AXB)\}$$

Teorema 2.2 (Rawuh, 2009)

Jika $A \neq B$, maka

1. $\overline{AB} = \overline{BA}$.
2. $\overline{AB} \subset AB$.
3. $A \notin \overline{AB}$, $B \notin \overline{AB}$
4. $\overline{AB}$ himpunan tak kosong.

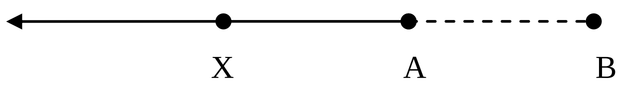
Bukti:

1. Oleh karena $(AXB) = (BXA)$, serta $\overline{AB} = \{X|(AXB)\}$ dan $\overline{BA} = \{X|(BXA)\}$ maka $\overline{AB} = \overline{BA}$.
2. Misalkan $X \in \overline{AB}$, maka (AXB). Ini berarti A, X, B segaris sehingga $X \in AB$. Jadi $\overline{AB} \subset AB$.
3. Misalkan $A \in \overline{AB}$. Jadi berlakulah (AAB). Ini berlawanan dengan U_3. Jadi $A \notin \overline{AB}$. Misalkan $B \in \overline{AB}$ Jadi berlakulah (ABB). Ini berlawanan dengan U_3. Jadi $B \notin \overline{AB}$.
4. Oleh karena $A \neq B$, menurut U_5, ada X sehingga (AXB). Jadi, $X \in \overline{AB}$ atau $\overline{AB}$ himpunan tak kosong.

b. Sinar atau setengah garis

Definisi 2.2 (Rawuh, 2009)

Jika ada dua titik A dan B, $A \neq B$, maka himpunan $H = \{X|(XAB)\}$ dinamakan sinar atau setengah garis. Sinar ditulis sebagai *A/B* ("*A* atas *B*"). Kadang-kadang *A/B* dinamakan perpanjangan $\overline{AB}$. Titik *A* dinamakan suatu ujung sinar *A/B*.



Gambar 2.2. Sinar atau setengah garis

Teorema 2.3 (Rawuh, 2009)

Jika $A \neq B$, maka

1. $A/B \subset AB$; $B/A \subset AB$.
2. $A \notin A/B$; $B \notin A/B$.
3. A/B tidak hampa.

Bukti:

1. Jika $A \neq B$, menurut aksioma U_5 ada X sehingga (XAB). Ini berarti, menurut definisi sinar, $X \in A/B$. Kemudian, (XAB) juga berarti $X \in AB$. Jadi, $A/B \subset AB$. Berdasarkan definisi sinar, $X \in B/A$. Kemudian, (XAB) juga berarti $X \in AB$. Jadi, $B/A \subset AB$.
2. Jika $A \neq B$, maka $A \notin A/B$, dan $B \notin A/B$.
3. Jika $A \neq B$, menurut aksioma U_5 ada X sehingga (XAB). Ini berarti, menurut definisi sinar, $X \in A/B$. Sehingga A/B tidak hampa.

2.2.2 Urutan Pada Bidang

Pada garis berlaku aksioma U_1 sampai U_5, tapi aksioma tersebut kurang mencukupi untuk bidang, sehingga untuk bidang dilengkapi dengan aksioma U_6 yang biasa disebut dengan Aksioma Pasch. Aksiomanya berbunyi sebagai berikut:

U_6 : Misalkan g sebuah garis yang sebidang dengan titik A, B, C tetapi g tidak melalui A, B, atau C. apabila g memotong $\overline{AB}$ maka g memotong $\overline{BC}$ atau $\overline{AC}$ tetapi tidak dua-duanya.

U_6 juga berlaku apabila A, B, C berlainan dan segaris atau apabila $C = A$ atau $C = B$.

Definisi 2.3 (Rawuh, 2009)

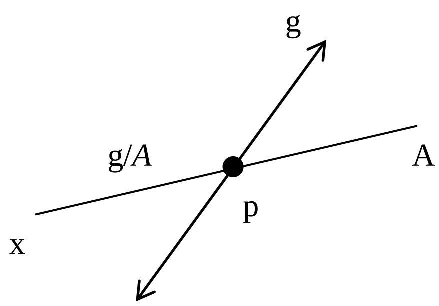
Jika $A \notin$ g, himpunan semua titik X hingga $\overline{XA}$ memotong g dinamakan setengah bidang yang dilambangkan dengan g/A (dibaca "g atas A") garis g disebut tepi setengah bidang tersebut.

Teorema 2.4 (Rawuh, 2009)

Apabila $A \notin$ g, maka

1. g/$A \subset gA$, gA adalah bidang yang melalui g dan A.
2. g, g / A dan $\{A\}$ saling lepas.
3. g / $A \neq \emptyset$

Bukti:



Gambar 2.3. Garis $\overline{XA}$ yang memotong g

1. Misalkan $X \in g/A$. Jadi $\overline{XA}$ memotong g misalnya di titik P. Sehingga (XPA) dan $X \in PA \subset gA$. Jadi g/$A \subset gA$.

2. Misalkan $X \in g/A$ dan $X \in g$. Jadi $\overline{XA}$ memotong g di P dan sehingga berlaku (XPA). Ini berarti $A \in XP$. Oleh karena $X \in g$ dan $P \in g$ maka $XP = g$. Sehingga $A \in g$ hal ini bertentangan dengan yang diketahui bahwa $A \notin$ g. Jadi haruslah $g/A \cap g = \emptyset$. Misalkan $A \in g/A$ ini akan berarti bahwa $\overline{AA}$ memotong g. Ini tidak mungkin sebab diketahui bahwa $A \notin$ g.
3. Oleh karena menurut U_5 ada X sehingga (APX) di sini $P \in g$ berarti $\overline{XA}$ memotong g di titik P. Jadi $X \in g/A$.

Definisi 2.4 (Rawuh, 2009)

Setengah bidang dengan tepi g disebut sebuah sisi dari g. Dua setengah bidang yang berhadapan dengan sisi g dinamakan sisi yang berhadapan. Dua titik atau dua himpunan titik dikatakan terletak pada sisi g yang sama apabila mereka terletak pada setengah bidang bertepi g yang sama, mereka terletak pada sisi g yang berhadapan apabila mereka terletak pada dua setengah bidang bertepi g yang berhadapan.

Oleh karena setiap titik yang tidak pada *g* terletak pada tepat satu setengah bidang bertepi *g* sedangkan setiap setengah bidang bertepi *g* memiliki setengah bidang tunggal yang berhadapan, sehingga dapat ditarik kesimpulan sifat-sifat berikut berdasarkan dari Aksioma Pash, yaitu:

1. Misalkan titik *A* dan *B* terletak pada sisi *g* yang sama dan *B* dan *C* pada sisi *g* yang sama maka, *A* dan *C* juga pada sisi *g* yang sama.
2. Misalkan *A* dan *B* pada sisi *g* yang sama dan *B* dan *C* pada sisi *g* yang berhadapan, maka *A* dan *C* terletak pada sisi *g* yang berhadapan.

3. Misalkan A dan B terletak pada sisi g yang berhadapan dan B dan C terletak pada sisi g yang berhadapan maka A dan C terletak pada sisi g yang sama.

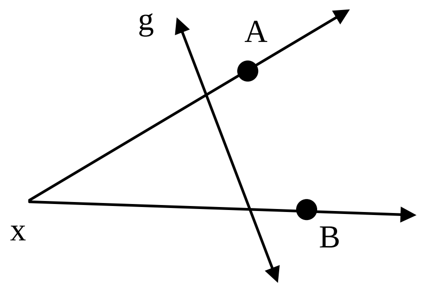
Teorema 2.5 (Rawuh, 2009)

Dua titik yang berbeda terletak pada sisi garis g yang sama jika dan hanya jika,

1. Kedua titik itu sebidang dengan g.
2. Tidak terletak pada g.
3. Ruas garis yang menghubungkan kedua titik itu tidak memotong g.

Bukti:

Misalkan A dan B dua titik yang berbeda dan terletak pada sisi g yang sama. Jadi ada setengah bidang g/X.

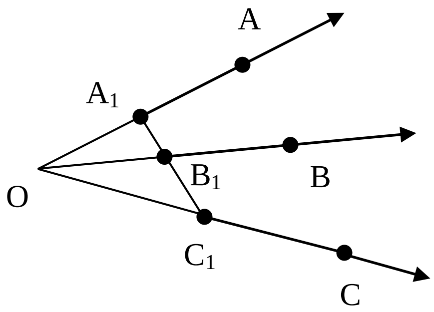


Gambar 2.4. Titik A dan B yang berbeda dan terletak pada sisi g

Sehingga $A \in g/X$ dan $B \in g/X$. Jadi $\overline{XA}$ memotong g dan $\overline{XB}$ memotong g. Oleh karena $g/X \subset gX$ maka A, B, X dan g terletak pada bidang gX. Berhubung A, B, X tidak pada g sehingga dapat digunakan Aksioma Pash. Maka $\overline{AB}$ tidak memotong g. Sebaliknya, misalkan A, B, g sebidang dan A, $B \notin g$, sedangkan $\overline{AB}$ tidak memotong g. Oleh karena $g/A \subset gA$ maka X, *A*, *B*, *g* terletak pada bidang *gA*. Berhubung *A*, *B*, *X* tidak pada *g* sehingga dapat menggunakan Aksioma Pash. Jadi $\overline{XB}$ memotong *g*. Ini berarti bahwa $B \in g/X$ dan $A \in g/X$. Jadi menurut ketentuan, titik *A* dan titik *B* terletak pada sisi *g* yang sama.

2.2.3 Urutan sinar dan sudut

a. Kedudukan antar Sinar



Gambar 2.5. Kedudukan antar sinar

Definisi 2.5 (Rawuh, 2009)

Misalkan $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, dan $\overline{OC}$ tiga sinar yang berpangkalan sama di titik *O*. Misalkan pula $\overline{OA}$ dan $\overline{OC}$ berlainan dan tidak berlawanan. Jika ada titik A_1, B_1, C_1 sehingga $A_1 \in \overline{OA}$, $B_1 \in \overline{OB}$, $C_1 \in \overline{OC}$ dan (A_1, B_1, C_1) maka dikatakan bahwa sinar $\overline{OB}$ terletak antara $\overline{OA}$ dan $\overline{OC}$, ditulis $(\overline{OA}\ \ \overline{OB}\ \overline{OC})$.

Persyaratan bahwa $\overline{OA}$ dan $\overline{OC}$ harus berlainan dan tidak berlawanan arah, adalah untuk menjamin sinar-sinar dalam suatu relasi antara supaya sinar-sinar itu berlainan. Pernyataan tersebut dapat pula dinyatakan dalam bentuk yang setara, yaitu:

1. O, A, C berlainan dan tak kolinear
2. $O \notin AC$
3. $\overline{OA}$ dan $\overline{OC}$ tak kolinear.

Teorema 2.6 (Rawuh, 2009)

Jika ($\overline{OA}$ $\overline{OB}$ $\overline{OC}$) Maka ($\overline{OC}$ $\overline{OB}$ $\overline{OA}$).

Teorema 2.7 (Rawuh, 2009)

Jika ($\overline{OA}$ $\overline{OB}$ $\overline{OC}$), maka tiap pasang sinar dalam ganda $\overline{OA}$, $\overline{OB}$,$\overline{OC}$ berlainan dan tidak berlawanan.

Bukti:

Karena ($\overline{OA}$ $\overline{OB}$ $\overline{OC}$), maka ada titik $A_1 \in \overline{OA}$, $B_1 \in \overline{OB}$, $C_1 \in \overline{OC}$ sehingga (A_1, B_1, C_1). Jadi $\overline{OA_1} = \overline{OA}$, $\overline{OB}_1 = \overline{OB}$, $\overline{OC}_1 = \overline{OC}$. Karena $\overline{OA}$ dan $\overline{OC}$ berlainan dan tidak berlawanan arah, maka $\overline{OA_1}$ dan $\overline{OC}_1$ berlainan dan tidak berlawanan arah. Sehingga O $\notin A_1 C_1$. (A_1, B_1, C_1) mengakibatkan $A_1 B_1 = A_1 C_1$. Jadi O $\notin A_1 B_1$ ini berarti $\overline{OA_1}$ dan $\overline{OB}_1$ berlainan dan tidak berlawanan arah. Begitu pula $\overline{OA}$ dan $\overline{OB}$. Karena $\overline{OB}$ dan $\overline{OC}$ sama halnya dengan $\overline{OA}$ dan $\overline{OB}$, sehingga $\overline{OB}$ dan $\overline{OC}$ juga berlainan dan tidak berlawanan arah.

Teorema 2.8 (Rawuh, 2009)

Jika ($\overline{OA}$ $\overline{OB}$ $\overline{OC}$), maka berlaku

1. A, B terletak pada sisi OC yang sama.

2. B, C terletak pada sisi OA yang sama.
3. A, C terletak pada sisi OB yang berhadapan.

Bukti:

1. Karena ($\overline{OA}$ $\overline{OB}$ $\overline{OC}$) maka ada $A_1 \in \overline{OA}$, $B_1 \in \overline{OB}$, $C_1 \in \overline{OC}$ sehingga (A_1, B_1, C_1). Karena $\overline{OA}$ dan $\overline{OC}$ berlainan dan tidak berlawanan arah, sehingga O, A_1, C tidak segaris dan $A \notin OC$. Oleh karena $A_1 \in \overline{OA}$, berarti bahwa A_1 dan A terletak pada sisi OC yang sama. Begitu pula, B_1 dan B terletak pada sisi OC yang sama. Oleh karena $B_1 \notin \overline{A_1C_1}$ maka A_1 dan B_1 terletak pasa sisi OC yang sama. Jadi A dan B terletak pasa sisi OC yang sama.
2. Karena ($\overline{OA}$ $\overline{OB}$ $\overline{OC}$) maka ada $A_1 \in \overline{OA}$, $B_1 \in \overline{OB}$, $C_1 \in \overline{OC}$ sehingga (A_1, B_1, C_1). Karena $\overline{OB}$ dan $\overline{OA}$ berlainan dan tidak berlawanan arah, sehingga O, B_1, A tidak segaris dan $B \notin OA$. Oleh karena $B_1 \in \overline{OB}$, berarti bahwa B_1 dan B terletak pada sisi OA yang sama. Begitu pula, C_1 dan C terletak pada sisi OA yang sama. Oleh karena $C_1 \notin \overline{B_1A_1}$ maka B_1 dan C_1 terletak pasa sisi OA yang sama. Jadi B dan C terletak pasa sisi OA yang sama.
3. Karena ($\overline{OA}$ $\overline{OB}$ $\overline{OC}$) maka ada $A_1 \in \overline{OA}$, $B_1 \in \overline{OB}$, $C_1 \in \overline{OC}$ sehingga (A_1, B_1, C_1). Karena $A_1 \in \overline{OA}$ ini berarti bahwa A_1 dan A terletak pada sisi OB yang sama. Begitu pula, karena $C_1 \in \overline{OC}$ ini berarti bahwa C_1 dan C terletak pada sisi OB yang sama. Oleh karena A_1, C_1 memotong OB di B_1, maka A_1 dan C_1 terletak pada sisi OB yang berhadapan. Sehingga menyebabkan A dan C terletak pada sisi OB yang berhadapan.

Teorema 2.9 (Rawuh, 2009)

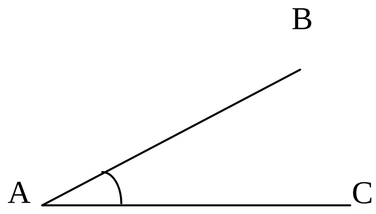
Jika $(\overline{OA}\ \ \overline{OB}\ \overline{OC})$ maka berlaku ~ $(\overline{OB}\ \ \overline{OC}\ \overline{OA})$.

Bukti:

Karena $(\overline{OA}\ \ \overline{OB}\ \overline{OC})$ maka ada $A_1 \in \overline{OA}$, $B_1 \in \overline{OB}$, $C_1 \in \overline{OC}$ sehingga (A_1, B_1, C_1). Misalkan $(\overline{OB}\ \ \overline{OC}\ \overline{OA})$ dan $B_1 \in \overline{OB}$, $A_1 \in \overline{OA}$, maka $\overline{B_1A_1}$ memotong $\overline{OC}$ di sebuah titik, yaitu C_1. Jadi $C_1 \notin \overline{B_1A_1}$ sehingga (B_1, C_1, A_1). Akan tetapi (A_1, B_1, C_1) mengakibatkan ~ (B_1, C_1, A_1). Jadi pengandaian bahwa berlaku $(\overline{OB}\ \overline{OC}\ \overline{OA})$ tidak benar, sehingga berlakulah hubungan ~ $(\overline{OB}\ \ \overline{OC}\ \overline{OA})$.

b. Sudut (Schaum's, 2005)

Sudut adalah suatu gambar yang terbentuk oleh dua sinar yang mempunyai titik akhir yang sama. Sinar-sinar tersebut merupakan sisi-sisi sudut, sementara titik akhirnya merupakan titik sudutnya. Simbol untuk sudut adalah $\angle$ atau $\measuredangle$.



Gambar 2.6. Sudut

Pengertian sudut menyangkut berbagai konsep, yaitu:

1. Sebuah gambar yang terdiri atas dua garis.
2. Daerah pada bidang yang dibatasi oleh dua garis yang berpotongan.

3. Sebuah ukuran yang dinyatakan dengan bilangan real yang menggambarkan selisih arah dua garis yang berpotongan.

Definisi 2.6 (Rawuh, 2009)

Misalkan ada tiga titik *O*, *A*, *B* yang berlainan dan tidak segaris himpunan titik $\overline{OA} \cup \overline{OB} \cup \{O\}$ disebut sudut dan ditulis sebagai $\angle AOB$.

Jadi $\angle AOB = \overline{OA} \cup \overline{OB} \cup \{O\}$. Sinar $\overline{OA}$ dan $\overline{OB}$ dinamakan sisi sudut dan *O* dinamakan titik sudut.

Definisi 2.7(Rawuh, 2009)

Daerah dalam sebuah $\angle AOB$, yang dilambangkan dengan $D(\angle AOB)$ adalah himpunan titik *X* sehingga $\overline{OX}$ antara $\overline{OA}$ dan $\overline{OB}$ atau dengan kata lain $D(\angle AOB) = \left\{X \middle| (\overline{OA}\ \overline{OX}\ \overline{OB})\right\}$.

Daerah luar $\angle AOB$, adalah himpunan titik *X* yang tidak dalam daerah dalam maupun pada sudut tersebut. Daerah luar $\angle AOB$ ditulis sebagai $L(\angle AOB)$.

Definisi 2.8 (Rawuh, 2009)

Dua buah sudut yang bertitik ujung sama membentuk sepasang sudut yang bertolak belakang apabila kedua kaki sudut yang satu berlawanan arah dengan kedua kaki sudut yang lain.

Definisi 2.9 (Rawuh, 2009)

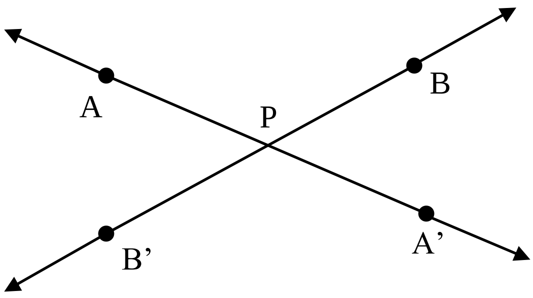
Dua garis *l* dan *m* dikatakan membentuk sebuah sudut, apabila titik sudutnya berimpit dengan titik potong kedua garis itu dan apabila kedua kakinya termuat dalam dua garis tersebut.

Teorema 2.10 (Rawuh, 2009)

Dua garis yang berpotongan membentuk tepat empat buah sudut.

Bukti:

Misalkan l dan m berpotongan di P dan $l \neq m$. Diambil A, $A' \in l$, sehingga (APA') dan B, $B' \in m$ sehingga (BPB') maka A, P, B tidak segaris



Gambar 2.7. Perpotongan dua garis yang membentuk empat sudut

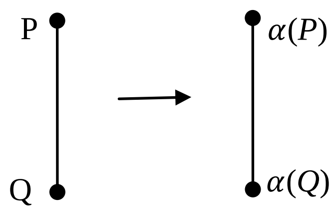
Jadi $\overline{PA}$ dan $\overline{PB}$ berlainan dan tidak berlawanan arah. Jadi ada $\angle APB$ yang dibentuk oleh l dan m. Begitu pula ada sudut $\angle APB'$, $\angle A'PB$, $\angle A'PB'$.

2.3 Isometri

Definisi 2.10 (Jennings, 1997)

Fungsi α : $E^n \longrightarrow E^n$ adalah isometri, jika untuk semua titik P dan Q berada di E^n.

$$\alpha(P)\,\alpha(Q) = PQ$$



Gambar 2.8. Isometri

Definisi 2.11 (Rawuh, 2009)

Transformasi α dinamakan suatu isometri apabila $\alpha(P)$ = P', $\alpha(Q)$ = Q' sehingga jarak $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$ untuk setiap pasang titik P dan Q.

Jadi, suatu isometri adalah suatu transformasi titik yang mempertahankan jarak antara tiap pasang titik.

Teorema 2.11 (Rawuh, 2009)

Jika α dan β adalah isometri-isometri sehingga $\alpha(P) = \beta\ (P)$, $\alpha(Q) = \beta\ (Q)$, dan $\alpha(R) = \beta\ (R)$ untuk tiga titik yang tidak kolinear maka $\alpha = \beta$.

Bukti:

Diketahui bahwa α dan β adalah isometri-isometri yang untuk tiga titik yang tidak kolinear menghasilkan $\alpha(P) = \beta\ (P)$, $\alpha(Q) = \beta\ (Q)$, dan $\alpha(R) = \beta\ (R)$.

Jika tiap persamaan tersebut, di sebelah kiri dikalikan dengan α^{-1} maka α^{-1} mempertahankan ketiga titik tersebut sehingga $\alpha^{-1}\beta$ adalah suatu identitas. Jadi, $\alpha^{-1}\beta = I$, yang mengakibatkan bahwa $\alpha = \beta$.