ESTIMASI PARAMETER DISTRIBUSI LOGNORMAL MENGGUNAKAN METODE BAYES DENGAN *PRIOR* NON-INFORMATIF DAN *PRIOR* KONJUGAT

(Skripsi)

Oleh

HILDA VENELIA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2020

ABSTRACT

PARAMETER ESTIMATION OF LOGNORMAL DISTRIBUTION USING BAYESIAN METHOD WITH NON-INFORMATIVE PRIOR AND CONJUGATE PRIOR

by

Hilda Venelia

Lognormal distribution is one of continuous distributions which has two parameters, namely μ dan σ^2. In this research, we conducted an estimation of parameter σ^2 of lognormal distribution using Bayesian method which is done by combining the sample distribution and prior distribution to obtain the posterior distribution. Here we used two kinds of priors, namely non-informative prior used is the Jeffrey's method and conjugate priors used is the inverse-gamma distribution.

The purpose of this research is to find the Bayesian estimate of parameter σ^2 of lognormal distribution using the two priors, also to see how the characteristics of both estimators analytically and empirically (by simulation study). Finally, the results are compared to know which prior is better for estimating the parameter σ^2 of lognormal distribution.

The estimator of parameter σ^2 using the non-informative prior is $\widehat{\sigma^2}_{NI} = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}(\ln {}^2 x_i) - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right)^2}{n}\right]$. While using the conjugate prior we obtained $\widehat{\sigma^2}_{K} = \frac{2\beta}{(2\alpha+n)} + \frac{1}{(2\alpha+n)}\left[\sum_{i=1}^{n}(\ln x - \mu)^2\right]$. The former is an unbiased estimator and the later is an asymptotically unbiased estimator, and both estimators are consistent estimators. Then, based on the value of MSE (by simulation study), both estimators are good estimator of σ^2 of lognormal distribution.

Key Words: *Lognormal Distribution, Bayesian Method, Non-Informative Prior, Conjugate Prior, Inverse-Gamma Distribution, Characteristics of Estimator.*

ABSTRAK

ESTIMASI PARAMETER DISTRIBUSI LOGNORMAL MENGGUNAKAN METODE BAYES DENGAN *PRIOR* NON-INFORMATIF DAN *PRIOR* KONJUGAT

oleh

Hilda Venelia

Distribusi lognormal merupakan salah satu distribusi kontinu yang memiliki dua parameter, yaitu μ dan σ^2. Pada penilitian ini, akan diduga parameter σ^2 dari distribusi lognormal menggunakan metode Bayes yang dilakukan dengan menggabungkan distribusi sampel dan distribusi *prior*, sehingga diperoleh distribusi posterior. Distribusi *prior* yang digunakan adalah *prior* non-informatif yang diperoleh dengan menggunakan metode Jeffrey's dan *prior* konjugat dengan distribusi invers-gamma.

Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui nilai dugaan dari parameter σ^2 distribusi lognormal menggunakan kedua *prior* tersebut. Kemudian, akan dilihat juga bagaimana sifat-sifat karakteristik penduga dari kedua *prior* tersebut baik secara analitik maupun empirik dalam studi simulasi. Setelah itu, akan dibandingkan *prior* mana yang lebih baik digunakan untuk menduga parameter σ^2 dari distribusi lognormal berdasarkan nilai MSE-nya.

Estimasi titik dari parameter σ^2 untuk *prior* non-informatif, yaitu $\widehat{\sigma^2}_{NI} = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}(\ln{}^2 x_i) - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right)^2}{n}\right]$. Sedangkan untuk *prior* konjugat diperoleh estimasi titik dari parameter σ^2 adalah $\widehat{\sigma^2}_K = \frac{2\beta}{(2\alpha+n)} + \frac{1}{(2\alpha+n)}\left[\sum_{i=1}^{n}(\ln x - \mu)^2\right]$. Penduga $\widehat{\sigma^2}_{NI}$ dan $\widehat{\sigma^2}_K$ secara berturut-turut merupakan penduga yang bersifat tak bias dan tak bias secara asimtotik serta kedua penduga merupakan penduga yang konsisten. Kemudian berdasarkan nilai MSE pada studi simulasi, kedua *prior* baik digunakan untuk menduga parameter σ^2 dari distribusi lognormal.

Kata Kunci: *Distribusi Lognormal, Metode Bayes, Prior Non-Informatif, Prior Konjugat, Distribusi Invers-Gamma, Karakteristik Penduga.*

ESTIMASI PARAMETER DISTRIBUSI LOGNORMAL MENGGUNAKAN METODE BAYES DENGAN ***PRIOR*** NON-INFORMATIF DAN ***PRIOR*** KONJUGAT

Oleh

HILDA VENELIA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat Untuk Mencapai Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2020

Judul Skripsi : **ESTIMASI PARAMETER DISTRIBUSI LOGNORMAL MENGGUNAKAN METODE BAYES DENGAN *PRIOR* NON-INFORMATIF DAN *PRIOR* KONJUGAT**

Nama Mahasiswa : Hilda Venelia

Nomor Pokok Mahasiswa : 1617031105

Program Studi : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Khoirin Nisa, S.Si., M.Si.
NIP 19740726 200003 2 001

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP 19740316 200501 1 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dr. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	: **Dr. Khoirin Nisa, S.Si., M.Si.** ....
Sekretaris	: **Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.** ....
Penguji Bukan Pembimbing	: **Widiarti, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
UNIVERSITAS LAMPUNG
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, M.T.
NIP 19740705 200003 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **03 April 2020**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: **Hilda Venelia**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1617031105**
Jurusan	: **Matematika**
Judul Skripsi	: **Estimasi Parameter Distribusi Lognormal Menggunakan Metode Bayes Dengan *Prior* Non-Informatif dan *Prior* Konjugat**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 03 April 2020

Yang Menyatakan,

Hilda Venelia

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Hilda Venelia lahir di Tanjung Karang pada 28 Maret 1999. Penulis merupakan anak pertama dari dua bersaudara pasangan Bapak Seven Aryadi dan Ibu Eliyawati.

Penulis menempuh pendidikan TK di TK Setia Kawan pada tahun 2003-2004. Kemudian melanjutkan sekolah dasar di SD Negeri 2 Sawah Brebes pada tahun 2004-2007. Kemudian pindah ke SD Negeri 1 Sawah Lama pada tahun 2007-2010. Kemudian melanjutkan pendidikan di SMP Negeri 23 Bandar Lampung pada tahun 2010-2013. Kemudian menempuh pendidikan SMA di SMA Negeri 12 Bandar Lampung pada tahun 2013-2016.

Penulis melanjutkan pendidikan di perguruan tinggi dan terdaftar sebagai mahasiswi S1 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung (Unila) melalui jalur Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN) pada tahun 2016. Kemudian pada tahun 2017, penulis terdaftar sebagai anggota Bidang Kaderisasi dan Kepemimpinan Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (Himatika).

Pada awal tahun 2019, penulis melakukan Kerja Praktik (KP) di PT Cipta Niaga Semesta (Mayora *Group*) Tanjung Karang Timur. Kemudian, sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat, pada pertengahan tahun 2019 penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) selama 40 hari di Pekon Batu Patah, Kecamatan Kelumbayan Barat, Kabupaten Tanggamus.

KATA INSPIRASI

"Boleh jadi kamu tidak menyenangi sesuatu, padahal itu baik bagimu, dan boleh jadi kamu menyenangi sesuatu, padahal itu tidak baik bagimu. Allah mengetahui sedang kamu tidak mengetahui."

(Q.S Al-Baqarah: 216)

"Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan."

(Q.S Al-Insyirah: 5)

"Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya."

(Q.S Al-Baqarah: 286)

"Bersemangatlah melakukan hal yang bermanfaat untukmu dan meminta tolonglah pada Allah, serta janganlah engkau malas."

(HR. Muslim)

"Sebaik-baik manusia adalah yang paling bermanfaat bagi manusia."

(HR. Ahmad, ath-Tharbani, ad-Daruqutni)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirobbil'alamin,

Puji dan syukur saya haturkan kepada Allah Subhanahu Wata'ala karena atas nikmat dan karunia-Nya, Shalawat serta salam selalu tercurah kepada baginda Nabi Muhammad Shallallahu 'Alaihi Wasallam yang telah memberikan kabar gembira kepada umat manusia.

Kupersembahkan karya yang sederhana ini untuk:

Ayah dan Ibu

Tidak ada kata yang dapat aku sampaikan untuk kalian kecuali terima kasih yang sebesar-besarnya atas semua yang telah kalian berikan kepadaku. Cinta, kasih sayang, waktu, pengorbanan, dan keringat yang belum bisa aku balas. Terima kasih selalu mendo'akan dan mendukung setiap langkah yang aku pilih. Karena ridho Allah berawal dari ridho kalian.

Adikku

Do'akan agar bisa menjadi sosok kakak yang lebih baik lagi.

Sahabat-sahabatku

Terima kasih atas semua dukungan, kebahagiaan, canda dan tawa
yang telah kita lalui di bangku kuliah ini.

SANWACANA

Puji syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul "Estimasi Parameter Distribusi Lognormal Menggunakan Metode Bayes dengan *Prior* Non-Informatif dan *Prior* Konjugat".

Dalam menyelesaikan skripsi ini, penulis menyadari bahwa adanya bimbingan, dukungan, dan do'a dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis menyampaikan terima kasih kepada :

1. Ibu Dr. Khoirin Nisa, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing I yang selalu bersedia memberikan arahan, bimbingan, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing II sekaligus Pembimbing Akademik yang telah memberikan arahan dan dukungan kepada penulis.
3. Ibu Widiarti, S.Si., M.Si. selaku Penguji yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis sehingga dapat lebih baik lagi.
4. Ibu Prof. Dr. Wamiliana, M.A., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Univeristas Lampung.

5. Bapak Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, M.T. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Orang tua dan adik tercinta serta seluruh keluarga besar yang selalu memotivasi dan mendukung penulis dalam memberikan yang terbaik, selalu mendo'akan untuk kesuksesan penulis.
8. Edwin Saputra yang selalu membantu dan memberikan dukungan kepada penulis.
9. Sahabat-sahabat Aulia, Caca, Dhea, Erisa, Gesang, Melani, Mine, Nabila, Patricia, Puhek, Putri, dan Sari yang telah memberikan dukungan dan kenangan indah kepada penulis.
10. Sahabat-sahabat SMP dan SMA Afina, Dinda, Dhila, Iga, Maura, Syalsa, Cinu, Helen, dan Yunita yang telah memberikan dukungan kepada penulis.
11. Teman-teman satu bimbingan yang telah memberikan semangat dan saran kepada penulis.
12. HIMATIKA yang telah memberikan pengalaman berharga dalam organisasi.
13. PT Cipta Niaga Semesta yang telah memberikan ilmu dan pengalaman kerja kepada penulis.
14. Teman-teman KKN dan masyarakat Pekon Batu Patah yang telah memberikan pengalaman baik kepada penulis.
15. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2016.
16. Almamater tercinta Universitas Lampung.

Semoga skripsi ini dapat memberikan banyak manfaat bagi kita semua. Penulis juga menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 03 April 2020

Penulis,

Hilda Venelia

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

Tabel **Halaman**

DAFTAR GAMBAR

Gambar **Halaman**

I. PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang dan Masalah

Statistika adalah suatu ilmu yang berisi sejumlah aturan dan prosedur untuk mengumpulkan, menyajikan, menganalisa, serta menginterpretasikan data. Dalam metode statistika dibagi menjadi dua, yaitu statistika deskriptif dan statistika inferensi. Statistika inferensi dapat dikelompokkan ke dalam dua bidang utama, yaitu pendugaan parameter dan pengujian hipotesis. Dalam memperoleh suatu kesimpulan dengan statistika inferensi terdapat berbagai keterbatasan dan kendala yang dimiliki dalam mengamati keseluruhan komponen populasi. Untuk mengatasi kendala-kendala tersebut dapat digunakan alternatif lain, yaitu dengan menduga parameter dari populasi yang tidak diketahui menggunakan statistik sampel.

Salah satu teknik pengambilan sampel adalah pengambilan secara acak, yang artinya setiap anggota dari populasi memiliki kesempatan dan peluang yang sama untuk dipilih sebagai sampel. Hal tersebut menunjukkan bahwa populasinya juga akan membentuk suatu distribusi peluang tertentu. Distribusi peluang adalah sebaran kemungkinan terjadinya peubah acak tertentu dimana terdapat peubah diskrit dan peubah kontinu. Salah satu distribusi peluang dengan peubah kontinu adalah distribusi lognormal. Distribusi lognormal bergantung pada dua parameter, yaitu μ dan σ^2 masing-masingnya sebagai nilai tengah dan ragam.

Karakteristik dari suatu distribusi dapat diketahui melalui parameter dari distribusi. Akan tetapi, nilai dari parameter umumnya tidak diketahui sehingga perlu dilakukan estimasi terhadap parameter tersebut. Estimasi dibagi menjadi dua bagian, yaitu estimasi titik dan estimasi selang. Pada teori estimasi titik dapat dilakukan dengan dua metode, yaitu metode klasik dan metode Bayes. Metode klasik melakukan pendugaan parameter hanya berdasarkan informasi yang diperoleh dari data sampel yang diambil dari populasi. Sedangkan metode Bayes memandang parameter sebagai peubah yang menggambarkan pengetahuan awal tentang parameter sebelum pengamatan dilakukan dan dinyatakan dalam suatu distribusi yang disebut dengan distribusi *prior* (Bolstad, 2007). Informasi yang diperoleh mengenai fungsi kepekatan peluang dari data sampel disebut fungsi *likelihood*. Dengan menggabungkan informasi dari distribusi *prior* dan informasi dari data sampel maka didapatkan distribusi posterior yang selanjutnya menjadi dasar untuk estimasi di dalam metode Bayes.

Distribusi *prior* dapat diperoleh berdasarkan diketahui atau tidaknya informasi mengenai parameter atau berdasarkan pola model *likelihood* datanya. Apabila informasi mengenai parameter tidak tersedia, maka dapat digunakan *prior* non-informatif yang tidak memberi pengaruh secara signifikan terhadap distribusi posteriornya sehingga informasi yang diperoleh dari data amatan bersifat lebih objektif. Sedangkan apabila distribusi *prior* ingin mengikuti pola model *likelihood*nya maka dapat digunakan *prior* konjugat, dimana distribusi *prior* konjugat mengacu pada acuan analisis model terutama dalam pembentukan fungsi *likelihood*nya, sehingga dalam penentuan *prior* konjugat selalu dipikirkan mengenai penentuan pola distribusi *prior* yang mempunyai bentuk konjugat dengan fungsi kepadatan peluang pembangun *likelihood*nya (Box and Tiao, 1973).

Diana dan Soehardjoepri (2016) telah membahas tentang pendugaan parameter distribusi lognormal menggunakan metode Bayes dengan *prior* non-informatif. Kemudian Yani, *et al.* (2018) juga membahas mengenai inferensi Bayesian untuk σ^2 dari distribusi normal dengan berbagai distribusi *prior*. Berdasarkan penelitian-penelitian tersebut akan dibandingkan antara *prior* non-informatif dengan *prior* konjugat dalam mengestimasi nilai parameter σ^2 dari suatu populasi yang berdistribusi lognormal menggunakan metode Bayes.

1.2. Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini adalah:

1. Mendapatkan nilai estimasi titik dari parameter σ^2 pada distribusi lognormal dengan metode Bayes menggunakan *prior* non-informatif.
2. Mendapatkan nilai estimasi titik dari parameter σ^2 pada distribusi lognormal dengan metode Bayes menggunakan distribusi invers gamma sebagai *prior* konjugatnya.
3. Mengkaji karakteristik sifat-sifat seperti sifat ketakbiasan, efisien dan kekonsistenan dari penduga Bayes dengan *prior* non-informatif dan *prior* konjugat pada pendugaan parameter σ^2 distribusi lognormal.

4. Membandingkan *prior* mana yang lebih baik untuk menduga parameter σ^2 dari distribusi lognormal berdasarkan nilai MSE dari masing-masing penduga dengan dilakukannya simulasi.

1.3. Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah memberikan referensi baru mengenai estimasi parameter dari distribusi lognormal dengan metode Bayes.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Peubah Acak

Peubah acak atau variabel acak merupakan hasil-hasil prosedur sampel acak *(random sampling)* atau eksperimen acak dari suatu data yang telah dianalisis secara statistik. Peubah acak dinyatakan dalam huruf besar, misal X, sedangkan nilai dari peubah acak dinyatakan dengan huruf kecil padanannya, misal x.

Definisi 2.1 (Peubah Acak)

Pandang sebuah percobaan acak dengan ruang sampel C. Peubah acak adalah sebuah fungsi X yang memetakan setiap elemen $c \in C$ dengan satu dan hanya satu bilangan $X(c) = x$. Anggota dari X adalah himpunan bilangan real $\mathcal{D} = \{x: x = X(c), c \in C\}$ (Hogg, *et al*., 2012).

Peubah acak diskrit adalah peubah acak yang memiliki nilai yang dapat dicacah *(countable)*. Sedangkan peubah acak kontinu adalah peubah acak yang memiliki nilai tak terhingga banyaknya sepanjang sebuah interval yang tidak terputus. Peubah acak kontinu biasanya diperoleh dari hasil pengukuran (Harinaldi, 2005).

2.2 Fungsi Kepadatan Peluang

Definisi 2.2 (Fungsi Kepadatan Peluang)

Fungsi $f(x)$ adalah fungsi kepadatan peluang peubah acak kontinu X, yang didefinisikan di atas himpunan semua bilangan real R, bila memenuhi:

1. $f(x) \geq 0$ untuk semua $x \in R$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
3. $P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$

(Walpole & Myers, 1995).

Definisi 2.3 (Distribusi Kumulatif)

Distribusi kumulatif $F(x)$ suatu peubah acak kontinu X dengan fungsi kepadatan peluang $f(x)$ diberikan oleh

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx \quad ; \, -\infty < x < \infty$$

(Walpole & Myers, 1995).

2.2.1 Fungsi Kepadatan Peluang Bersama

Definisi 2.4 (Fungsi Kepadatan Peluang Bersama)

Sebuah k-dimensi nilai vektor peubah acak $X = (X_1, X_2, \dots, X_k)$ dengan fungsi kepadatan peluang bersama $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$, maka fungsi kepadatan kumulatifnya dapat ditulis

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_k} f(t_1, t_2, \dots, t_k)\; dt_1 dt_2 \dots dt_k \tag{2.1}$$

untuk semua nilai $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ (Bain & Engelhardt, 1992).

2.2.2 Fungsi Kepadatan Peluang Marginal

Definisi 2.5 (Fungsi Kepadatan Peluang Marginal)

Jika X dan Y peubah acak kontinu dan $f(x,y)$ adalah fungsi kepadatan peluang bersama di (x,y), maka

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \qquad untuk - \infty < x < \infty$$

disebut fungsi kepadatan peluang marginal dari X. Demikian juga

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx \qquad untuk - \infty < y < \infty$$

disebut fungsi kepadatan peluang marginal dari Y (Miller & Miller, 1999).

2.3 Distribusi Bersyarat

Definisi 2.6 (Distribusi Bersyarat)

Jika $f(x,y)$ adalah fungsi kepadatan peluang bersama dari peubah acak kontinu X dan Y di (x,y), dan $h(y)$ adalah fungsi kepadatan peluang marginal Y di y, maka

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)} \qquad h(y) \neq 0$$

untuk $-\infty < x < \infty$, disebut fungsi kepadatan peluang bersyarat dari X dengan $Y = y$. Demikian juga jika $g(x)$ adalah fungsi kepadatan peluang marginal X di x, maka diberikan fungsi

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{g(x)} \qquad g(x) \neq 0$$

untuk $-\infty < y < \infty$, disebut fungsi kepadatan peluang bersyarat dari Y dengan $X = x$ (Miller & Miller, 1999).

2.4 Nilai Harapan dan Variansi

2.4.1 Nilai Harapan

Definisi 2.7 (Nilai Harapan)

Misal X adalah peubah acak dengan distribusi peluang $f(x)$. Maka nilai harapan untuk X adalah

$$E(X) = \sum_{x} x\, p(x) \tag{2.2}$$

jika X adalah diskrit, dan

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx \tag{2.3}$$

jika X adalah kontinu (Walpole, *et al*., 2007).

Teorema 2.8

Jika a dan b merupakan suatu konstanta, maka

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

(Miller & Miller, 1999).

Bukti:

Berdasarkan Definisi 2.7, maka nilai harapan

$$\begin{aligned} E(aX + b) &= \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b) f(x)\; dx \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx + b \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx \\ &= a\, E(X) + b\, .1 \\ &= aE(X) + b \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $E(aX + b) = aE(X) + b$, sehingga

1. Bila $a = 0$ maka $E(b) = b$
2. Bila $b = 0$ maka $E(aX) = aE(X)$.

2.4.2 Variansi

Definisi 2.9 (Variansi)

Suatu peubah acak kontinu X dengan fungsi kepadatan peluang $f(x)$, maka variansi dari X yang dinotasikan dengan σ^2 adalah

$$\sigma^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - \mu^2$$

dimana standar deviasi X adalah $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ (Montgomery & Runger, 2014).

Teorema 2.10

Variansi peubah acak X adalah

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 \tag{2.4}$$

(Walpole & Myers, 1995).

Bukti:

Berdasarkan Definisi 2.9, maka

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2\mu x + \mu^2) f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx - \int_{-\infty}^{\infty} 2\mu x\, f(x)\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} \mu^2 f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx - 2\mu \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx + \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx - 2\mu^2 + \mu^2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx - \mu^2$$

$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$.

2.5 Transformasi Peubah

Teorema 2.11

Misalkan X suatu peubah acak kontinu dengan distribusi peluang $f(x)$. Misalkan $Y = u(X)$ menyatakan hubungan (korespondensi) satu-satu antara nilai X dan Y sehingga persamaan $y = u(x)$ mempunyai jawaban tunggal untuk x dalam y misalnya $x = w(y)$. Maka distribusi peluang Y adalah

$$g(y) = f[w(y)]|J| \qquad (2.5)$$

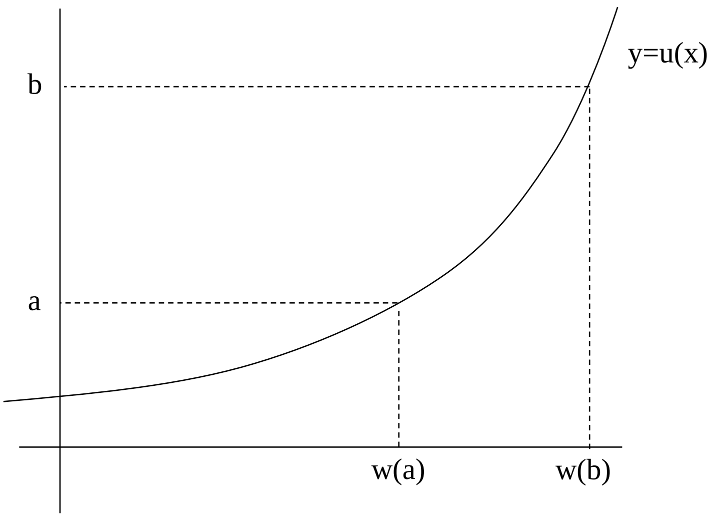
dengan $J = w'(y)$ dan disebut Jacobi transformasi (Walpole & Myers, 1995).

Bukti:

Misalkan $y = u(x)$ fungsi naik seperti pada Gambar 1. Terlihat bahwa jika y bernilai antara a dan b maka peubah acak X akan bernilai antara $w(a)$ dan $w(b)$. Jadi

$$P(a < Y < b) = P[w(a) < X < w(b)]$$

$$= \int_{w(a)}^{w(b)} f(x)\, dx.$$



Gambar 1. Fungsi Naik

Bila peubah integrasi diganti dari x ke y melalui hubungan $x = w(y)$ maka diperoleh $dx = w'(y)dy$, sehingga

$$P(a < Y < b) = \int_{a}^{b} f[w(y)]w'(y)dy.$$

Karena integral memberikan nilai peluang yang dicari untuk setiap $a < b$ dalam batas nilai y yang mungkin, maka distribusi peluang Y adalah

$$g(y) = f[w(y)]w'(y) = f[w(y)]\, J.$$

Karena $J = w'(y)$ adalah kebalikan dari kecondongan (koefisien arah) garis singgung pada kurva $y = u(x)$ yang naik, maka jelas bahwa $J = |J|$. Sehingga

$$g(y) = f[w(y)]\, |J|.$$

Sekarang misalkan bahwa $y = u(x)$ fungsi turun seperti pada Gambar 2. Maka dapat ditulis

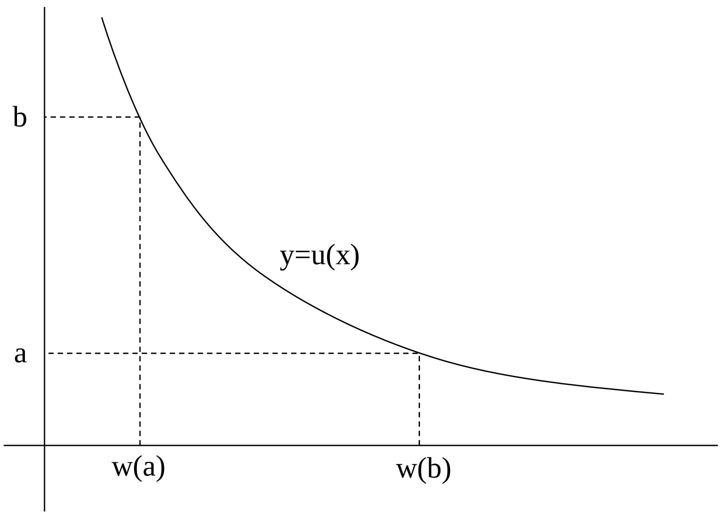
$$P(a < Y < b) = P[w(a) < X < w(b)]$$

$$= \int_{w(a)}^{w(b)} f(x)\, dx.$$

Kemudian ganti peubah integrasi menjadi y, maka diperoleh

$$P(a < Y < b) = \int_{a}^{b} f[w(y)]w'(y)dy$$

$$= -\int_{a}^{b} f[w(y)]w'(y)dy,$$



Gambar 2. Fungsi Turun

sehingga dapat disimpulkan bahwa

$$g(y) = -f[w(y)]w'(y) = -f[w(y)]\, J.$$

Dalam hal ini kecondongan negatif dan $J = -|J|$. Jadi

$$g(y) = f[w(y)]\, |J|,$$

seperti sebelumnya.

2.6 Distribusi Normal

Definisi 2.12 (Distribusi Normal)

Sebuah peubah acak X memiliki distribusi normal jika diberikan fungsi kepadatan peluangnya sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \ ; -\infty < x < \infty \tag{2.6}$$

parameter μ dan σ^2 adalah rataan dan variansi dari X. Dapat dinyatakan bahwa X mempunyai distribusi $N(\mu, \sigma^2)$ (Hogg, *et al*., 2012).

Menurut Walck (2000), jika $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ maka rataan dan variansinya adalah

$$E(X) = \mu \tag{2.7}$$

dan

$$Var(X) = \sigma^2. \tag{2.8}$$

Bukti Persamaan (2.7)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx$$

misal:

$$y = \frac{x-\mu}{\sigma} \rightarrow x = y\sigma + \mu$$

$$dx = \sigma\, dy$$

dengan batas

$$x = -\infty \rightarrow y = -\infty$$

$x = \infty \rightarrow y = \infty$

sehingga diperoleh

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (y\sigma + \mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{y^2}{2}\right] \sigma\, dy$$

$$= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{y^2}{2}\right] dy + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y \exp\left[-\frac{y^2}{2}\right] dy$$

$$= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{y^2}{2}\right] dy + 0$$

$$= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi}$$

$$= \mu.$$

Bukti Persamaan (2.8)

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx$$

misal:

$$y = \frac{x-\mu}{\sigma} \rightarrow x = y\sigma + \mu$$

$$dx = \sigma\, dy$$

dengan batas

$x = -\infty \rightarrow y = -\infty$

$x = \infty \rightarrow y = \infty$

sehingga diperoleh

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (y\sigma + \mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{y^2}{2}\right] \sigma\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma^2 y^2 + 2\mu\sigma y + \mu^2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{y^2}{2}\right] \sigma\, dy$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \exp\left[-\frac{y^2}{2}\right] dy + \frac{2\mu\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y \exp\left[-\frac{y^2}{2}\right] dy + \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{y^2}{2}\right] dy$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} + 0 + \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi}$$

$$= \sigma^2 + \mu^2.$$

Sehingga

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2$$

$$= \sigma^2.$$

2.7 Distribusi Lognormal

Definisi 2.13 (Distribusi Lognormal)

Misalkan sebuah peubah acak X bilangan real positif $(0 < x < \infty)$ sedemikian sehingga $Y = \ln X$ merupakan distribusi normal dengan rataan μ dan ragam σ^2. Maka $X = e^Y$ merupakan distribusi lognormal atau dapat ditulis dengan $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ dan $Y \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ (Aitchison & Brown, 1963).

Berdasarkan Definisi 2.13, jika X adalah peubah acak berdistribusi normal, dinotasikan dengan $X\sim\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ maka fungsi kepadatannya dapat dinyatakan seperti Persaman (2.6).

Dengan mengunakan transformasi $Y = g(X) = e^X$ maka $y = e^x \rightarrow x = \ln y = g^{-1}(y)$.

$$\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right| = \left|\frac{d}{dy}\ln y\right| = \frac{1}{y}$$

sehingga diperoleh

$$f_Y(y) = f_X[g^{-1}(y)]\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln y-\mu}{\sigma}\right)^2\right]\frac{1}{y}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi y^2\sigma^2}}exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln y-\mu}{\sigma}\right)^2\right].$$

Jika $x = y$, maka distribusi yang terbentuk adalah distribusi lognormal dengan fungsi kepadatan peluang sebagai berikut.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi x^2\sigma^2}}exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] & ; x > 0 \\ 0 & ;\ x \le 0 \end{cases} \qquad (2.9)$$

Bukti:

$$\int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi x^2\sigma^2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]dx$$

misal:

$$y = \left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right) \rightarrow \ln x = y\sigma+\mu \rightarrow x = \exp\,(y\sigma+\mu)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sigma} \rightarrow dx = x\sigma\, dy$$

dengan batas

$x = 0 \rightarrow y = -\infty$

$x = \infty \rightarrow y = \infty$

sehingga diperoleh

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi x^2\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}y^2\right] x\sigma\, dy \;= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}y^2\right] dy.$$

Untuk menyelesaikan integral di atas, selesaikan dahulu $\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}y^2\right] dy.$ Dan dapat dilihat bahwa fungsi tersebut mendekati suatu distribusi, yaitu distribusi normal baku.

$Y \sim N(0,1)$

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}y^2\right]$$

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}y^2\right] dy$$

$$\sqrt{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}y^2\right] dy$$

dengan demikian diperoleh

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}y^2\right] dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = 1.$$

2.7.1 Fungsi Distribusi Kumulatif Distribusi Lognormal

Menurut Walck (2000), fungsi distribusi kumulatif dari distribusi lognormal adalah

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} P\left(\frac{1}{2}, \frac{z^2}{2}\right)$$

dimana $z = \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)$ dengan tanda positif untuk $z \geq 0$ dan tanda negatif untuk $z < 0$.

Bukti:

$$F(x) = \int_0^x f(x)\, dx$$

$$= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi x^2 \sigma^2}} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2\right] dx$$

misal:

$$y = \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right) \rightarrow \ln x = y\sigma + \mu \rightarrow x = \exp\,(y\sigma + \mu)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sigma} \rightarrow dx = x\sigma\, dy$$

dengan batas

$$x = y \rightarrow y = \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)$$

$$x = 0 \rightarrow y = -\infty$$

sehingga diperoleh

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\frac{\ln x - \mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi x^2 \sigma^2}} exp\left[-\frac{1}{2} y^2\right] x\sigma\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{\ln x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}y^2\right] dy$$

misal:

$$z = \frac{y^2}{2} \rightarrow y = \sqrt{2z}$$

$$\frac{dz}{dy} = y \rightarrow dy = \frac{1}{y} dz$$

dengan batas

$$y = \frac{\ln x - \mu}{\sigma} \rightarrow z = \frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$y = -\infty \rightarrow z = \infty$$

sehingga diperoleh

$$F(x) \ = \int_{-\infty}^{\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-z) \frac{1}{\sqrt{2z}} dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{2\sqrt{z\pi}} \exp(-z)\, dz$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{\exp\,(-z) z^{-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\pi}} dz \ + \int_{0}^{\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{\exp(-z)\, z^{-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\pi}} dz$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} \exp(-z)\, z^{-\frac{1}{2}}\, dz + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \exp(-z)\, z^{-\frac{1}{2}}\, dz$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

dimana $\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ merupakan fungsi gamma tak lengkap batas bawah yang didefinisikan dengan

$$\gamma(a,x) = \int_0^x \exp(-t)\, t^{(a-1)}\, dt$$

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Untuk menyelesaikan $\frac{\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$ dapat menggunakan fungsi gamma yang diatur sebagai berikut

$$P(s,x) = \frac{\gamma(s,x)}{\Gamma(s)}$$

dimana $P(s,x)$ adalah fungsi distribusi kumulatif untuk variabel acak gamma dengan parameter bentuk s dan parameter skala 1. Sehingga diperoleh

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P\left(\frac{1}{2},\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

2.7.2 Nilai Harapan Distribusi Lognormal

Menurut Walck (2000), nilai harapan dari distribusi lognormal dengan peubah acak X adalah

$$E(X) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right). \tag{2.10}$$

Bukti:

$$E(X) = \int_0^\infty x\, f(x)\, dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} x \; \frac{1}{\sqrt{2\pi x^2\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2\right] \; dx$$

misal:

$$y = \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right) \to \ln x = y\sigma + \mu \to x = \exp\,(y\sigma + \mu)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sigma} \to dx = x\sigma\; dy$$

dengan batas

$$x = 0 \to y = -\infty$$

$$x = \infty \to y = \infty$$

sehingga diperoleh

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) \exp(y\sigma + \mu) \; dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2 + \sigma y + \mu\right) \; dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2 + \sigma y + \mu + \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma^2}{2}\right) \; dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(y - \sigma)^2\right] \exp\left[\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right] \; dy$$

$$= \exp\left[\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(y - \sigma)^2\right] dy$$

$$E(X) = \exp\left[\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right].$$

2.7.3 Variansi Distribusi Lognormal

Menurut Walck (2000), variansi dari distribusi lognormal dengan peubah acak X adalah

$$Var(X) = \exp(2\mu + \sigma^2)[\exp(\sigma^2) - 1]. \qquad (2.11)$$

Bukti:

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi x^2\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2\right] dx$$

misal:

$$y = \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right) \rightarrow \ln x = y\sigma + \mu \rightarrow x = \exp\,(y\sigma + \mu)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sigma} \rightarrow dx = x\sigma\, dy$$

dengan batas

$x = 0 \rightarrow y = -\infty$

$x = \infty \rightarrow y = \infty$

sehingga diperoleh

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\exp(y\sigma + \mu)]^2}{\sqrt{2\pi x^2\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}y^2\right] x\sigma\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{y^2}{2} + 2\sigma y + 2\mu\right] dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{y^2}{2} + 2\sigma y + 2\mu + 2\sigma^2 - 2\sigma^2\right] \; dy$$

$$= \exp(2\mu + 2\sigma^2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(y - 2\sigma)^2\right] \; dy$$

$E(X^2) = \exp(2\mu + 2\sigma^2)$.

Sehingga

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$= \exp(2\mu + 2\sigma^2) - \left[\exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)\right]^2$$

$$= \exp(2\mu + 2\sigma^2) - \exp(2\mu + \sigma^2)$$

$Var(X) = \exp(2\mu + \sigma^2)\,[\exp(\sigma^2) - 1]$.

2.8 Fungsi Gamma dan Distribusi Gamma

2.8.1 Fungsi Gamma

Menurut Walpole & Myers (1995), fungsi gamma didefinisikan sebagai

$$\Gamma(\alpha) = \int_{0}^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} \, dx \tag{2.12}$$

untuk $\alpha > 0$.

Teorema 2.14

Sifat-sifat fungsi gamma antara lain:

a) $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$ atau $\Gamma(n-1) = \frac{\Gamma(n)}{(n-1)}$ (2.13)

$n > 1$, n pecahan dan n bukan bilangan bulat negatif.

b) $\Gamma(n) = (n-1)!\ ;\ n \geq 1$ (2.14)

c) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ (2.15)

(Saibagki, 1952).

Bukti Persamaan (2.13)

Berdasarkan Persamaan (2.12), bila diintegralkan parsial dengan $u = x^{\alpha-1}$ dan $dv = e^{-x}\,dx$ maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
\Gamma(\alpha) &= uv - \int_0^\infty v\,du \\
&= x^{\alpha-1}\int_0^\infty e^{-x}\,dx - \int_0^\infty (-e)^{-x}\,(\alpha-1)x^{\alpha-2}\,dx \\
&= x^{\alpha-1} - e^{-x}\Big|_0^\infty + (\alpha-1)\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-2}\,dx \\
&= 0 + (\alpha-1)\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-2}\,dx \\
&= (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1).
\end{aligned}
$$

Perhatikan bahwa $n = \alpha$ sehingga diperoleh

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) \quad ; n > 1.$$

Bukti Persamaan (2.14)

Dengan menggunakan rumus berulang berkali-kali dari Persamaan (2.13) maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
\Gamma(n) &= (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \\
&= (n-1)(n-2)(\mathrm{n}-3)\Gamma(n-3)
\end{aligned}
$$

dengan n bilangan bulat positif maka

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)\ldots\Gamma(1)$$

dimana berdasarkan persamaan (2.12)

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx$$

$$= -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1$$

sehingga diperoleh

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)\ldots 1$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!\ ;n = 1, 2, \ldots$$

Bukti persamaan (2.15)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}-1} e^{-x}\,dx$$

substitusi

$$x = y^2$$

$$dx = 2y\,dy$$

dengan batas

$$x = 0 \rightarrow y = 0$$

$$x = \infty \rightarrow y = \infty$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty y^{-1} e^{-y^2}\,2y\,dy$$

$$= 2\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy$$

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \left[2\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy\right]\left[2\int_0^\infty e^{-z^2}\,dz\right]$$

substitusi

$y = r\cos\theta$

$z = r\sin\theta$

$dydz = r\,dr\,d\theta$

dengan batas

$y = 0 \rightarrow \theta = 0$

$z = 0 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

$r = 0 \rightarrow \theta = \infty$

sehingga diperoleh

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^\infty e^{-r^2} r\,dr d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^\infty e^{-r^2} r\,dr$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} -\left(\frac{e^{-r^2}}{2}\right)\Big|_0^\infty\,d\theta$$

$$= 4\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^{\pi/2} d\theta$$

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \pi$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

2.8.2 Distribusi Gamma

Definisi 2.15 (Distribusi Gamma)

Suatu peubah acak X dikatakan memiliki distribusi gamma atau terdistribusi gamma jika dan hanya jika diberikan fungsi kepadatan peluang sebagai berikut

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{k-1}e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta^k \Gamma(k)} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases} \tag{2.16}$$

dimana $(k, \theta) > 0$ dan $\Gamma(k)$ adalah fungsi gamma (Hogg, *et al.*, 2005).

Teorema 2.16

Bila X berdistribusi gamma $X \sim G(x|k, \theta)$ maka rataan dan variansinya ditentukan oleh

$$\mu = E(X) = k\theta \tag{2.17}$$

dan

$$\sigma^2 = k\theta^2 \tag{2.18}$$

(Hogg, *et al.*, 2005).

Bukti Persamaan (2.17)

$$E(X) = \int_0^\infty x\, f(x)\, dx$$

$$= \int_0^\infty x \, \frac{x^{k-1}e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta^k \Gamma(k)}\, dx$$

misal:

$$t = \frac{x}{\theta}$$

$$x = t\theta$$

$dx = \theta\ dt$

dengan batas

$x = 0 \to t = 0$

$x = \infty \to t = \infty$

sehingga diperoleh

$$E(X) = \int_0^\infty \frac{t\theta}{\theta^k \Gamma(k)} \left(\frac{t}{\theta}\right)^{k-1} e^{-t}\ \beta\ dt$$

$$= \frac{\theta}{\Gamma(k)} \int_0^\infty t^k\ e^{-t}\ dt$$

$$= \frac{\theta}{\Gamma(k)} \Gamma(k+1)$$

$$= \frac{\theta(k)!}{(k-1)!}$$

$$= \frac{\theta k[(k-1)!]}{(k-1)!}$$

$$= k\theta.$$

Bukti Persamaan (2.18)

$$E(X^2)\ = \int_0^\infty x^2\ f(x)\ dx$$

$$= \int_0^\infty x^2\ \frac{x^{k-1} e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta^k \Gamma(k)}\ dx$$

misal:

$t = \dfrac{x}{\theta}$

$x = t\theta$

$dx = \theta \, dt$

dengan batas

$x = 0 \rightarrow t = 0$

$x = \infty \rightarrow t = \infty$

sehingga diperoleh

$$E(X^2) = \int_0^\infty \frac{(t\theta)^2}{\theta^k \Gamma(k)} \left(\frac{t}{\theta}\right)^{k-1} e^{-t} \beta \, dt$$

$$= \frac{\theta^2}{\Gamma(k)} \int_0^\infty t^{k+1} e^{-t} \, dt$$

$$= \frac{\theta^2}{\Gamma(k)} \Gamma(k+2)$$

$$= \theta^2 \frac{(k+1)(k)(k-1)!}{(k-1)!}$$

$$= (k^2 + k)\theta^2$$

dengan demikian

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= (k^2 + k)\theta^2 - (k\theta)^2$$

$$= k\theta^2.$$

2.9 Distribusi Invers Gamma

Distribusi invers gamma adalah keluarga dua parameter dari distribusi peluang kontinu pada garis bilangan real positif yang merupakan distribusi kebalikan dari peubah yang didistribusikan sesuai dengan distribusi gamma. Sehingga jika X

merupakan suatu peubah acak yang berdistribusi gamma atau dapat dinyatakan dengan $X \sim G(k, \theta)$, maka fungsi kepadatan peluangnya seperti Persamaan (2.16).

Dengan melakukan transformasi $Y = g(X) = \frac{1}{X}$ maka, $y = \frac{1}{x} \rightarrow x = \frac{1}{y} = g^{-1}(y)$

$$\left|\frac{d}{dy}[g^{-1}(y)]\right| = \left[\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{y}\right)\right] = \frac{1}{y^2}$$

sehingga diperoleh

$$f_Y(y) = f_X[g^{-1}(y)]\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right|$$

$$= \frac{1}{\theta^k \Gamma(k)}\left(\frac{1}{y}\right)^{k-1} \exp\left(-\frac{1}{\theta y}\right)\frac{1}{y^2}$$

$$= \frac{1}{\theta^k \Gamma(k)}\left(\frac{1}{y}\right)^{k+1} \exp\left(-\frac{1}{\theta y}\right).$$

Jika $k = \alpha$, $\frac{1}{\theta} = \beta$ dan $x = y$, maka distribusi yang terbentuk adalah distribusi invers gamma seperti dinyatakan dalam persamaan:

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{-(\alpha+1)} \exp\left(-\frac{\beta}{x}\right) \tag{2.19}$$

Jika $X \sim IG(\alpha, \beta)$ dengan $a > n$ maka momen dari X adalah

$$E(X^n) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^n x^{-(\alpha+1)} \exp\left(-\frac{\beta}{x}\right) dx$$

$$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^{n-\alpha-1} \exp\left(-\frac{\beta}{x}\right) dx$$

$$= \frac{\beta^n \Gamma(\alpha - n)}{(\alpha - 1)(\alpha - 2) \ldots \Gamma(\alpha - n)}$$

$$= \frac{\beta^n}{(\alpha - 1) \ldots (\alpha - n)}$$

khususnya, untuk $\alpha > 1$

$$E(X) = \frac{\beta}{\alpha - 1} \tag{2.20}$$

dan untuk $\alpha > 2$

$$E(X^2) = \frac{\beta^2}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)} \tag{2.21}$$

dan juga untuk $\alpha > 2$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)^2] = \frac{\beta^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}. \tag{2.22}$$

2.10 Estimasi dan Sifat-Sifat Estimator (Penduga)

2.10.1 Estimasi

Estimasi (pendugaan) adalah keseluruhan proses yang menggunakan sebuah estimator untuk menghasilkan sebuah *estimate* (hasil estimasi) dari suatu parameter. Estimator merupakan setiap statistik (*mean* sampel, persentasi sampel, variansi sampel dan lain-lain) yang digunakan untuk mengestimasi sebuah parameter. *Estimate* hasil estimasi adalah sebuah nilai spesifik atau kuantitas dari suatu statistik seperti *mean* sampel, persentase sampel, atau variansi sampel (Harinaldi, 2005).

2.10.2 Sifat-Sifat Estimator (Penduga)

Menurut Spiegel, *et al.* (2004), penduga yang baik adalah yang memiliki sifat-sifat berikut.

1. Sifat Tak Bias

Sifat tak bias merupakan sifat baik dari *estimator* yang diperoleh melalui pendekatan klasik, dalam pembahasan pemilihan *estimator* terbaik salah satunya harus memenuhi sifat tak bias. Suatu statistik disebuh *estimator* tak bias dari suatu parameter populasi jika rataan atau ekspektasi dari statistik itu sama dengan parameter yang ditaksir. Sehingga suatu statistik $\hat{\theta}$ dikatakan penaksir tak bias parameter θ jika

$$\mu_{\hat{\theta}} = E(\hat{\theta}) = \theta \tag{2.23}$$

2. Efisien

Jika distribusi sampling dari dua statistik memiliki *mean* yang sama, statistik dengan variansi yang lebih kecil disebut *estimator* yang lebih efisien dari *mean*. Maka statistik efisiennya disebut sebagai estimasi efisien *(efficient estimate)*.

3. Konsisten

Suatu *estimator* dapat dikatakan konsisten bila memenuhi syarat berikut:

a) Jika ukuran sampel semakin bertambah maka *estimator* akan mendekati parameternya. Jika besarnya sampel menjadi tak terhingga maka *estimator* konsisten harus dapat memberi suatu *estimator* titik yang sempurna terhadap parameternya. Jadi $\hat{\theta}$ merupakan *estimator* yang konsisten jika dan hanya jika

$$E\left[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})\right]^2 \to 0 \; jika \; n \to \infty \tag{2.24}$$

b) Jika ukuran sampel bertambah besar maka distribusi sampling *estimator* akan mengecil menjadi suatu garis tegak lurus di atas parameter yang sama dengan probabilitas sama dengan 1.

2.11 Fungsi *Likelihood*

Definisi 2.17 (Fungsi *Likelihood*)

Fungsi *likelihood* adalah fungsi kepadatan bersama dari n peubah acak $X_1, X_2, \dots, X_n$ dan dinyatakan dalam bentuk $f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$. Jika $X_1, X_2, \dots, X_n$ menyatakan suatu sampel acak dari fungsi kepadatan $f(x; \theta)$, maka

$$L(\theta) = f(x_1; \theta) f(x_2; \theta) \dots f(x_n; \theta)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta) \qquad (2.25)$$

kemungkinan maksimum dapat diperoleh dengan menentukan turunan dari L terhadapat θ dan menyatakannya sama dengan nol (Bain & Engelhardt, 1992).

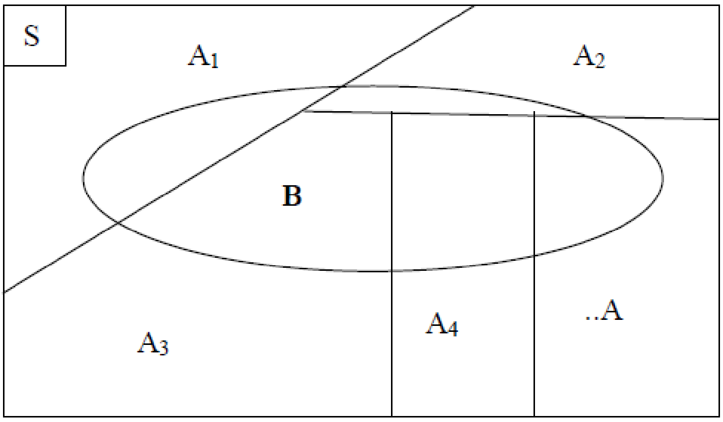
2.12 Metode Bayes

Metode Bayes merupakan suatu metode yang menyediakan cara dimana data historis dapat digunakan dalam penilaian saat ini. Metode Bayes mempunyai cara tersendiri dalam menentukan *prior* dan posterior yang secara signifikan dapat membantu menyelesaikan bagian yang sulit dalam sebuah solusi.

2.12.1 Teorema Bayes

Definisi 2.18 (Teorema Bayes)

Misal S adalah ruang sampel dari suatu eksperimen dan $A_1, A_2, \dots, A_k$ adalah peristiwa-peristiwa didalam S sedemikian sehingga $A_1, A_2, \dots, A_k$ saling asing dan $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = S$ dikatakan bahwa $A_1, A_2, \dots, A_k$ membentuk partisi di dalam S (Soejoeti & Soebanar, 1988).



Gambar 3. Teorema Bayes

Jika k peristiwa $A_1, A_2, \ldots, A_k$ membentuk partisi di dalam S, maka terlihat pada Gambar 3 bahwa peristiwa-peristiwa $A_1 \cap B, A_2 \cap B, \ldots, A_k \cap B$ membentuk partisi dalam B sehingga dapat ditulis $B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_k \cap B)$. Karena peristiwa-peristiwa di ruas kanan saling asing maka

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P\left(A_i \bigcap B\right)$$

Jika $P(A_i > 0)$ untuk $i = 1,2, \ldots, k$ maka $P(A_i \cap B) = P(A_i)P(B|A_i)$ sehingga didapat $P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)P(B|A_i)$. Misal peristiwa-peristiwa $A_1, A_2, \ldots, A_k$ membentuk partisi di dalam ruang sampel S sedemikian sehingga $A_i > 0\,; i = 1,2, \ldots, k$ dan misalkan B sembarang peristiwa sedemikian hingga $P(B) > 0$ maka untuk $i = 1,2, \ldots, k$

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(A_i)P(B|A_i)}$$

Teorema Bayes memberikan aturan sederhana untuk menghitung probabilitas bersyarat peristiwa A_i jika B terjadi, jika masing-masing probabilitas tak bersyarat A_i dan probabilitas bersyarat B jika diberikan A_i.

2.12.2 Distribusi *Prior*

Menurut Box dan Tiao (1973), dalam metode Bayes, memilih distribusi *prior* $f(\theta)$ menunjukkan ketidakpastian tentang parameter θ yang tidak diketahui. Distribusi *prior* dikelompokkan menjadi dua kelompok berdasarkan bentuk fungsi *likelihood*nya.

1. Berkaitan dengan bentuk distribusi hasil identifikasi pola datanya.
   a. Distribusi *prior* konjugat, mengacu pada acuan analisis model terutama dalam pembentukan fungsi *likelihood*nya sehingga dalam penentuan *prior* konjugat selalu dipikirkan mengenai penentuan pola distribusi *prior* yang mempunyai bentuk konjugat dengan fungsi kepadatan peluang pembangkit *likelihood*nya.
   b. Distribusi *prior* tidak konjugat, apabila pemberian *prior* pada suatu model tidak memperhatikan pola pembentuk fungsi *likelihood*nya.
2. Berkaitan dengan penentuan masing-masing parameter pada pola distribusi *prior* tersebut.
   a. Distribusi *prior* informatif mengacu pada pemberian parameter dari distribusi *prior* yang telah dipilih baik distribusi *prior* konjugat atau tidak, pemberian nilai parameter pada distribusi *prior* ini akan sangat memperngaruhi bentuk distribusi posterior yang akan didapatkan dengan menggabungkan informasi distribusi *prior* dengan informasi data yang diperoleh.
   b. Distribusi *prior* non-informatif, pemilihannya tidak didasarkan pada data yang ada atau distribusi *prior* yang tidak mengandung informasi tentang parameter θ, salah satu pendekatan dari *prior* non-informatif adalah metode Jeffrey's.

2.12.3 *Prior* Non-Informatif

Non-informatif berhubungan dengan situasi dimana distribusi *prior* tidak memiliki basis populasi. Hanya terdapat sedikit informasi *prior* sehingga distribusi *prior* berperan minimal dalam distribusi posterior. Menurut Berger (1985), salah satu bentuk pendekatan dari *prior* non-informatif yang paling banyak digunakan adalah metode Jeffrey's yang dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\pi(\theta) = [I(\theta)]^{1/2} \tag{2.26}$$

dimana $I(\theta)$ merupakan nilai harapan dari informasi Fisher

$$I(\theta) = -E_\theta\left[\frac{\partial^2 \ln f(x|\theta)}{\partial^2\theta}\right]. \tag{2.27}$$

2.12.4 Distribusi Posterior

Definisi 2.19 (Distribusi Posterior)

Bila diberikan data x, maka distribusi dari θ yang disebut distribusi posterior adalah

$$\pi(\theta|x) = \frac{f(x|\theta)\,\pi(\theta)}{g(x)} \tag{2.28}$$

dimana $g(x)$ adalah fungsi distribusi peluang marginal dari x. Fungsi distribusi peluang marginal dalam definisi di atas dapat dihitung dengan menggunakan persamaan berikut

$$g(x) = \begin{cases} \sum\limits_{\theta} p(x|\theta)\,\pi(\theta) & ;diskrit \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x|\theta)\,\pi(\theta)\,d\theta & ;kontinu \end{cases}$$

Dalam konsep dasar Bayes, semua informasi tentang θ dari data yang diamati dan dari pengetahuan *prior*nya termuat dalam posterior atau distribusi $\pi(\theta|x)$ (Walpole, *et al.*, 2007).

2.13 *Mean Square Error* (MSE)

Definisi 2.20 *(Mean Square Error)*

Mean square error dari estimasi titik $\hat{\theta}$ adalah

$$MSE(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2].$$

MSE dapat ditulis sebagai jumlah dari variansi dari estimator dan bias kuadrat dari estimator. Jika $B(\hat{\theta})$ melambangkan bias dari estimator $\hat{\theta}$, maka dapat dinyatakan

$$MSE(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + \left[B(\hat{\theta})\right]^2 \tag{2.29}$$

(Wackerly, *et al.*, 2008).

Bukti Persamaan 2.29

$$\begin{aligned}
MSE(\hat{\theta}) &= E[(\hat{\theta} - \theta)^2] \\
&= E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}) + E(\hat{\theta}) - \theta)^2] \\
&= E\left[\left(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})\right)^2 + 2\left(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})\right)\left(E(\hat{\theta}) - \theta\right) + \left(E(\hat{\theta}) - \theta\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})\right)^2\right] + E\left[2\left(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})\right)\left(E(\hat{\theta}) - \theta\right)\right] + E\left[\left(E(\hat{\theta}) - \theta\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})\right)^2\right] + 2\left(E(\hat{\theta}) - \theta\right)E\left[\left(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})\right)\right] + E\left[\left(E(\hat{\theta}) - \theta\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})\right)^2\right] + 2\left(E(\hat{\theta}) - \theta\right)\left(E(\hat{\theta}) - E(\hat{\theta})\right) + E\left[\left(E(\hat{\theta}) - \theta\right)^2\right]
\end{aligned}$$

$$MSE(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + \left[B(\hat{\theta})\right]^2.$$

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester genap tahun akademik 2019/2020 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mencari fungsi *likelihood* distribusi lognormal.
2. Mencari dugaan parameter σ^2 pada distribusi lognormal menggunakan *prior* non-informatif dengan langkah-langkah:
   1) Menentukan *prior* non-informatif melalui pendekatan metode Jeffrey's.
   2) Menentukan fungsi bersama $f(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu, \sigma^2)$ dengan mengalikan fungsi *likelihood* distribusi lognormal dengan *prior* non-informatif yang didapat pada langkah sebelumnya.
   3) Menentukan fungsi marginal dari fungsi bersama $f(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu, \sigma^2)$.
   4) Menentukan distribusi posterior dari sampel acak $X_i \sim Lognormal(\mu, \sigma^2)$ dengan *prior* non-informatifnya.

5) Menentukan distribusi posterior marginal untuk σ^2 dengan mengintegralkan distribusi posteriornya terhadap μ.
6) Menduga parameter σ^2 pada distribusi lognormal.
7) Mendapatkan penduga Bayes mengunakan *prior* non-informatif dari distribusi lognormal.

3. Mencari dugaan parameter σ^2 pada distribusi lognormal menggunakan *prior* konjugat dengan langkah-langkah:
   1) Menentukan fungsi bersama $f(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu, \sigma^2)$ dengan mengalikan fungsi *likelihood* distribusi lognormal dengan distribusi *prior*nya, yaitu distribusi invers gamma.
   2) Menentukan fungsi marginal dari fungsi bersama $f(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu, \sigma^2)$.
   3) Menentukan distribusi posterior dari sampel acak $X_i \sim Lognormal(\mu, \sigma^2)$ dengan distribusi *prior*nya $\sigma^2 \sim InversGamma(\alpha, \beta)$.
   4) Menduga parameter σ^2 pada distribusi lognormal.
   5) Mendapatkan penduga Bayes menggunakan distribusi *prior* konjugat dari distribusi lognormal.
4. Mengkaji karakteristik sifat-sifat seperti sifat ketakbiasan, efisien dan kekonsistenan penduga Bayes dari distribusi lognormal menggunakan distribusi *prior* non-informatif dan konjugat.
5. Melakukan simulasi data dengan *software* R dengan langkah-langkah sebagai berikut:
   1) Membuat grafik fungsi kepekatan peluang distribusi lognormal untuk melihat pengaruh parameter terhadap bentuk sebaran distribusinya.

2) Membangkitkan data $X_i \sim Lognormal(\mu, \sigma^2)$ dengan $n = 50$, $\mu = 1$, $\sigma^2 =$ 0,5.
3) Menghitung penduga σ^2 Bayes menggunakan distribusi *prior* non-informatif dan konjugat.
4) Ulangi langkah 2 dan 3 sebanyak 1000 kali.
5) Menghitung $Bias(\widehat{\sigma^2})$, $Var(\widehat{\sigma^2})$, dan $MSE(\widehat{\sigma^2})$ untuk kedua distribusi *prior*.
6) Ulangi langkah 2 s.d. 5 untuk $n = 150$, $n = 400$, $n = 1000$, $n = 5000$, dan $n = 10000$.
7) Ulangi langkah 2 s.d. 5 untuk $\mu = 1$ dan $\sigma^2 = 2$, $\mu = 1$ dan $\sigma^2 = 5$, $\mu = 2$ dan $\sigma^2 = 0.5$, $\mu = 2$ dan $\sigma^2 = 2$ serta $\mu = 2$ dan $\sigma^2 = 5$.
8) Evaluasi/membandingkan hasil simulasi kedua distribusi *prior* berdasarkan nilai MSE.

V. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan telah diperoleh estimasi atau penduga titik dari parameter σ^2 distribusi lognormal menggunakan metode Bayes dengan *prior* non-informatif adalah

$$\widehat{\sigma^2}_{NI} = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}(\ln^2 x_i) - \frac{(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i)^2}{n}\right]$$

serta dengan *prior* konjugat sebagai berikut.

$$\widehat{\sigma^2}_{K} = \frac{2\beta}{(2\alpha+n)} + \frac{1}{(2\alpha+n)}\left[\sum_{i=1}^{n}(\ln x - \mu)^2\right]$$

Secara analitik telah ditunjukkan bahwa $\widehat{\sigma^2}_{NI}$ merupakan penduga yang bersifat tak bias sedangkan $\widehat{\sigma^2}_{K}$ merupakan penduga yang bersifat tak bias secara asimtotik. Namun, varians dan MSE dari penduga $\widehat{\sigma^2}_{NI}$ lebih besar dibandingkan penduga $\widehat{\sigma^2}_{K}$. Kemudian, telah dibuktikan baik secara analitik maupun empirik bahwa penduga $\widehat{\sigma^2}_{NI}$ dan $\widehat{\sigma^2}_{K}$ merupakan penduga yang konsisten.

Berdasarkan hasil simulasi, dapat disimpulkan bahwa *prior* non-informatif dan *prior* konjugat merupakan *prior* yang baik digunakan untuk menduga parameter σ^2 dari distribusi lognormal. Hal ini dikarenakan semakin besar ukuran sampel maka nilai MSE dari kedua *prior* akan semakin kecil dan mendekati nilai yang sama.

DAFTAR PUSTAKA

Aitchison, J. & Brown, J.A.C. 1963. *The Lognormal Distribution with Special Reference to It's Uses in Econometrics*. The Syndics of Cambridge University Press, New York.

Bain, L.J. & Engelhardt, M. 1992. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics.* 2^{nd} Edition. Duxbury Press, California.

Berger, J.O. 1985. *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*. 2^{nd} Edition. Springer-Verlag New York, Inc., New York.

Bolstad, W.M. 2007. *Introduction to Bayesian Statistics*. 2^{nd} Edition. John Wiley & Sons, New York.

Box, G.E.P & Tiao, G.C. 1973. *Bayesian Inference in Statistical Analysis.* Addison-Wesley, Massachusetts.

Diana, E.N. & Soehardjoepri. 2016. Pendekatan Metode Bayesian Untuk Kajian Estimasi Parameter Distribusi Lognormal untuk Non-Informatif Prior. *Jurnal Sains dan Seni ITS.* **5**(2): 14-16.

Harinaldi. 2005. *Prinsip-Prinsip Untuk Teknik dan Sains*. Erlangga, Jakarta.

Hogg, R.V., McKean, J.W., & Craig, A.T. 2005. *Introduction to Mathematical Statistics.* 6^{th} Edition. Pearson Education, Inc., USA.

Hogg, R.V., McKean, J.W., & Craig, A.T. 2012. *Introduction to Mathematical Statistics.* 7^{th} Edition. Pearson Education, Inc., USA.

Miller, I. & Miller, M. 1999. *John E. Freund's Mathematical Statistics*. 6^{th} Edition. Prentice-Hall, Inc., New Jersey.

Montgomery & Runger. 2014. *Applied Statistics and Probability for Engineers.* 6^{th} Edition. John Wiley & Sons, USA.

Saibagki, W. 1952. *Theory and Applications of Gamma Function*. Iwanami Syoten, Tokyo.

Soejoeti, Z. & Soebanar. 1988. *Inferensi Bayesian.* Karunika Universitas Terbuka, Jakarta.

Spiegel, M.R., Schiller, J.J., & Srinivasan, R.A. 2004. *Probabilitas Statistik.* Terjemahan Ratna Indriasari. Erlangga, Jakarta.

Sultan, H., Sultan, R., & Ahmad, S.P. 2015. Bayesian Analysis of Lognormal Distribution Under Different Loss Functions. *International Jurnal of Modern Mathematical Sciences.* **13**(1): 17-28.

Wackerly, D.D., Mendelhall, W., & Scheaffer, R.L. 2008. *Mathematical Statistics with Applications*. 7^{th} Edition. Thomson Learning, Inc., USA.

Walck, C. 2000. *Hand-Book on Statistical Distributions for Experimentalists.* University of Stockholm, Stockholm.

Walpole, R.E., Myers, R.H., Myers, S.L., & Ye, K. 2007. *Probability & Statistics for Engineers & Scientists*. 8^{th} Edition. Pearson Education, Inc., New Jersey.

Walpole, R.E. & Myers, R.H. 1995. *Ilmu Peluang dan Statistika Untuk Insinyur dan Ilmuwan*. Ed. ke-4. Terjemahan RK Sembiring. ITB, Bandung.

Yani, R.N., Yanuar, F., & Yozza, H. 2018. Inferensi Bayesian Untuk σ^2 Dari Distribusi Normal Dengan Berbagai Distribusi Prior. *Jurnal Matematika UNAND*. **7**(2): 132-13.