PEMODELAN DINAMIS DATA CURAH HUJAN MENGGUNAKAN RANTAI MARKOV ORDE PERTAMA

(Tesis)

Oleh:

RAENI CHINDI DEFI OCVILIA

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS LAMPUNG

BANDAR LAMPUNG

2019

ABSTRAK

PEMODELAN DINAMIS DATA CURAH HUJAN MENGGUNAKAN RANTAI MARKOV ORDE PERTAMA

Oleh

Raeni Chindi Defi Ocvilia

.

Klasifikasi curah hujan yang terjadi pada daerah tertentu dalam waktu yang berbeda sangat penting untuk menentukan akurasi probabilitas curah hujan yang akan datang. Prediksi curah hujan merupakan cara untuk mengetahui gambaran kondisi curah hujan beberapa waktu ke depan. Penggambaran kejadian hujan seringkali menggunakan model Rantai Markov. Memodelkan fenomena alam dengan model rantai Markov diasumsikan bahwa proses yang terlibat didalamnya mengikuti sifat Markov yaitu apabila diketahui proses berada dalam suatu keadaan tertentu, maka peluang berkembangnya proses di masa mendatang hanya tergantung pada keadaan saat ini dan tidak tergantung pada keadaan sebelumnya. Fokus penelitian ini adalah menerapkan rantai Markov orde pertama untuk memprediksi peluang curah hujan pada lokasi penelitian. Melalui rantai Markov diperoleh distribusi stationer yang mewakili persentase peluang curah hujan jangka panjang untuk setiap klasifikasi intensitas curah hujan. Penelitian ini menghasilkan peluang jangka panjang prediksi curah hujan untuk musim hujan, musim pancaroba I, musim kemarau, dan musim pancaroba II.

Kata Kunci : Curah Hujan, Rantai Markov, Distribusi Stasioner, Probabilitas.

PEMODELAN DINAMIS DATA CURAH HUJAN MENGGUNAKAN RANTAI MARKOV ORDE PERTAMA

Oleh:

RAENI CHINDI DEFI OCVILIA

Tesis

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
MAGISTER SAINS

Pada

Jurusan Matematika Program Studi Magister Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

Judul Tesis	:	**PEMODELAN DINAMIS DATA CURAH HUJAN MENGGUNAKAN RANTAI MARKOV ORDE PERTAMA**
Nama Mahasiswa	:	Raeni Chindi Defi Ocvilia
Nomor Pokok Mahasiswa	:	1727031008
Jurusan	:	Matematika
Program Studi	:	Pascasarjana Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Prof. Drs. Mustofa Usman, MA., Ph.D.	**Dr. Khoirin Nisa, S.Si., M.Si.**
NIP19570101 198404 1 001	NIP 19740726 200003 2 001

2. Ketua Program Studi Magister Matematika

Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.
NIP 19760411 200012 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Prof. Drs. Mustofa Usman, MA., Ph.D.** ....

Sekretaris : **Dr. Khoirin Nisa, S.Si., M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **I. Ir. Warsono, M.S., Ph.D.** ....

II. Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Drs. Suratman, M.Sc.
NIP 19640604 199003 1 002

3. Direktur Program Pascasarjana

Prof. Drs. Mustofa Usman, MA., Ph.D.
NIP 19570101 198404 1 001

4. Tanggal Lulus Ujian Tesis : **04 Oktober 2019**

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: **Raeni Chindi Defi Ocvilia**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1727031008**
Judul	: **PEMODELAN DINAMIS DATA CURAH HUJAN MENGGUNAKAN RANTAI MARKOV ORDE PERTAMA**
Program Studi	: **Magister Matematika**
Jurusan	: **Matematika**

Dengan ini menyatakan bahwa tesis ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan semua tulisan yang tertuang didalam tesis ini telah mengikuti kaidah karya penulisan ilmiah Universitas Lampung.

Bandar Lampung, Oktober 2019

Raeni Chindi Defi Ocvilia
NPM. 1727031008

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Raeni Chindi Defi Ocvilia, anak kedua dari tiga bersaudara yang dilahirkan di Pringsewu pada tanggal 28 Oktober 1994 oleh pasangan Bapak Rahmat Riyadi dan Ibu Endang Sriningsih, adik dari Raeni Wulan Permata, kakak dari Raendra Affan Julio Prakasa dan istri dari Ahmad Furqon.

Penulis menempuh pendidikan di Taman Kanak-Kanak (TK) Aisyiyah Bustanul Athfal Mataram pada tahun 1998-2000, menyelesaikan pendidikan Sekolah Dasar (SD) di SD Negeri 2 Mataram pada tahun 2006, menyelesaikan pendidikan Sekolah Menengah Pertama (SMP) di SMP Negeri 1 Gadingrejo pada tahun 2009, dan menyelesaikan pendidikan Sekolah Menengah Atas (SMA) di SMA Negeri 1 Gadingrejo pada tahun 2011. Pada tahun 2011 penulis melanjutkan pendidikan di Sekolah Tinggi Meteorologi Klimatologi dan Geofisika (STMKG) Jakarta Jurusan Klimatologi dan telah menyelesaikan studi tersebut pada tahun 2016. Pada tahun 2017 penulis terdaftar sebagai mahasiswa Pascasarjana Progam Studi Magister Matematika Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.

PERSEMBAHAN

Dengan segala kerendahan hati dan rasa syukur, aku persembahkan karya kecil ku ini untuk-Mu ya Allah, yang selalu memberikan rahmat dan hidayah sehingga tesis ini dapat diselesaikan.

Untuk Mama, Papa, Suami, Kakak, dan Adikku yang selalu mendoakan, memberikan dukungan, semangat, kasih sayang, dan tempat istimewa di hati kalian, yang selalu memberikanku motivasi untuk tetap semangat dalam melakukan segala aktivitas.

Kepada Dosen Pembimbing dan Penguji yang sangat berjasa dan selalu memberikan motivasi

Kantorku BMKG Stasiun Klimatologi Pesawaran Lampung

dan Almamater Universitas Lampung

MOTTO

"Wahai orang-orang beriman! Bersabarlah kamu dan kuatkanlah kesabaranmu dan tetaplah bersiap siaga dan bertaqwalah kepada Allah agar kamu beruntung."

(Q.S. Ali Imran : 200)

"Tiap kali kamu merasa beruntung, percayalah doa ibumu telah Terkabulkan."

"Fabiayyi 'aalaa'i Rabbikumaa Tukadzdzibaan."

(Q.S. Ar-Rahman)

"Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan.

(Q.S. Al-Insyirah : 5-6)

SANWACANA

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

Puji syukur penulis ucapkan kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, berkah, pertolongan, dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan tugas akhir sebagai salah satu syarat memperoleh gelar Magister Sains (M.Si) Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung. Shalawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada junjungan kita Nabi Muhammad SAW, penuntun jalan bagi seluruh umat manusia.

Diselesaikannya penulisan tesis yang berjudul “PEMODELAN DINAMIS DATA CURAH HUJAN MENGGUNAKAN RANTAI MARKOV ORDE PERTAMA” ini tidak terlepas dari doa, bimbingan, dukungan serta saran dari berbagai pihak yang telah membantu. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Drs. Mustofa Usman, MA., Ph.D, selaku dosen pembimbing utama yang telah meluangkan waktu untuk membimbing, mengarahkan, dan memotivasi penulis sehingga tesis ini dapat diselesaikan.
2. Ibu Dr. Khoirin Nisa, S.Si., M.Si, selaku dosen pembimbing kedua yang telah memberikan pengarahan dalam proses penyusunan tesis ini.
3. Bapak Ir. Warsono, M.S., Ph.D, selaku dosen penguji atas kritik dan saran yang membangun untuk tesis ini.

4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si, selaku dosen penguji atas kritik dan saran yang membangun untuk tesis ini.
5. Ibu Dr. Asmiati, S.Si., M.Si, selaku Pembimbing Akademik, terima kasih atas bimbingan dan pembelajarannya dalam menjalani perkuliahan.
6. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, MA., Ph.D, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Bapak Drs. Suratman, M.Sc, selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
8. Bapak Prof. Drs. Mustofa Usman, MA., Ph.D, selaku Direktur Program Pascasarjana Universitas Lampung.
9. Dosen, staff, dan karyawan Jurusan Matematika FMIPA UNILA yang telah memberikan ilmu pengetahuan dan bantuan kepada penulis.
10. Mama, Papa, Suami, Kakak, dan Adikku tercinta yang selalu mendoakan dan menyemangatiku.
11. Sahabat seperjuangan di S-2 Matematika angkatan 2017 dan keluarga besar Matematika FMIPA UNILA.
12. Semua pihak yang telah membantu dalam penyusunan tesis ini, semoga mendapat imbalan yang sesui dari Allah SWT.

Penulis menyadari tesis ini jauh dari sempurna dan penulis juga berharap penelitian ini dapat berguna dan bermanfaat bagi pembaca. Aamiin.

Bandar Lampung, Oktober 2019

Penulis

Raeni Chindi Defi Ocvilia

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Identifikasi data merupakan bagian yang sangat penting dalam penelitian statistik. Karakteristik data yang sesuai akan membentuk model yang baik dan sesuai. Data yang sesuai dengan penelitian akan memberikan hasil yang lebih akurat pada penelitian yang dilakukan.

Sebagai salah satu unsur iklim, maka presipitasi yang dihasilkan oleh atmosfer di wilayah tropis pada umumnya berwujud curah hujan (Barry dan Chorley, 1998). Curah hujan merupakan salah satu parameter iklim yang jumlah sebarannya tidak merata dan berbeda baik dalam skala waktu maupun ruang. Klasifikasi curah hujan yang terjadi pada daerah tertentu dalam waktu yang berbeda sangat penting untuk menentukan akurasi probabilitas curah hujan yang akan datang. Prediksi curah hujan merupakan cara untuk mengetahui gambaran kondisi curah hujan beberapa waktu ke depan (Indrabayu, dkk, 2011). Karena jumlah curah hujan selalu berubah terhadap waktu, apabila kita menganalisis proses tersebut dengan memperhatikan perubahan variabel menurut fungsi waktu maka pendekatan yang kita lakukan disebut sebagai pendekatan stokastik, dimana proses stokastik dipandang sebagai proses yang tergantung waktu (*time-dependent*). Daerah yang topografi lokalnya sangat mempengaruhi pola curah hujan, model stokastik baik digunakan untuk meningkatkan kualitas prakiraan curah hujan. Penggambaran kejadian hujan seringkali menggunakan model Rantai Markov (Haan dkk, 1976; Coe dan Stern, 1982). Rantai Markov merupakan bagian dari proses stokastik yang dapat digunakan untuk prediksi curah hujan waktu sekarang berdasarkan satu waktu sebelumnya.

Rantai Markov (Markov *Chain*) adalah sebuah teknik perhitungan yang umumnya digunakan dalam melakukan pemodelan bermacam-macam kondisi. Teknik ini digunakan untuk membantu dalam memperkirakan perubahan yang mungkin terjadi di masa mendatang (Suhartono, 2013). Memodelkan fenomena alam dengan model Rantai Markov diasumsikan bahwa proses yang terlibat didalamnya mengikuti sifat markov yaitu apabila diketahui proses berada dalam suatu keadaan tertentu, maka peluang berkembangnya proses di masa mendatang hanya tergantung pada keadaan saat ini dan tidak tergantung pada keadaan sebelumnya, atau dengan kata lain Rantai Markov adalah rangkaian proses kejadian dimana peluang bersyarat kejadian yang akan datang tergantung pada kejadian sekarang (Reza, 2007). Rantai Markov terdefinisi oleh matriks peluang transisinya. Matriks peluang transisi adalah suatu matriks yang memuat informasi yang mengatur perpindahan sistem dari suatu keadaan (*state*) ke keadaan (*state*) lainnya (Langi, 2011). Oleh karena itu, Rantai Markov biasa digunakan untuk membuat suatu model berbagai macam sistem dengan mengamati transisi yang terjadi pada suatu kejadian sehingga diperoleh model Rantai Markov.

Model Rantai Markov telah dikembangkan dan digunakan oleh banyak peneliti. Dalam model ini, beragam kondisi dari lokasi geografis dan probabilitas transisi diperkirakan secara empiris atau diasumsikan memiliki sifat tertentu (McGinnis, 1968; Bartholomew, 1967; Henry dkk, 1971). Beberapa literatur menunjukkan bahwa sebagian besar Peneliti menggunakan Markov *Chain* orde pertama. Srikanthan dan Mohan (1984) pertama kali menggunakan Markov *Chain* untuk menghasilkan data curah hujan tahunan dan merekomendasikan model ini untuk prakiraan. Di Italia Kottegoda dkk (2004) melaporkan bahwa penggunaan Markov *Chain* orde pertama sesuai dengan data yang diamati. Model ini didasarkan pada asumsi bahwa ada ketergantungan dari kejadian curah hujan harian dengan hari sebelumnya. Jimoh dan Webster (1999) menggunakan model Markov *Chain* untuk kejadian curah hujan harian pada 5 lokasi di Nigeria dan kesimpulanya adalah model Markov *Chain* orde pertama dapat digunakan untuk banyak lokasi tetapi model orde kedua atau lebih tinggi mungkin diperlukan di lokasi lain dalam sepanjang tahun. Artificial neural network yang merupakan model acuan, regresi linier ganda dan ARMA (*Auto Regresif Moving Average*) adalah contoh model yang biasa digunakan untuk prediksi curah hujan, namun teknik yang paling banyak digunakan adalah yang didasarkan pada model Markov *Chain* (N'guessan dkk, 2014; Ameur dan Haddad, 2007).

Karena informasi tentang probabilitas terjadinya hujan yang akan datang dapat digunakan untuk membuat keputusan yang berkaitan dengan perencanaan dan manajemen produksi pertanian serta manajemen air, sehingga dapat mengurangi dampak risiko yang berasal dari ketidakpastian kondisi cuaca (Dash, 2012). Oleh karena itu, fokus penelitian ini adalah menerapkan model Rantai Markov orde pertama dan selanjutnya model tersebut diharapkan dapat digunakan untuk memprediksi peluang curah hujan pada lokasi penelitian.

1.2 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah wilayah penelitian terdiri dari dua lokasi. Setiap lokasi terbagi berdasarkan pada pembagian musim di Indonesia. Serta bagaimana hasil dari karakteristik model Rantai Markov dalam memprediksi peluang curah hujan pada wilayah penelitian.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menentukan apakah data curah hujan dapat dimodelkan dengan Rantai Markov orde pertama menggunakan analisis *chi-square*.
2. Menentukan karakteristik model Rantai Markov berdasarkan data curah hujan harian tahun 2008 - 2018.
3. Menentukan prediksi peluang curah hujan menggunakan model Rantai Markov.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi dalam kaidah ilmu pengetahuan statistik sebagai bahan kajian dalam mempelajari Rantai Markov dan Aplikasinya dalam memprediksi peluang curah hujan di Lampung khususnya Pesawaran dan Pringsewu.

II. LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dijabarkan beberapa istilah, definisi, dan teorema serta materi-materi yang dipergunakan dalam penelitian ini, yakni sebagai berikut:

2.1 Proses Stokastik

Proses stokastik adalah kumpulan dari peubah acak $\{X_t; t \in T\}$, dimana t sebagai waktu, yang didefinisikan sebagai *state* dari proses pada waktu *t.* T disebut indeks dari proses atau parameter waktu. Himpunan dari semua nilai yang mungkin pada peubah acak *Xt* dapat disebut sebagai ruang keadaan *(state space)* dalam proses dan dinotasikan dengan S (Ross, 2007).

Menurut Gross (2008), proses stokastik dapat dibedakan menjadi dua bentuk yaitu:

a. Jika $T = \{0,1,2,3, \ldots\}$, maka proses stokastik ini berparameter diskrit dan biasanya dinyatakan dengan notasi $\{X_t\}$

b. Jika $T = \{t \mid t \geq 0\}$, maka proses stokastik ini berparameter kontinu dan biasanya dinyatakan dengan notasi $\{X_t \mid t \geq 0\}$

Dalam penelitian ini, T merupakan himpunan terbilang maka proses stokastik tersebut dapat dikatakan sebagai proses waktu-diskrit.

2.2 State

State adalah kondisi yang merupakan peubah acak X_t, dimana jika suatu peubah acak berada pada *state* tersebut maka dapat berpindah ke *state* lainnya. Himpunan atau kumpulan dari *state*-*state* tersebut membentuk ruang *state* dan dinyatakan dengan S, dimana $S = \{0,1,2, \dots, M\}$ (Cox dan Miller, 1965).

2.3 Rantai Markov

Rantai Markov adalah salah satu bentuk dari proses stokastik yang memenuhi sifat Markov, yaitu peluang kejadian atau peubah acak X pada waktu $t + 1$ hanya akan dipengaruhi oleh kejadian X pada waktu t dan tidak akan dipengaruhi oleh kejadian sebelum waktu t atau dapat dinyatakan dengan (Kijima, 1997):

$$P\{X_{t+1} = j \mid X_0 = h, \dots, X_t = i\} = P\{X_{t+1} = j \mid X_t = i\} \tag{2.1}$$

Dengan kata lain, sifat Markov tersebut dapat dinyatakan sebagai peluang bersyarat terhadap suatu kejadian di masa mendatang yang tidak dipengaruhi oleh kejadian di masa lalu, tetapi hanya dipengaruhi oleh kejadian saat ini (Hillier dan Lieberman, 2001). Dalam teori probabilitas, Model Rantai Markov adalah model stokastik yang digunakan untuk memodelkan sistem yang berubah-ubah secara random di mana diasumsikan bahwa kondisi masa depan tergantung hanya pada keadaan sekarang dan bukan pada urutan peristiwa yang mendahuluinya. Umumnya, asumsi ini memungkinkan penalaran dan perhitungan, yang jika menggunakan model lain mungkin akan lebih sulit diselesaikan (Zada, 2016).

2.4 Rantai Markov Waktu Diskrit

Proses stokastik $\{X_t, t = 0,1,2, \dots\}$ dengan ruang *state* S, disebut rantai Markov dengan waktu diskrit jika untuk setiap $\{t = 0,1,2, \dots\}$ berlaku (Grimmet dan Stirzaker, 2001):

$$P\{X_{t+1} = j \mid X_t = i_t, X_{t-1} = i_{t-1}, \dots, X_1 = i_1\} = P\{X_{t+1} = j \mid X_t = i_t\} \tag{2.2}$$

untuk semua kemungkinan nilai dari $i_0, i_1, \dots, i_{t-1}, i_t, j \in S$ dengan:

$$P\{X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n\} > 0$$

Dengan kata lain, kondisi tersebut menyatakan secara tidak langsung jika *state* sekarang diketahui "$\{X_n = i_n\}$", maka *state* sebelumnya "$\{X_{n-1}, X_{n-2}, \dots, X_0\}$" tidak mempengaruhi peluang *state* yang akan datang $\{X_{n+1}\}$ (Castadena dkk, 2012).

2.5 Matriks Peluang Transisi

Peluang bersyarat $P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\}$ disebut sebagai peluang transisi dan dinotasikan dengan $p_{i,j}$ dimana untuk setiap i dan j,

$$P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} = P\{X_1 = j \mid X_0 = i\} \qquad ; n = 0,1,2, \dots \tag{2.3}$$

disebut sebagai peluang transisi (satu langkah), dan untuk setiap i, j, dan n (t = 0,1,2,...),

$$P\{X_{n+t} = j \mid X_t = i\} = P\{X_t = j \mid X_0 = i\} \qquad ; t = 0,1,2, \dots \tag{2.4}$$

akan disebut peluang transisi n-langkah.

Karena $p_{i,j}$ merupakan peluang bersyarat maka peluang tersebut harus positif dan karena dalam prosesnya terjadi transisi ke beberapa *state* maka peluang bersyarat $p_{i,j}$ tersebut harus memenuhi sifat:

1) $p_{i,j}{}^{(n)} \geq 0 \qquad ; i, j \in S; n = 0,1,2, \ldots$ (2.5)

2) $\sum_{j \in S} p_{i,j}{}^{(n)} = 1 \qquad ; i \in S; n = 0,1,2, \ldots$ (2.6)

Peluang transisi $P_{i,j}$ dapat ditulis dalam matriks transisi P:

$$\boldsymbol{P} = p_{i,j} = \begin{bmatrix} P_{0,0} & \cdots & P_{0,M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{M,0} & \cdots & P_{M,M} \end{bmatrix}$$

(Hillier dan Lieberman, 2001).

2.6 Karakteristik Rantai Markov

Penentuan karakteristik dari suatu proses stokastik dapat dilakukan melalui klasifikasi Rantai Markov. Berikut merupakan berbagai istilah yang dipergunakan dan berkaitan dengan Rantai Markov:

2.6.1 Accessible

State j dikatakan dapat dicapai (*accessible*) dari *state* i dengan $n \geq 0$ steps jika $p_{i,j}{}^{(n)} > 0$. Dapat ditulis dengan $i \rightarrow j$ (j dapat dicapai dari i dengan n langkah).

State i dan j berkomunikasi jika $i \rightarrow j$ dan $j \rightarrow i$, yaitu terdapat bilangan bulat $m \geq 0 \quad dan\, n \geq 0$ sehingga $p_{i,j}{}^{(m)} > 0$ dan $p_{i,j}{}^{(n)} > 0$, maka keadaan i dan j dikatakan **saling berkomunikasi,** dan dinotasikan dengan $i \leftrightarrow j$. (Sheldon, 1996).

2.6.2 Irreducible

Suatu Rantai Markov dapat dikatakan *irreducible* jika ruang *state*-nya membentuk satu kelas komunikasi, sebaliknya dinamakan *reducible* (Privault, 2013). Rantai markov dikatakan *irreducible* jika ruang *state* hanya terdiri dari 1 kelas, artinya semua *state* berkomunikasi satu sama lain. Dapat dengan mudah bahwa $i \leftrightarrow j$ merupakan relasi ekivalen pada S sehingga kelas ekuivalen $C(i) \coloneqq \{j \in S : i \leftrightarrow j\}, i \in S,$ dari partisi S.

Definisi 2.1

Keadaan *i* dikatakan memiliki periode λ_i, jika λ_i merupakan faktor persekutuan terbesar dari *n*, untuk semua bilangan bulat $n \geq 1$, sehingga ${p_{ii}}^n > 0$.

Misalkan $i \in S$ tetap. Periode *i* didefinisikan sebagai berikut:

$$\lambda_i = GCD\,\{n \geq 1 : {p_{ii}}^n > 0\} \tag{2.7}$$

GCD (*Greatest Common Divisor*) adalah faktor persekutuan terbesar (FPB).

Jika ${p_{ii}}^n = 0$ untuk semua $n \geq 1, maka\ \lambda_i = 0$.

Jika $\lambda_i = 1$, keadaan *i* adalah *aperiodic*, dan jika $\lambda_i > 1$, keadaan *i* adalah periodik. (Osaki, 1992)

2.6.3 Recurrent

Suatu Rantai Markov dikatakan *persistent* atau *recurrent* jika $p_{jj} = 1$ dimulai dari *state* i, rantai akan kembali ke *state* i dalam waktu (acak) terhingga, dengan peluang 1. Dengan kata lain, *state* $i \in S,$ *recurrent* jika

$$p_{i,i} \coloneqq P(T_i^r < \infty \mid X_0 = i\,) = P(X_n = i \mid X_0 = i) = 1 \tag{2.8}$$

dimana $n \geq 1$.

Suatu Rantai Markov yang *recurrent* dapat dikatakan *positive recurrent* apabila diasumsikan bahwa ruang *state* S dari Rantai Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ terhingga sehingga untuk semua *state* yang *recurrent* dalam S merupakan *positive recurrent*. Oleh karena itu, dimisalkan $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Rantai Markov yang *irreducible* dengan ruang *state* terhingga S maka semua *state* dari $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ merupakan *positive recurrent* (Privault, 2013).

Definisi 2.2

Jika p_{ii} = 1, maka keadaan i disebut *recurrent*.

Jika p_{ii} < 1, maka keadaan i disebut *transient*. (Osaki, 1992)

Teorema 1

Keadaan *i* dikatakan *recurrent* jika dan hanya jika $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{n} = \infty$

Keadaan *i* dikatakan *transient* jika dan hanya jika $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{n} < \infty$ **(**Osaki, 1992)

2.6.4 Distribusi Stasioner

Suatu distribusi peluang pada S, yaitu keluarga $\pi = (\pi_i)_{i\in S}$ di $[0,1]$ sedemikian sehingga

$$\sum_{i\in S} \pi_i = 1$$

dikatakan stasioner jika, dimulai X_0 pada waktu 0 dengan berdistribusi $(\pi_i)_{i\in S,}$ terbukti bahwa distribusi X_1 tetap $(\pi_i)_{i\in S}$ pada waktu 1. Dengan kata lain, $(\pi_i)_{i\in S}$ stasioner untuk Rantai Markov dengan matriks transisi **P**

$$P\ (X_0 = i) = \pi_i \qquad , i \in S$$

dan

$$P\ (X_1 = i) = P\ (X_0 = i) = \pi_i \qquad , i \in S$$

Hal ini juga berarti

$\pi_j = P(X_1 = j) = \sum_{i \epsilon S} P(X_1 = j \mid X_0 = i)\, P(X_0 = i) = \sum_{i \epsilon S} p_{i,j}\, \pi_i$

dimana distribusi π adalah stasioner jika dan hanya jika *invariant* dengan matriks **P**, yang berarti

$$\pi = \pi \boldsymbol{P}$$

dimana perkalian **P** pada sisi kanan tidak berlaku pada sisi kiri.

Secara umum, dengan asumsi X_n berada dalam distribusi stasioner π pada waktu n, diperoleh

$$\pi_j = P(X_{n+1} = j) = \sum_{i \epsilon S} P(X_{n+1} = j \mid n = i)\; P(X_n = i)$$

$$= \sum_{i \epsilon S} p_{ij}\, P(X_n = i)$$

$$= \sum_{i \epsilon S} p_{ij}\, \pi_i$$

$$= \pi \boldsymbol{P} \qquad\qquad i, j \epsilon S$$

Hal tersebut dikarenakan matriks transisi $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ merupakan waktu yang homogen sebab peluang transisi $p_{i,j}$ tidak bergantung pada waktu n. Oleh karena itu,

$$P(X_n = j) = \pi_j \quad , j \epsilon S \quad \rightarrow \quad P(X_{n+1} = j) = \pi_j \qquad , j \epsilon S$$

dan diinduksi pada $n \geq 0$ sehingga

$$P(X_n = j) = \pi_j \quad , j \epsilon S \quad , n \geq 1$$

Rantai $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetap dalam distribusi yang sama π pada seluruh waktu $n \geq 1$ dengan catatan telah dimulai dengan distribusi stasioner π pada waktu $n = 0$ (Privault, 2013).

Definisi 2.3

Ambil $\{X_n; n \geq 0\}$ adalah rantai markov dengan ruang *state* S. Peluang

$\pi = \left(\pi_j\right)_{j\epsilon S}$ dikatakan invarian atau stasioner jika:

$$\pi_j = \sum_{i \,\epsilon\, S} p_{ij}\, \pi_i$$

untuk semua $, j \,\epsilon\, S$. Dengan kata lain π adalah invarian jika $\pi = \pi P$.

Teorema 2

Ambil $\{X_n; n \geq 0\}$ bersifat *irreducible* (semua *state* berkomunikasi satu sama lain), rantai markov *aperiodic* dengan ruang *state* S. Maka terdapat peluang invarian terhadap S jika hanya jika rantainya merupakan rantai *positive recurrent*.

Teorema 3

Jika suatu rantai Markov adalah *ergodic*, maka terdapat limit peluang $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^n = \pi_j,\ \ i, j = 1,2, \ldots,$ yang tidak tergantung pada keadaan awal *i*, dimana $\{\pi_j,\ \ j = 1,2, \ldots\}$ adalah distribusi stasioner dari rantai Markov solusi unik dan positif dari $\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij} \quad , j = 0,1,2, \ldots dengan\ \sum_j^{\infty} \pi_j = 1.$

2.7 Rantai Markov Orde-1

Pertimbangkan data dari pengamatan tak hingga Rantai Markov dengan *State m* (1,2 .....,*m*) sampai n transisi yang telah terjadi. Misalkan n_{ij} adalah jumlah transisi dari i ke j (i,j=1,2,.....,m). Maka jumlah baris $\sum_{j=i}^{m} n_{ij} = n_i$. Nilai - nilai ini dapat direpresentasikan sebagai

	1	2	3	…	m	
1	n_{11}	n_{12}	n_{13}	…	n_{1m}	n_1
2	n_{21}	n_{22}	n_{23}	…	n_{2m}	n_2
3	n_{31}	n_{32}	n_{33}	…	n_{3m}	n_3
…	….	….	….	…	…	
m	n_{m1}	n_{m2}	n_{m3}	….	n_{mm}	n_m
						n

(2.9)

Maka matriks peluang transisi dari rantai Markov **P**,

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1m} \\ p_{21} & P_{22} & \dots & P_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{M1} & P_{M2} & \cdots & P_{MM} \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

Kami tertarik dengan estimasi elemen **P**, kita memberikan notasi estimasi dengan $\hat{P}_{ij}$ (i,j = 1,2,….,m). Untuk keadaan awal i dan sejumlah percobaan n_i, sampel dari jumlah transisi $(n_{i1,}n_{i2}, \dots, n_{im})$ dapat dianggap sebagai sampel ukuran n_i dari distribusi multinominal dengan probabilitas $(P_{i1,}P_{i2}, \dots, P_{im})$, sehingga $\sum_{j=i}^{m} P_{ij} = 1$ (Bhat dan Miller, 2002). Hasil probabilitas ini dapat diberikan sebagai

$$P(P_{i1,}P_{i2}, \dots, P_{im}, n_i) = \frac{n!}{n_{i1}!\, n_{i2}! \dots n_{im}!} P_{i1}^{n_{i1}} P_{i2}^{n_{i2}} \dots . P_{im}^{n_{im}} \tag{2.11}$$

dengan $\sum_{j=i}^{m} n_{ij} = n_i$ dan $\sum_{j=i}^{m} P_{ij} = 1$.

Memperluas argumen ini untuk keadaan awal m (1,2,3,......,m), ketika rincian jumlah percobaan n menjadi (n_1, n_2,...., n_m), probabilitas yang sebenarnya dari jumlah transisi seperti pada (2.9) diberikan oleh

$$\prod_{i=1}^{m} \frac{n!}{n_{i1}!\, n_{i2}! \ldots . n_{im}!}\, P_{i1}^{n_{i1}}\, P_{i2}^{n_{i2}} \ldots . P_{im}^{n_{im}} \tag{2.12}$$

Dengan menggunakan metode *maximum likelihood estimation* (Basawa dan Prakasa Rao, 1980; Bhat dan Miller, 2002; Billingsley, 1961). Fungsi *likelihood* f (**P**) dan logaritma natural L (**P**) yang dinyatakan sebagai

$$f(\boldsymbol{P}) = \prod_{i=1}^{m} \frac{n!}{n_{i1}!\, n_{i2}! \ldots . n_{im}!}\, P_{i1}^{n_{i1}}\, P_{i2}^{n_{i2}} \ldots . P_{im}^{n_{im}} \tag{2.13}$$

$$L\,(\boldsymbol{P}) = \ln \mathrm{B} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} n_{ij}\, ln\, P_{ij} \tag{2.14}$$

dimana ln B berisi semua ketentuan yang tidak bergantung pada P_{ij}.

Dari (2.14) dapat juga dicatat bahwa n_{ij} adalah statistik yang cukup untuk estimasi peluang transisi P_{ij} (i, j = 1,2,3, ..., m).

Untuk mendapatkan estimasi maksimum *likelihood*, kami memaksimalkan (2.14) dalam kondisi $\sum_{j=i}^{m} P_{ij} = 1$ (i $= 1,2, \ldots \ldots,$ m). Menggabungkan kondisi ini di (2.14), sehingga kita dapat menulis

$$L(\boldsymbol{P}) = \ln B + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m-1} n_{ij}\, ln\, P_{ij} + \sum_{i=1}^{m} n_{im}\, ln\, (1 - P_{i1} - P_{i2} - \ldots - P_{i,m-1}) \tag{2.15}$$

Dari struktur fungsi log *likelihood* $L(\boldsymbol{P})$ jelas bahwa estimasi dapat diperoleh secara terpisah untuk nilai m dari i = 1,2,3,…,m. Untuk nilai spesifik dari *i* kita miliki

$$L_i(\boldsymbol{P}) = \ln B + \sum_{j=1}^{m-1} n_{ij}\, ln\, P_{ij} + n_{im}\, ln\, (1 - P_{i1} - P_{i2} - \ldots - P_{i,m-1}) \qquad (2.16)$$

Untuk nilai tetap dari *i*, log *likelihood* pada (2.16) dapat dibedakan hubungan dengan P_{ij} untuk j = 1,2, ..., m -1. Pengaturan turunan m-1 yang dihasilkan sama dengan nol mengarah ke sistem persamaan yang diselesaikan untuk hasil P_{ij} yaitu

$$\hat{P}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_i} \qquad i.j = 1,2, \ldots , m \qquad (2.17)$$

2.8 Analisis χ2 *(Chi–Square)*

Untuk menguji apakah kenyataan yang diamati dapat berasal dari rantai Markov dengan matriks peluang transisi yang diberikan, kami mempertimbangkan hipotesis nol

$$H_0 : P = P^0 \qquad (2.18)$$

Untuk *n* besar dapat ditunjukkan bahwa n_{ij} berdistribusi normal asimptotik dan statistik $n_i^{1/2}\, (\widehat{P_{ij}} - P_{ij})$ memiliki distribusi normal asimptotik dengan rata-rata 0 dan varian $P_{ij}\,(1 - P_{ij})$. Berdasarkan informasi ini, uji statistik yang identik dengan statistik *good of fit* dapat diperoleh. Statistik seperti itu dapat ditulis sebagai

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{n_i(\widehat{P_{ij}} - P_{ij}^0)^2}{P_{ij}^0} \qquad (2.19)$$

Dimana penjumlahan dalam (2.19) hanya bisa diambil alih (*i*, *j*) untuk yang $P_{ij}^0 > 0$. Dibawah H_0 statistik dalam (2.19) memiliki distribusi X^2dengan m (m-1) - d derajat kebebasan, dimana *d* adalah jumlah nol padai $\mathbf{P}^0$.

Uji statistik asimptotik ekuivalen diperoleh dengan kriteria rasio *likelihood* berdasarkan lemma Neyman-Pearson. Kriteria rasio *likelihood* untuk H_0 yang diberikan oleh (2.18) dapat diperoleh:

$$\Lambda = \frac{f(\boldsymbol{P}^0)}{f\,(\widehat{\boldsymbol{P}})} \tag{2.20}$$

Dimana $f(\widehat{\boldsymbol{P}})$ adalah nilai maksimum dari fungsi *likelihood* (2.13) yang diperoleh dengan mensubstitusi estimasi (2.17) didalamnya. Dari teori statistik diketahui bahwa ketika H_0 adalah benar, $-2\,ln\,\Lambda$ memiliki distribusi X^2 dengan m (m-1) derajat kebebasan. Dalam hal ini yang kita miliki

$$-2 \ln \Lambda = 2\left[L(\widehat{P}) - L(P^0)\right]$$

$$= 2 \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} n_{ij}\, ln \; \frac{n_{ij}}{n_{ij}\, P_{ij}^0} \tag{2.21}$$

2.8.1 Menguji Independensi Terhadap Rantai Markov Orde Pertama

Misalkan kita menginginkan tes untuk hipotesis nol bahwa observasi yang dikumpulkan independen, alternatif terhadap proses yang diamati adalah Rantai Markov orde pertama. Kami dapat meninjau kembali hipotesis yang diberikan sebelumnya pada (2.18) untuk mengeksplorasi masalah ini. Yaitu, mempertimbangkan

$$H_0 : P = P^0$$

dimana P^0 memiliki baris identik. Lebih khusus, misalkan $\mathbf{P}^0$ terdiri dari m baris identik $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m)$. Ketika probabilitas ini tidak diketahui, estimasi maksimum *likelihood* dapat ditentukan sebagai berikut.

Biarkan $n_{ij} = \sum_{i=1}^{m} n_{ij}$. Fungsi log *likelihood* yang sesuai dengan (2.14) sekarang dapat ditulis sebagai

$$\mathrm{L}(\pi) = \ln \mathrm{B} + \sum_{j=1}^{m} n_{ij} \, ln \, \pi_j \tag{2.22}$$

Gunakan (2.22) mengarah ke perkiraan maksimum *likelihood*

$$\widehat{\pi}_j = \frac{n_j}{n_i}, j = 1, \ldots, m \tag{2.23}$$

Statistik χ2 digunakan untuk menguji independensi terhadap Rantai Markov orde pertama (Bhat dan Miller, 2002; Billingsley, 1961; Basawa dan Prakasa Rao, 1980).

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{(n_{ij} - n_i n_{ij}/n)^0}{n_i n_{ij}/n} \tag{2.24}$$

Dengan derajat kebebasan $(m - 1)^2$. [dari entri m^2, jumlah baris m adalah tetap dan probabilitas (m - 1) diperkirakan. Maka derajat kebebasan = m^2 - m - (m - 1) = $(m - 1)^2$]

Statistik rasio *likelihood* yang berkaitan dengan (2.21) berbentuk

$$2 \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} n_{ij} \, ln \, \left(\frac{n_{ij}}{n_i n_{ij}/n} \right) \tag{2.25}$$

dengan $(m-1)^2$ derajat kebebasan.

Prosedur yang disajikan di atas sesuai untuk hipotesis alternatif uji independensi terhadap Rantai Markov orde pertama. Basawa dan Prakasa Rao menggunakan koreksi otomatis yang terkait dengan Rantai Markov sebagai dasar untuk pengujian mereka.

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada Semester Genap Tahun Ajaran 2019/2020, yang bertempat di Pascasarjana jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Data Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data curah hujan harian bulan Desember tahun 2008 – November tahun 2018 yang terdiri dari dua lokasi yaitu BMKG Stasiun Klimatologi Pesawaran Lampung yang bertempat di Kabupaten Pesawaran dan Pos Hujan Kerjasama daerah Panjerejo yang bertempat di Kabupaten Pringsewu. Intensitas hujan adalah banyaknya curah hujan selama waktu hujan (Swarinoto dan Wirjohamidjojo, 2010). Di daerah tropis karena udara lebih panas maka mempunyai persediaan air yang lebih banyak, sehingga intensitas hujan yang besar dapat berlangsung dalam waktu yang lama (Tjasyono, 1992). Klasifikasi curah hujan menurut standar internasional *World Meteorological Organization* (WMO) (2008) dapat dilihat pada Tabel 1 berikut ini.

Tabel 3.1 Klasifikasi Curah Hujan Menurut Standar Internasional WMO

Kriteria Hujan	Intensitas Hujan (24 Jam)
Sangat Ringan	< 5.0 mm
Ringan	5.0 – 20 mm
Sedang/Normal	20 – 50 mm
Lebat	50 – 100 mm
Sangat Lebat	> 100 mm

Pengunaan data curah hujan akan dilakukan pembagian berdasarkan musim di Indonesia yang mengalami empat musim, yaitu musim Hujan (Desember – Februari), musim Pancaroba I (Maret – Mei), musim Kemarau (Juni – Agustus), dan musim Pancaroba II (September – November). Pembagian akan dilakukan dengan tujuan agar model Rantai Markov dapat memprediksi dengan baik peluang kejadian curah hujan pada setiap musimnya.

3.3 Metode Penelitian

Berdasarkan data curah hujan harian tahun 2008 - 2018 terdapat lima klasifikasi curah hujan dengan masing-masing klasifikasi curah hujan yaitu Tidak Hujan, Hujan Sangat Rendah, Hujan Rendah, Hujan Sedang, dan Hujan Lebat. Data curah hujan yang diperoleh memuat jumlah Transisi dari keadaan i ke keadaan j setiap periodenya. Data tersebut selanjutnya akan digunakan untuk mencari matriks peluang transisi. Melalui matriks peluang transisi dapat diketahui karakteristik Rantai Markov dalam melihat berapa besar persentase yang dihasilkan oleh setiap periode musim di Indonesia pada setiap klasifikasi curah hujan.

Adapun langkah – langkah yang akan dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menentukan *State* sebagai variabel penelitian yaitu

$$X_t = \begin{cases} tidak\ hujan & untuk\ curah\ hujan\ 0\ mm \\ hujan\ sangat\ ringan & untuk\ curah\ hujan\ < 5\ mm \\ hujan\ ringan & untuk\ curah\ hujan\ 5 - 20\ mm \\ hujan\ sedang & untuk\ curah\ hujan\ 20 - 50\ mm \\ hujan\ lebat & untuk\ curah\ hujan\ > 50\ mm \end{cases}$$

2. Menentukan matriks peluang transisi untuk setiap musim di Indonesia yang terbagi menjadi empat musim, yaitu musim hujan (Desember – Februari), musim pancaroba I (Maret – Mei), musim kemarau (Juni – Agustus), dan musim pancaroba II (September – November) dengan klasifikasi curah hujan sebagai *state*nya.
3. Membuat diagram atau bagan transisi yang menggambarkan perpindahan pada setiap *state*nya agar dapat dengan mudah digunakan untuk mencari nilai matriks peluang transisi beberapa langkah.
4. Membuktikan bahwa matriks peluang transisi bersifat *irreducible* (setiap *state* saling berkomunikasi).
5. Membuktikan jika rantai markov memiliki periode sama dengan satu (*aperiodic*).
6. Membuktikan bahwa rantai markov bersifat *positive recurrent*.
7. Membuktikan bahwa matriks peluang transisi mempunyai distribusi stationer sehingga dihasilkan peluang tetap untuk setiap klasifikasi hujan pada setiap periode musimnya menggunakan perangkat lunak Matlab 2013.

8. Membuat grafik analisis perbandingan distribusi stationer antar periode.
9. Membuat grafik analisis curah hujan.
10. Melakukan uji *chi-square* menggunakan perangkat lunak *SPSS 25*.
11. Menganalisis nilai *chi-square* dalam melihat tingkat kepercayaan data curah hujan apabila dimodelkan dengan Rantai Markov orde pertama

V. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian, maka didapatkan kesimpulan sebagai berikut:

1. Berdasarkan uji statistik $\chi 2$ terdapat hubungan antara data curah hujan dengan model rantai Markov, sehingga data dapat dimodelkan sebagai Rantai Markov orde pertama.
2. Peluang kejadian curah hujan dengan intensitas ringan di Pringsewu akan semakin meningkat apabila di Pesawaran mengalami curah hujan dengan intensitas sedang dengan peluang saat musim hujan 0.3297, musim pancaroba I 0.3529, musim kemarau 0.4157, musim pancaroba II 0,3333.
3. Peluang stasioner transisi curah hujan dengan intensitas tidak hujan menurun dari 0.8425 pada periode musim kemarau ke 0.5177 pada periode musim hujan.
4. Peluang stasioner transisi curah hujan dengan intensitas curah hujan ringan meningkat dari 0.0621 pada periode musim kemarau hingga 0.2261 pada periode musim hujan.
5. Matriks peluang transisi data curah hujan periode musim hujan

$$\mathrm{P}_1 = \begin{bmatrix} 0.6331 & 0.1104 & 0.1786 & 0.0487 & 0.0292 \\ 0.4449 & 0.1711 & 0.2700 & 0.0951 & 0.0190 \\ 0.4124 & 0.1804 & 0.2680 & 0.1082 & 0.0309 \\ 0.2637 & 0.1429 & 0.3297 & 0.2088 & 0.0549 \\ 0.4000 & 0.1111 & 0.2444 & 0.1111 & 0.1333 \end{bmatrix}$$

6. Matriks peluang transisi data curah hujan periode musim pancaroba I

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0.7768 & 0.1030 & 0.0923 & 0.0236 & 0.0043 \\ 0.5628 & 0.1674 & 0.1628 & 0.0884 & 0.0186 \\ 0.4362 & 0.1745 & 0.2148 & 0.1409 & 0.0336 \\ 0.3699 & 0.1370 & 0.2466 & 0.1781 & 0.0685 \\ 0.1176 & 0.2353 & 0.3529 & 0.2353 & 0.0588 \end{bmatrix}$$

7. Matriks peluang transisi data curah hujan periode musim kemarau

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0.9136 & 0.0465 & 0.0332 & 0.0066 & 0.0000 \\ 0.6335 & 0.1491 & 0.1615 & 0.0373 & 0.0186 \\ 0.4096 & 0.2530 & 0.2651 & 0.0723 & 0.0000 \\ 0.1935 & 0.1935 & 0.3548 & 0.1935 & 0.0645 \\ 0.3333 & 0.1667 & 0.4167 & 0.0833 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

8. Matriks peluang transisi data curah hujan periode musim pancaroba II

$$P_4 = \begin{bmatrix} 0.8422 & 0.0880 & 0.0399 & 0.0233 & 0.0066 \\ 0.4837 & 0.2418 & 0.1895 & 0.0719 & 0.0131 \\ 0.4839 & 0.1398 & 0.2043 & 0.1613 & 0.0108 \\ 0.4800 & 0.2000 & 0.1400 & 0.1600 & 0.0200 \\ 0.0000 & 0.1667 & 0.3333 & 0.2500 & 0.2500 \end{bmatrix}$$

9. Distribusi stationer mewakili persentase peluang curah hujan jangka panjang untuk setiap klasifikasi intensitas curah hujan, ditunjukkan oleh tabel berikut:

MUSIM	**PERSENTASE PELUANG CURAH HUJAN (%)**				
	Tidak Hujan	Hujan Sangat Ringan	Hujan Ringan	Hujan Sedang	Hujan Lebat
Musim Hujan	51.77	13.72	22.61	8.40	3.38
Musim Pancaroba I	67.27	12.43	12.99	5,91	1.45
Musim Kemarau	84.25	6.86	6.21	1.59	0.23
Musim Pancaroba II	74.60	11.64	7.84	4.90	1.10

DAFTAR PUSTAKA

Ameur L. S., dan Haddad B. 2007. "Analysis of precipitation data by approach Markovienne" Larhyss journal, no. 6, pp. 7-20.

Barry R.G. dan Chorley R.J. 1998. Atmosphere, Weather, and Climate. Seventh Edition. London: Routledge Publisher, ISBN 0-415-16020-0, 409 hal.

Bartholomew, D.J. 1967. *Stochastic Model for Social Processes*. New York: John Wiley and Sons.

Basawa, I.V. dan Prakasa Rao, B.L.S. 1980. *Statistical Inference for Stochastic Processes*. New York: Academic Press.

Bhat, U.N. dan Miller, G.K. 2002. *Elements of Applied Stochastic Processes*. New York: John Wiley

Billingsley, P. 1961. *Statistical Methods in Markov Chain*. Ann. Math. Stat, 32, 12-40.

Castaneda, L.B., Arunachalam, V., dan Dharmaraja, S. 2012. *Introduction to Probability and Stochastic Processes With Application*. John Wiley & Sons,Inc., New Jersey.

Cox, D. R. dan Miller, H. D. 1965. *The Theory of Stochastic Processes.* Methuen, London.

Dash P. R. 2012. A Markov Chain Modelling Of Daily Precipitation Occurrences Of Odisha. International Journal of Advanced Computer and Mathematical Sciences, Vol 3, Issue 4, pp 482-486.

Grimmet G,R., Stirzaker D.R. 2001. *Probability and Random Processes. 3rd ed*. Oxford (GB): Clarendon Press.

Gross, D. 2008. *Fundamentals Of Queueing Theory*. John Willey and Sons. New York.

Hayter, A. 2007. *Probability and Statistics for Engineers and Scientists* (3rd ed.). Victoria, Australia: Thomson Brooks/Cole.

Henry, N., McGinnis, R., dan Tegtmeyer, H. 1971. A finite model of mobility. Journal of Mathematical Sociology 1, 107-118.

Hillier, F. S. dan Lieberman, G. J. 2001. *Introduction to Operation Research*. 7th ed. McGraw Hill Companies Inc., New York.

Indrabayu, Harun N, Pallu S.M., Achmad A. 2011. Prediksi Hujan di Wilayah Makassar Menggunakan Metode Wavelet-Neural Network. Makassar. Universitas Hassanudin.

Jimoh, O. D., dan Webster, P. 1999. Stochastic modelling daily rainfall in Nigeria: intra-annual variation of model parameters. Journal of Hydrology 222:1- 17.

Kijima, M. 1997. *Markov Process for Stochastic Modelling*. Chapman & Hall, London.

Kottegoda N. T., Natale L., dan Raiteri E. 2004. Some considerations of periodicity and persistence in daily rainfalls. Journal Hydrol. 296:23–37.

Langi, Y. A. R. 2011. Penetuan Klasifikasi State pada Rantai Markov dengan mengunakan Nialai Eigen dari Matriks Peluang Transisi. Jurnal ilmiah Sains No.1, Vol.11, Hal.124.

McGinnis, R. 1968. Stochastic model of social mobility. American Sociological Review 33, 712-722.

N'guessan B. V. H., Saley M. B., Pop S., Terebech R., Be B., Djagoua E. V., Kouame F., Borda M., dan Affıan K. 2014. Markovian approach for analysis and prediction of monthly precipitation field in the department of Sinfra. International Journal of Engineering Research and General Science, Volume 2, Issue 1, January.

Osaki, Shunji. 1992. *Applied Stochastic System Modeling*. Berlin : Springer-Verlag

Privault, N. 2013. *Understanding Markov Chain: Examples and Applications*. Springer Science & Business Media, Singapore.

Reza, M. 2007. *Penentuan Peluang Transisi t langkah dan Uji Orde dari Suatu Rantai Markov (Studi kasus: Barisan basa nukleotisida Homo Sapiens).*

Ross, S. 2007. *Introduction to Probability Model*. John Wiley & Sons Inc. New York.

Srikanthan R., dan Mc Monan T. A. 1984. Stochastic generation of rain-fall and evaporation data. AWRC technical paper No: 84, 301.

Suhartono, D. 2013. Markov Chain. Retrieve November 17, 2014, from School of Computer Science Binus University: http://socs.binus.ac.id/2013/06/30/markov-chain/

Tjasyono, B. 1992. *Klimatologi Terapan.* Pionir Jaya, Bandung.

Wirjohamidjojo, S., dan Swarinoto, Y. 2010. *Iklim Kawasan Indonesia (Dari Aspek Dinamik – Sinoptik)*. Penerbit Badan Meteorologi, Klimatologi, dan Geofisika,

World Meteorological Organization. 2008. Guide to Meteorological Instruments and Methods of Observation. Geneva: World Meteorological Organization.

Zada, T.M.S. 2016. Model Markov untuk Pengambilan Keputusan Medis. Universitas Sumatera Utara, Medan.