PENENTUAN PREMI JENIS-JENIS ASURANSI DENGAN PENDEKATAN HUKUM MORTALITA GOMPERTZ DAN MAKEHAM MENGGUNAKAN SIMULASI KOMPUTASI

(Skripsi)

Oleh

RAHMAD HIDAYATULLOH

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

ABSTRACT

DETERMINATION OF INSURANCE TYPES PREMIUM WITH THE GOMPERTZ LAW MORTALITY APPROACH AND MAKEHAM USING COMPUTATION SIMULATION

By

Rahmad Hidayatulloh

Life insurance premium is the amount of funds that must be paid by the customer to the company in a certain amount. The amount of life insurance premiums must be set appropriately so that they are reasonable and not discriminatory. So using the equivalen principle, by defining the amount of loss of the insurance company (L) as a random variable of the present value of compensation amounting to the present value of the annuity denoted E [L] = 0. The present value of compensation and the present value of annuities can be calculated using various methods. The methods used are Discrete, Continuous, Continuous Discount, and Semi Continuous methods. The application of these methods in this study is used to evaluate the calculation of life insurance premiums with the rate of mortality from mortality tables, as well as the rate of death that is approached by the law of mortality of Gompertz and Makeham. Calculation of computation of premium types of insurance using the Matlab R2013b program. The use of this program aims to facilitate the calculation process with fast time.

Keywords: Premiums, Equivalen Principle, Force of Mortality, Gompertz Mortalita Law and Mortalita Makeham Law, Computation Simulation

ABSTRAK

PENENTUAN PREMI JENIS-JENIS ASURANSI DENGAN PENDEKATAN HUKUM MORTALITA GOMPERTZ DAN MAKEHAM MENGGUNAKAN SIMULASI KOMPUTASI

Oleh

Rahmad Hidayatulloh

Premi asuransi jiwa adalah besarnya dana yang harus dibayarkan oleh nasabah kepada perusahaan dalam jumlah tertentu. Besarnya premi asuransi jiwa harus ditetapkan dengan tepat sehingga bersifat wajar dan tidak diskriminatif. Sehingga menggunakan prinsip keseimbangan, dengan mendidefinisikan jumlah kerugian perusahaan asuransi (L) sebagai variabel acak dari nilai sekarang santunan sebesar nilai sekarang anuitas yang dinotasikan $E[L] = 0$. Nilai sekarang santunan dan nilai sekarang anuitas dapat dihitung menggunakan berbagai macam metode. Adapun metode yang digunakan adalah metode Diskrit, Kontinu, Diskonto Kontinu, dan Semi Kontinu. Penerapan metode-metode tersebut dalam penelitian ini digunakan untuk mengevaluasi perhitungan premi asuransi jiwa dengan tingkat laju kematian dari tabel mortalita, serta tingkat laju kematian yang didekati dengan hukum mortalita Gompertz dan Makeham. Perhitungan komputasi premi jenis-jenis asuransi menggunakan program Matlab R2013b. Penggunaan program ini bertujuan untuk memudahkan proses perhitungan dengan waktu yang cepat.

Kata kunci: Premi, Prinsip Keseimbangan, Tingkat Laju Kematian, Hukum Mortalita Gompertz dan Hukum Mortalita Makeham, Simulasi Komputasi

PENENTUAN PREMI JENIS-JENIS ASURANSI DENGAN PENDEKATAN HUKUM MORTALITA GOMPERTZ DAN MAKEHAM MENGGUNAKAN SIMULASI KOMPUTASI

Oleh

Rahmad Hidayatulloh

Skripsi
Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
SARJANA SAINS

Pada
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

Judul Skripsi : **PENENTUAN PREMI JENIS-JENIS ASURANSI DENGAN PENDEKATAN HUKUM MORTALITA GOMPERTZ DAN MAKEHAM MENGGUNAKAN SIMULASI KOMPUTASI**

Nama Mahasiswa : *Rahmad Hidayatulloh*

Nomor Pokok Mahasiswa : 1517031033

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Drs. Rudi Ruswandi, M.Si.
NIP 19560208 198902 1 001

Subian Saidi, S.Si., M.Si.
NIP 19800821 200812 1 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Drs. Rudi Ruswandi, M.Si.** .....

Sekretaris : **Subian Saidi, S.Si., M.Si.** .....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Widiarti, S.Si., M.Si.** .....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Drs. Suratman, M.Sc.
NIP 19640604 199003 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **19 Juni 2019**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : **Rahmad Hidayatulloh**

Nomor Pokok Mahasiswa : **1517031033**

Judul : **Penentuan Premi Jenis-Jenis Asuransi dengan Pendekatan Hukum Mortalita Gompertz dan Makeham Menggunakan Simulasi Komputasi**

Jurusan : **Matematika**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri, bukan hasil orang lain, dan semua hasil tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 19 Juni 2019

Penulis

METERAI TEMPEL

TGL. 20

AADF3AFF750900876

6000

ENAM RIBU RUPIAH

Rahmad Hidayatulloh
NPM. 1517031033

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Rahmad Hidayatulloh, lahir di Gedung Agung pada tanggal 17 Mei 1997. Penulis adalah anak ke-enam dari enam bersaudara yang lahir dari pasangan Purwadi dan Juriyah.

Penulis menempuh pendidikan sekolah dasar di SD Negeri 1 Gedung Agung Kecamatan Jatiagung Kabupaten Lampung Selatan pada tahun 2003-2009. Kemudian melanjutkan Pendidikan sekolah menengah pertama (SMP) di SMP N 2 Jatiagung Kecamatan Jatiagung Kabupaten Lampung Selatan 2009-2012. Kemudian melanjutkan Pendidikan sekolah menengah atas (SMA) di SMA N 1 Jatiagung Kecamatan Jatiagung Kabupaten Lampung Selatan pada tahun 2012-2015.

Setelah menyelesaikan Pendidikan tingkat atas pada tahun 2015, Penulis diterima sebagai mahasiswa S1 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SNMPTN).

Pada tahun 2018, Penulis melakukan Prakterk Kerja Lapangan (PKL) di PT.PLN (Persero) Distribusi Lampung, sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu didunia kerja. Dan pada tahun yang sama pula Penulis melakukan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di

desa Sukaraja Tiga Kecamatan Marga Tiga Kabupaten Lampung Timur, sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat.

KATA INSPIRASI

"Dan Dia (pula) yang menjadikan malam dan siang silih berganti bagi orang yang ingin mengambil pelajaran atau orang yang ingin bersyukur"

(Q.S Al-furqon:62)

'"Wahai saudaraku, kalian tidak akan menguasai suatu ilmu kecuali dengan 6 syarat yang akan saya sampaikan: dengan kecerdasan, menuntutnya dengan semangat, dengan kesungguhan, dan memiliki bekal (investasi) , bersama pembimbing, serta waktu yang lama"

(Imam Syafi'i)

"Simpan kenangan di masa lalu dan lakukan yang terbaik untuk hari ini"

(Rahmad Hidayatulloh)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillah puji syukur kehadirat Allah SWT maha pengasih lagi maha penyayang. Dengan kerendahan hati Penulis persembahkan skripsi ini kepada :

Kedua Orang Tua Tercinta

yang selalu mencurahkan seluruh tenaga dan pikiran untuk keberhasilan Penulis dalam menuntut ilmu, memberi dukungan, bimbingan, nasehat, dan doa yang terus mengalir untuk kesuksesan Penulis.

Kakak-kakak dan Mba Tersayang

yang selalu memberikan dukungan, motivasi, dan selalu memanjatkan doa untuk keberhasilan dan kesuksesan Penulis.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Atas bimbingan dan motivasi dalam menyelesaikan skripsi.

Sahabat-sahabat Terbaik

yang selalu memberikan kebahagiaan dan keceriaan, terima kasih atas semua kenangan dan pengalaman yang telah kita lalui bersama. Semoga dapat menjadi pembelajaran berharga untuk kehidupan kita yang lebih baik

Almamater Tercinta, Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillahirobbil'alaamiin, puji dan syukur Penulis panjatkan kepada Allah SWT atas izin serta ridho-Nya, sehingga Penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Penentuan Premi Jenis-Jenis Asuransi dengan Pendekatan Hukum Mortalita Gompertz dan Makeham menggunakan Simulasi Komputasi". Shalawat serta salam tak lupa Penulis sanjungkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah menjadi suri tauladan yang baik bagi kita semua.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini tidak terlepas dari bimbingan, bantuan, dan kerjasama dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini Penulis ingin mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Drs. Rudi Ruswandi, M.Si. selaku Dosen Pembimbing I, yang senantiasa selalu membimbing dan memberikan arahan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini ditengah-tengah waktu kesibukannya.
2. Bapak Subian Saidi, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing II, yang telah memberikan bimbingan serta saran yang membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
3. Ibu Widiarti, S.Si.,M.Si. selaku Dosen Pembahas, terima kasih atas kesediaannya untuk membahas, memberikan saran dan kritik yang membangun dalam penyelesaian skripsi ini.
4. Ibu Dr. Khoirin Nisa, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Akademik, terima kasih atas bimbingan dan pembelajarannya dalam menjalani perkuliahan.
5. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

6. Bapak Drs. Suratman Umar, M. Sc. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Seluruh Dosen dan Karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
8. Bapak, Emak, Kakak-kakak, dan seluruh keluarga besar yang selalu memberi dukungan, motivasi, semangat dan perhatian kepada Penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
9. Sahabat-sahabat terbaik Ario Pandu, M.Rizki Multazam, Dony Cheristian V., Bagus Erica Y., Agus J., Rhizardi Amargie M., Irma Wati., Siska Diah Ayu L., Yulia Sari, Putri Isnaini C.B., Sandria Febrianti, Yulia Novita, dan Riana yang selalu memberikan semangat kepada Penulis dalam menyusun skripsi ini.
10. Teman-teman mahasiswa jurusan Matematika angkatan 2015 dan keluarga besar Matematika FMIPA unila..
11. Seluruh pihak yang terlibat dan membantu dalam menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan, oleh karena itu kritik dan saran yang membangun sangat Penulis harapkan. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi Penulis dan bagi pembaca.

Bandar Lampung, 19 Juni 2019

Penulis,

Rahmad Hidayatulloh

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR xvi

DAFTAR TABEL xvii

DAFTAR SIMBOL xviii

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah 1

1.2 Tujuan Penelitian 4

1.3 Manfaat Penelitian 4

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Fungsi Kelangsungan Hidup 5

2.2 Distribusi Kelangsungan Hidup 6

2.3 Laju Tingkat Kematian 8

2.4 Bunga 10

2.5 Laju Tingkat Suku Bunga 13

2.6 Tabel Mortalitas 14

2.6.1 Distribusi Gompertz 18

2.6.2 Hukum Mortalita Gompertz 19

2.6.3 Distribusi Makeham 22

2.6.4 Hukum Mortalita Makeham 23

2.7 Asuransi 24

2.7.1 Asuransi yang Dibayarkan Segera Pada Saat Meninggal (Kontinu) 25

2.7.2 Asuransi yang Dibayakan Pada Akhir Tahun Meninggal (Diskrit) 25
2.7.3 Asuransi yang Dibayarkan Segera Pada 1/p Tahun Meninggal (1/p) 26
2.7.4 Hubungan Antar Asuransi 27
2.8 Anuitas 28
2.8.1 Anuitas Pasti (Pembayaran Tahunan) 28
2.8.2 Anuitas Pasti (Pembayaran p-kali Setahun) 29
2.8.3 Anuitas Pasti (Pembaran Kontinu) 30
2.9 Anuitas Hidup (*Life Annuity)* 31
2.9.1 Anuitas Hidup Kontinu (*Continous Life Annuity*) 31
2.9.2 Anuitas Hidup Diskrit (*Discrete Life Annuity*) 33
2.9.3 Anuitas Hidup dengan P-Kali Pembayaran 34
2.9.4 Anuitas Hidup Aportionabel (*Apportionable Life Annuity*) 35
2.10 Premi Asuransi Jiwa 36
2.10.1 Premi Asuransi Kontinu 37
2.10.2 Premi Asuransi Diskonto Kontinu 38
2.10.3 Premi Asuransi Semi Kontinu 39
2.10.4 Premi Asuransi Diskrit 40
2.11 Metode Kuadrat Terkecil Nonlinear 40
2.12 Simulasi Penaksir Parameter 44
2.12.1 Simulasi Penaksir Parameter Gompertz 44
2.12.2 Simulasi Penaksir Parameter Makeham 45
2.13 Transformasi Invers 47
2.14 Simulasi Membangkitkan Variabel Acak 51

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian 53
3.2 Data Penelitian 53
3.3 Metodologi Penelitian 54

3.4 Algoritma Pemrograman 58

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Premi Jenis-Jenis Asuransi pada Tabel Mortalita Indonesia (TMI) III Tahun 2011 untuk Perempuan 60
4.1.1 APV dari Manfaat Asuransi Jiwa Seumur Hidup yang Dibayarkan Diakhir Tahun Kematian (Diskrit) 61
4.1.2 APV Dari Manfaat Asuransi Jiwa Seumur Hidup yang Dibayarkan Segera Setelah Nasabah Meninggal (Kontinu) 61
4.1.3 APV Dari Manfaat Asuransi Jiwa Seumur Hidup Yang Dibayarkan Pada $1/p$ Tahun Nasabah Meninggal 62
4.1.4 PV dari Anuitas Hidup Diskrit 63
4.1.5 PV dari Anuitas Hidup Kontinu 64
4.1.6 PV dari Anuitas Hidup Dengan p-kali Pembayaran 64
4.1.7 Premi Jenis-Jenis Asuransi Tabel Mortalita III Tahun 2011 Perempuan 65
4.2 Premi Jenis-Jenis Asuransi pada Tabel Mortalita Indonesia (TMI) III Tahun 2011 untuk Laki-Laki 68
4.2.1 APV dari Manfaat Asuransi Jiwa Seumur Hidup yang Dibayarkan Diakhir Tahun Kematian (Diskrit) 68
4.2.2 APV dari Manfaat Asuransi Jiwa Seumur Hidup yang Dibayarkan Segera Setelah Nasabah Meninggal (Kontinu) 69
4.2.3 APV dari Manfaat Asuransi Jiwa Seumur Hidup yang Dibayarkan pada $1/p$ Tahun Nasabah Meninggal 70
4.2.4 PV dari Anuitas Hidup Diskrit 70
4.2.5 PV dari Anuitas Hidup Kontinu 71
4.2.6 PV dari Anuitas Hidup dengan p-kali Pembayaran 72
4.2.7 Premi Jenis-Jenis Asuransi Tabel Mortalita III Tahun 2011 untuk Laki-Laki 73

4.3 Premi Jenis-Jenis Asuransi dengan Pendekatan Hukum Mortalita Gompertz pada Tabel Mortalita Indonesia III Tahun 2011 75
4.4 Premi Jenis-Jenis Asuransi dengan Pendekatan Hokum Mortalita Makeham pada Tabel Mortalita Indonesia III Tahun 2011 81
4.5 Hasil Perhitungan Premi Jenis-Jenis Asuransi pada TMI III Tahun 2011 dengan Pendekatan Hukum Mortalita Gompertz dan Makeham..... 87

V. KESIMPULAN

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN

DAFTAR GAMBAR

Halaman

Gambar 2.1 Plot fungsi densitas eksponensial 48

Gambar 2.2 Plot fungsi distribusi eksponensial 48

Gambar 4.1 Grafik percepatan tingkat laju kematian hukum mortalita Gompertz 77

Gambar 4.2 Grafik percepatan tingkat laju kematian hukum mortalita Makeham..... 82

DAFTAR TABEL

Halaman

Tabel 1. TMI III Tahun 2011 untuk laki-laki 53

Tabel 2. TMI III Tahun 2011 untuk perempuan 54

Tabel 3. Pendugaan parameter hukum mortalita Gompertz 76

Tabel 4. Hasil perhitungan premi jenis-jenis asuransi dengan pendekatan hukum mortalita Gompertz 80

Tabel 5. Pendugaan parameter hukum mortalita Makeham 82

Tabel 6. Hasil perhitungan premi jenis-jenis asuransi dengan pendekatan hukum mortalita Makeham 85

Tabel 7. Hasil perhitungan premi jenis-jenis asuransi untuk perempuan 86

Tabel 8. Hasil perhitungan premi jenis-jenis asuransi untuk laki-laki.... 88

DAFTAR SIMBOL

$a_{\overline{n}\vert}$	: nilai sekarang dari anuitas akhir (*annuity-immediate)* pembayaran tahunan
$\ddot{a}_{\overline{n}\vert}$	: nilai sekarang dari anuitas awal (*due annuity)* Pembayaran tahunan
$a_{\overline{n}\vert}^{(p)}$	: nilai sekarang dari anuitas akhir (*annuity-immediate)* pembayaran p-kali setahun
$\ddot{a}_{\overline{n}\vert}^{(p)}$	: nilai sekarang dari anuitas awal (*due annuity)* pembayaran p kali setahun
$\bar{a}_{\overline{n}\vert}$	: nilai sekarang dari anuitas akhir (*annuity-immediate)* pembayaran kontinu
$\bar{a}_x$	: anuitas hidup kontinu pembayaran kontinu setiap saat sebesar 1 per akhir tahun
$\ddot{a}_x$	: anuitas hidup diskrit pembayarannya setiap awal tahun
$\ddot{a}_x^{(p)}$	: anuitas hiudp p-kali dibayarkan $1/p$ pada awal setiap $1/p$ tahun selama orang berusia (x) tersebut hidup hingga $K + (J+1)/p$
$\bar{A}_x$	: *actuarial present value* (APV) dari asuransi Kontinu
A_x	: *actuarial present value* (APV) dari asuransi Diskrit
${A_x}^p$	: *actuarial present value* (APV) dari asuransi P-kali
A	: faktor terjadinya kecelakaan dalam hukum mortalita
b_t	: nilai tunai manfaat kematian
B	: peluang atau kemungkinan
Bc^x	: faktor usia dalam hukum mortalita
c	: peningkatan ketidakmungkinan menahan kerusakan
d	: fungsi tingkat diskon
d_x	: jumlah kelompok orang yang meninggal pada usia x
δ	: laju tingkat suku bunga (*force of interest*).

$F(t) \cong {}_tq_x$	: fungsi distribusi dari $T(x)$ peluang seorang berusia x tahun akan meninggal sebelum berusia $x+t$ tahun
i	: tingkat suku bunga (*Rate of interest annually*)
$i^{(p)}$	: tingkat suku bunga nominal
J	: nilai fungsi integer terbesar dari jumlah keseluruhan p-kali dari tahun orang itu hidup hingga tahun meninggal
$K(x)$	: sisa usia seseorang berusia x dalam kasus diskrit
L	: jumlah kerugian (loss total)
l_x	: jumlah sekelompok orang yang hidup pada usia x
μ_x	: percepatan hukum mortalita pada usia x
$\mu(x)$	: tingkat laju kematian pada usia x
$\mu(x+t)$	: percepatan tingkat laju kematian pada usia x
p	: banyaknya pembayaran yang dilakukan dalam 1 tahun
$\bar{P}(\bar{A}_x)$	: premi kontinu asuransi jiwa seumur hidup
$\bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{\overline{1/p\|}}.p$	: premi diskonto kontinu asuransi jiwa seumur hidup
$P^{(p)}(\bar{A}_x)$	: premi semi kontinu asuransi jiwa seumur hidup
$P^{(p)}(A_x)$	: premi diskrit asuransi jiwa seumur hidup
${}_{t\|}q_x$	: peluang meninggal yang ditangguhkan
R	: fungsi distribusi eksponensial
$s(x+t) \cong {}_tp_x$	: fungsi kelangsungan hidup adalah peluang orang berusia x tahun akan hidup mencapai usia $x+t$ tahun
$T(x)$	: sisa usia seseorang berusia x
v	: nilai sekarang (*present value*) dari pembayaran sebesar 1 satuan yang dilakukan 1 tahun kemudian
${}_{t\|u}q_x$	: peluang meninggal yang ditangguhkan atau kondisi yang menyatakan bahwa x akan berlangsung hidup sampai t tahun meninggal dalam u tahun
x	: usia
X	: variabel acak

1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Asuransi jiwa adalah sebuah kontrak dari perusahaan asuransi (pihak penanggung) kepada nasabahnya (tertanggung) bahwa apabila nasabah mengalami risiko kematian dalam hidupnya, perusahaan asuransi akan memberikan santunan (manfaat kematian) dengan jumlah tertentu kepada ahli waris nasabah tersebut (Effendie, 2015).

Masyarakat Indonesia saat ini sudah semakin sadar akan pentingnya asuransi jiwa. Hal ini, ditandai dengan besarnya pendapatan premi asuransi jiwa pada bulan September tahun 2018. Premi asuransi jiwa tersebut sebesar Rp.141,140,730.6 atau meningkat 7.05% dibandingkan periode yang sama di tahun sebelumnya yaitu Rp.131,845,983.6.

Premi asuransi jiwa adalah besarnya dana yang harus dibayarkan oleh nasabah kepada perusahaan dalam jumlah tertentu. Pada semua perusahaan asuransi dikenal premi tunggal (*net single premium*), premi tunggal yaitu pembayaran yang dilakukan pada waktu kontrak disetujui dan selanjutnya tidak ada pembayaran lagi (Sembiring, R.K, 1986). Namun pada prakteknya jarang sekali premi tunggal digunakan, disebabkan dana yang harus dibayarkan cukup besar dalam satu waktu. Oleh sebab itu, perusahaan asuransi seringkali menetapkan jumlah pembayaran premi yang dibuat tahunan. Premi tahunan ini dibayarkan pada awal tahun kontrak polis dan seterusnya selama

tertanggung tersebut hidup atau dibatasi sampai periode tahun tertentu yang disebut anuitas (periode pembayaran premi).

Besarnya premi asuransi jiwa harus ditetapkan dengan tepat sehingga bersifat wajar dan tidak diskriminatif. Penentuan besarnya premi asuransi harus mengikuti aturan prinsip perhitungan premi (*premium principle*) yang terdiri dari tiga prinsip yaitu prinsip persentil, keseimbangan, dan exponensial. Ketiga prinsip ini menekankan pada pengaruh suatu asuransi terhadap kekayaan perusahaan asuransi itu sendiri. Prinsip persentil dan exponensial mengurangi resiko kerugian dengan membuat nilai sekarang kerugian menjadi negatif, sedangkan pada prinsip keseimbangan nilai kerugiannya diekspekstasikan menjadi 0. Prinsip persentil dan prinsip eksponensial kurang baik diterapkan pada asuransi dengan jangka waktu lebih dari 10 tahun, hal ini disebabkan hasil perhitungan yang diperoleh tidak proposional (Bowers, dkk., 1997). Penelitian ini menggunakan aturan prinsip keseimbangan (*equivalen principle*), dengan mendidefinisikan jumlah kerugian perusahaan asuransi (L) sebagai variabel acak dari nilai sekarang santunan sebesar nilai sekarang anuitas yang dinotasikan $E[L] = 0$.

Nilai sekarang santunan dan nilai sekarang anuitas dapat dihitung menggunakan berbagai macam metode. Adapun metode yang digunakan adalah metode Diskrit, Kontinu, Diskonto Kontinu, dan Semi Kontinu. Metode Diskrit (*fully discrete*) yaitu nilai santunannya dibayarkan pada akhir tahun meninggal dan anuitasnya dibayarkan pada awal 1/p tahun. Metode Kontinu (*fully continuous*) yaitu nilai santunannya dibayarkan segera pada saat tertanggung meninggal dan anuitasnya dibayarkan pada akhir tahun kontrak polis. Metode Diskonto Kontinu (*discounted continuous*) yaitu

nilai santunannya dibayarkan setiap saat dan anuitasnya berbentuk *apportionable*. Metode semi kontinu (*semi continuous*) yaitu nilai santunannya berbentuk kontinu dan anuitasnya berbentuk diskrit.

Penerapan metode-metode tersebut dalam penelitian ini digunakan untuk mengevaluasi perhitungan premi asuransi jiwa dengan tingkat laju kematian dari tabel mortalita, serta tingkat laju kematian yang didekati dengan hukum mortalita Gompertz dan Makeham. Tabel mortalita merupakan tabel yang memuat peluang meninggalnya seseorang dalam suatu populasi. Tabel ini digunakan untuk memeriksa perubahan kematian populasi dari waktu kewaktu. Hukum mortalita Gompertz menyatakan bahwa seiring berjalannya waktu, maka tingkat laju ketidakmampuan menahan kerusakan akan meningkat. Hal ini menunjukkan bahwa semakin bertambahnya usia manusia maka tingkat laju kematiannya meningkat. Hukum mortalita Gompertz merupakan bentuk khusus dari hukum mortalita Makeham dengan mengabaikan factor terjadinya kecelakaan. Hukum mortalita Makeham menyatakan penyebab umum terjadinya kematian adalah pengaruh dari dua faktor yaitu terjadinya kecelakaan dan tingkat laju kematian.

Berdasarkan uraian permasalahan tersebut, penulis ingin melakukan penelitian tentang penentuan premi jenis-jenis asuransi dengan pendekatan hukum mortalita Gompertz dan Makeham. Perhitungan komputasi premi jenis-jenis asuransi menggunakan program Matlab R2013b. Penggunaan program ini bertujuan untuk memudahkan proses perhitungan dengan waktu yang cepat.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah :

1. Mempermudah perhitungan premi jenis-jenis asuransi jiwa seumur hidup dengan pendekatan hukum mortalita Gompertz untuk metode diskrit (*fully discrete*), kontinu (*fully continuous*), diskonto kontinu (*discounted continuous*) dan semi kontinu (*semi continuous*).

2. Mempermudah perhitungan premi jenis-jenis asuransi jiwa seumur hidup dengan pendekatan hukum mortalita Makeham untuk metode diskrit (*fully discrete*), kontinu (*fully continuous*), diskonto kontinu (*discounted continuous*) dan semi kontinu (*semi continuous*).

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah :

1. Menambah wawasan dan kemampuan berpikir mengenai teori yang telah didapat dari mata kuliah yang telah diterima dan menerapkannya kedalam perhitungan yang sebenarnya.
2. Hasil penelitian dapat digunakan untuk referensi perusahaan asuransi dalam menetapkan premi jenis-jenis asuransi.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Fungsi Kelangsungan Hidup

Misalkan (x) adalah seorang yang berusia x tahun pada saat polis asuransi ditandatangani dan sedangkan jarak antara waktu (x) sampai meninggal dunia (X) akan disebut sisa umur bagi (x). Sehingga terdapat peubah acak $T(x)$, yaitu $T(x) = X - x$ untuk $x \geq 0$. $T(x)$ menyatakan sisa umur bagi (x).

Fungsi distribusi dari $T(x)$ dinyatakan dengan $F(t)$ dan didefinisikan (Bowers, dkk., 1997) dengan :

$$F(t) = P(T(x) \leq t), \quad t \geq 0$$

$F(t)$ menyatakan peluang seorang berusia x tahun akan meninggal sebelum berusia $x + t$ tahun.

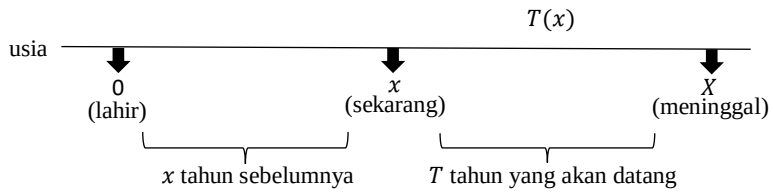
Secara umum fungsi kelangsungan hidup dapat dinyatakan dengan :

$$s(x + t) = 1 - F_{T(t)}(t) = P(T(x) > t) \tag{2.1.1}$$

$s(x + t)$ adalah peluang orang berusia x tahun akan hidup mencapai usia $x + t$ tahun.

2.2 Distribusi Kelangsungan Hidup

Dalam fungsi kelangsungan hidup untuk kasus kontinu, symbol $T(x)$ menyatakan sisa umur bagi seorang berusia x atau $T(x) = X - x$, dengan fungsi distribusinya dinyatakan sebagai berikut :



Gambar 2.1 Peluang waktu sisa hidup

Dengan notasi peluangnya :

$$ {}_tq_x = P(T(x) \leq t) $$

$$ {}_tp_x = 1 - {}_tq_x = P(T(x) > t) \tag{2.2.1} $$

Maka fungsi distribusi $T(x)$ nya adalah :

$$ \begin{aligned} F_{T(x)}(x) &= P(T(x) \leq t)|X > x) \\ &= P(X - x \leq t|X > x) \\ &= P(x \leq X \leq x + t|X > x) \\ &= \frac{F_x(x+t) - F_x(x)}{1 - F_x(x)} \\ &= \frac{(1 - s(x+t) - (1 - s(x))}{s(x)} \\ &= 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)} \\ &= {}_tq_x \end{aligned} \tag{2.2.2} $$

Maka,

$$P(T(x) > t) = 1 - P(T(x) \leq t)$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}\right)$$

$$= \frac{s(x+t)}{s(x)}$$

$$= {}_tp_x \qquad (2.2.3)$$

Peluang meninggal yang ditangguhkan dapat dinyatakan dengan ${}_{t|}q_x$, sehingga :

$${}_{t|}q_x = {}_tp_x \cdot q_{x+t} \qquad (2.2.4)$$

Dalam kasus diskrit, peluang meninggal sering disebut *Curtate Future Life Time*, dengan symbol $K(x)$. Secara teori, definisi dari peubah acak $K(x)$ adalah $K(x) = [T(x)]$ dengan simbol $[T(x)]$ yang menyatakan bilangan bulat terbesar atau sama dengan dari $T(x)$. Adapun secara informal $K(x)$ menyatakan berapa kali lagi ulang tahun yang dapat dirayakan oleh (x) sebelum ia meninggal dunia atau peubah acak diskrit yang menyatakan lamanya hidup (Futami, 1993). $K(x)$ adalah variabel acak diskrit dengan fungsi distribusi yang dinyatakan dengan ;

$$P(K(x) = k) = P(K = k)$$

$$= P([T(x)] = k$$

$$= P(k < T_{(x)} < k + 1)$$

$$= P\left(T_{(x)} < k + 1\right) - P\left(T_{(x)} < k\right)$$

$$= {}_{k+1}q_x - {}_kq_x$$

$$= (1 - {}_{k+1}p_x) - (1 - {}_kp_x)$$

$$= ({}_kp_x - {}_{k+1}p_x)$$

$$= ({}_k p_x \cdot q_{x+k})$$

$$= {}_{k|}q_x \qquad (2.2.5)$$

2.3 Laju Tingkat Kematian

Laju tingkat seseorang yang baru lahir dan akan meninggal antara unisa x dan $x + \Delta x$ dengan syarat pada usia x dapat dinyatakan dengan :

$$P(x \leq X \leq x + \Delta x | X > x) = \frac{F_x(x + \Delta x) - F_x(x)}{1 - F_x(x)}$$

Karena $F_x(x + \Delta x) - F_x(x)$ dapat dinyatakan sebagai fungsi limit, maka :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_x(x + \Delta x) - F_x(x)}{1 - F_x(x)} = \frac{\lim_{\Delta x \to 0} F_x(x + \Delta x) - F_x(x) \cdot \frac{\Delta x}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x \to 0} 1 - F_x(x)}$$

$$= \frac{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_x(x + \Delta x) - F_x(x)}{\Delta x} \cdot \Delta x}{\lim_{\Delta x \to 0} 1 - F_x(x)}$$

$$= \frac{F'(x)\Delta x}{1 - F(x)}$$

$$\cong \frac{f(x)}{1 - F(x)}$$

Untuk setiap usia x, laju tingkat kematiannya dari seorang yang berusia x tahun dapat dinyatakan dengan :

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} \qquad (2.3.1)$$

Atau

$$\mu(x + t) = \frac{f(x + t)}{1 - F(x + t)} \qquad (2.3.2)$$

Dengan $\mu(x+t)$ adalah probabilitas (peluang) sisa umur hidup seseorang yang berusia x tahun antara $t+\Delta t$ tahun dengan syarat ia masih hidup pada usia x sampai $x+t$ tahun (Futami, 1993).

Karena $s(x) = 1 - F(x)$ atau $F(x) = 1 - s(x)$, maka :

$$F'(x) = f(x) = -s'(x)$$

Sehingga diperoleh nilai laju kematiannya pada usia x adalah :

$$\mu(x) = \frac{-s'}{s(x)} = \frac{-1}{s(x)} \cdot \frac{d(s(x))}{d(x)}$$

$$= \frac{-d \ln s(x)}{d\, s(x)} \cdot \frac{d(s(x))}{d(x)}$$

$$= \frac{-d \ln s(x)}{d(x)}$$

$$\mu(x)\, dx = -d \ln s(x)$$

Dengan mengganti x menjadi y, maka diperoleh :

$$\mu(y)\, dy = -d \ln s(y)$$

Dan dengan menggunakan integral tentu pada batas x sampai $x+t$ maka diperoleh :

$$\int_x^{x+t} \mu(y)\, dy = -\int_x^{x+t} d \ln s(y)$$

$$= -\ln s(y) \mid_x^{x+t}$$

$$= -\{\ln s(x+t) - \ln s(x)\}$$

$$= -ln\left(\frac{s(x+t)}{s(x)}\right)$$

$$= -\ln\ {}_tp_x$$

$${}_tp_x = e^{-\int_x^{x+t} \mu(y)\, dy} \qquad (2.3.3)$$

Jika nilai laju kematian konstan ($\mu(y) = \mu$) untuk semua $y \geq 0$, artinya besar nilai dari laju tingkat kematian adalah sama untuk semua usia nasabah yang hidup, maka diperoleh:

$$s(x) = {}_tp_0 = e^{-\int_x^{x+t} \mu(y)\, dy} = e^{-\mu x} \tag{2.3.4}$$

Diketahui sebelumnya bahwa ${}_tq_x$ adalah fungsi distribusi dari $T(x)$, sehingga fungsi densitas dari $T(x)$ adalah :

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{d}{dt}\ {}_tq_x \\ &= \frac{d}{dt}\ (1 - {}_tq_x) \\ &= \frac{d}{dt}\ (1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}) \\ &= \frac{d}{dt}\ (-\frac{s(x+t)}{s(x)}) \\ &= -\frac{s(x+t)}{s(x)} \\ &= \frac{s(x+t)}{s(x)} \cdot \frac{s'(x+t)}{s(x)} \\ &= {}_tp_x \,.\, \mu(x+t) \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

2.4 Bunga

Bunga merupakan pembayaran yang dilakukan oleh peminjam sebagai balasan jasa atas pemakaian uang yang dipinjam. Jenis bunga yang digunakan adalah bunga majemuk. Bunga majemuk adalah perhitungan bunga dimana besar pokok jangka investasi selanjutnya adalah besar pokok sebelumnya ditambah dengan besar bunga

yang diperoleh (Futami, 1993). Besar bunga majemuk dapat dihitung dengan menggunakan rumus :

$$I = P_0 \, . \, i^n$$

Dengan :

I = *Interest value* (nilai bunga)

P_0 = Pokok investasi

i = *Rate of interest annually* (tingkat suku bunga)

n = *time* (jangka waktu investasi)

Setelah n tahun, total investasi menjadi :

$$P_n = P_0(1 + i)^n$$

Dalam bunga majemuk didefinisikan suatu fungsi v sebagai berikut :

$$v = \frac{1}{(1 + i)}$$

Dapat juga dituliskan sebagai berikut :

$$P_0 = \frac{P_n}{(1 + i)^n} = v^n P_n$$

Jika $n = 1$ dan $P_1 = 1$, maka $P_0 = v$, v adalah nilai sekarang (*present value*) dari pembayaran sebesar 1 satuan yang dilakukan 1 tahun kemudian.

Didefinisikan fungsi tingkat diskon d sebagai berikut :

$$d = \frac{i}{1+i} = iv = 1 - v \tag{2.4.1}$$

Karena v adalah nilai sekarang (*present value*) dari pembayaran sebesar 1 satuam yng dilakukan 1 tahun kemudian, apabila pembayarannya dilakukan 1 tahun lebih cepat,maka besarnya bunga hilang (Futami,1993).

$$d = 1 - v$$

Tingkat suku bunga selalu dipertanyakan pertahun atau per *annum* (p.a). tingkat bunga tahunan yang dinyatakan itu apakah diakhiri dengan p.a atau tidak, disebut tingkat bunga nominal. Simbol untuk tiggkat suku bunga nominal adalah $i^{(p)}$. Untuk suku bunga nominal dan suku bunga diskonto nominal dengan p kali pembayaran dalam satu tahun dapat didefinisikan sebagai berikut :

$$1 + i \cong \left(1 + \frac{i^p}{p}\right)^p$$

$$i^{(p)} = p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1\right] \tag{2.4.2}$$

$$1 - d = \left(1 + \frac{d^p}{p}\right)^p$$

$$d^{(p)} = p\left[1 - (1-d)^{\frac{1}{p}}\right] \cong p\left[1 - v^{1/p}\right] \tag{2.4.3}$$

Dengan p adalah banyaknya pembayaran yang dilakukan dalam 1 tahun.

2.5 Laju Tingkat Suku Bunga

Didefinisikan bahwa δ dari fungsi $A(t)$ adalah

$$\delta = \frac{d}{dt}\ln A(t) = \frac{A'(t)}{A(t)} \tag{2.5.1}$$

Dimana :

$$\frac{d}{dt}\ln A(t) = \frac{d}{dt}\ln\big(A(0)a(t)\big) = \frac{d}{dt}\ln A(0) + \frac{d}{dt}\ln a(t) = \frac{d}{dt}\ln a(t)$$

Sehingga didapat bahwa :

$$\delta = \frac{d}{dt}\ln A(t) = \frac{d}{dt}\ln a(t) \tag{2.5.2}$$

Dengan menggunakan Persamaan (2.5.1) dan dengan menggunakan turunan limit didapat bahwa :

$$\delta = \frac{A'(t)}{A(t)} = \lim_{h\to 0}\frac{A(t+h) - A(t)}{A(t)h}$$

Tingkat tahunan nominal yang diterima dalam $^1/_p$ tahun berikutnya ditambah p kali setahun pada waktu t. Dimisalkan bahwa $h = {}^1/_p$, sehingga :

$$\delta = \frac{A'(t)}{A(t)} = \lim_{h\to 0}\frac{a\big(t + {}^1/_p\big) - A(t)}{a(t)\,{}^1/_p}$$

Dengan memisalkan $a(t) = (1+i)^t$ dan dengan menggunakan Persamaan (2.4.2) didapat bahwa :

$$\lim_{p\to\infty} i^{(p)} = \delta \tag{2.5.3}$$

Untuk $p \to \infty$, dengan kata lain pembuangannya dapat dilakukan setiap saat, diperoleh nilai δ dengan menggunakan Persamaan (2.5.2)

$$\delta = \frac{d}{dt}\ln a(t)$$

$$\delta = \frac{d}{dt}\ln(1+i)^t$$

$$\delta = \frac{d}{dt}\mathrm{t}\ln(1+i)$$

$$\delta = \ln(1+i)$$

$$e^{-\delta t} = (1+i)^{-t} = v^t \tag{2.5.4}$$

Dan δ disebut dengan laju tingkat suku bunga (*force of interest*).

2.6 Tabel Mortalitas

Tabel mortalitas adalah cara ringkas untuk menunjukkan probabilitas dari anggota pada suatu populasi yang hidup atau mati pada usia tertentu. Tabel ini digunakan untuk memeriksa perubahan kematian dari populasi jaminan sosial dari waktu ke waktu . Tabel mortalitas (*life tables*) akan memuat peluang seseoang meninggal berdasarkan umurnya pada kelompok orang yang diasuransikan (Effendie, 2015). Pada tabel mortalitas terdapat variabel l_x dan d_x. Variabel l_x menyatakan jumlah orang yang diharapkan masih hidup sampai usia x tahun dari kelompok orang jumlahnya l_0 ketika baru lahir. Dalam hal ini, l_0 yang menyatakan banyaknya bayi yang baru lahir

diasumsikan mempunyai fungsi survival sama dengan $s(x)$. Misalkan $l_0 = 100.000$, lalu diberikan indeks $j = 1,2,3, \ldots l_0$ (orang ke-1, ke-2, …, ke l_0) dan $L(x)$ menyatakan banyaknya bayi yang hidup sampai dengan usia x sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$L(x) = \sum_{j=1}^{l_0} l_j \tag{2.6.1}$$

Dimana I_j adalah indikator untuk bayi bertahan hidup dari j, dan dapat pula dinyatakan dengan :

$$I_j = \begin{cases} 1, & jika\ j\ hidup\ sampai\ dengan\ x \\ 0, & selainnya \end{cases}$$

Karena I_j adalah random variabel, dan berdasarkan asumsi bahwa l_0 mempunyai fungsi survival yang sama dengan $s(x)$, maka diperoleh nilai peluangnya sebagai berikut :

$$P(I_j = 1) = s(x) \tag{2.6.2}$$

$$P(I_j = 0) = 1 - s(x) \tag{2.6.3}$$

Dari Persamaan (2.6.2) dan (2.6.3) diperoleh nilai harapan dari I_j sebagai berikut:

$$E[L(x)] = E\left[\sum_{j=1}^{l_0} I_j\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{l_0} E[I_j]$$

$$= s(x) + s(x) + \cdots + s(x)$$

$$l_x = l_0 \,.\, s(x) \tag{2.6.4}$$

Dengan mensubtitusikan Persamaan (2.3.4) didapat :

$$l_x = l_0 \cdot {}_0p_x$$

$$l_x = l_0 \,.\, exp\left(\int_0^x \mu t \; dt\right) \tag{2.6.5}$$

Selanjutnya mensubtitusikan variabel d_x menyatakan banyaknya orang yang berusia x tahun akan meninggal sebelum mencapai usia $x + 1$ tahun. Misalkan ${}_nD_x$ menyatakan banyaknya bayi yang meninggal usia x tahun sampai usia $x + n$ tahun, ,akan berlaku persamaan berikut :

$$P(x < X < x + n) = s(x) - s(x + n)$$

Selanjutnya indikator yang berlaku adalah sebagai berikut ;

$$I_j = \begin{cases} 1, & jika\ j\ meninggal\ antara\ usia\ x\ sampai\ dengan\ x{+}n\ tahun \\ 0, & selainnya \end{cases}$$

Karena I_j adalah random variabel, maka akan diperoleh nilai peluang sebagi berikut :

$$P\big(I_j = 1\big) = s(x) - s(x + n) \tag{2.6.6}$$

$$P\big(I_j = 0\big) = 1 - \{s(x) - s(x + n)\} \tag{2.6.7}$$

Dari Persamaan (2.6.6) dan (2.6.7) diperoleh nilai harapan dari I_j sebagai berikut :

$$E\big[I_j\big] = 1 \,.\, s(x) = s(x + n) + 0 \,.\, (1 - \{s(x) - s(x + n)\}) = s(x) - s(x + n)$$

Sehingga nilai ekspektasi dari ${}_nD_x$ dapat dinyatakan dengan :

$$E[\ {}_nD_x] = E\left[\sum_{j=1}^{l_0} I_j\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{l_0} E\big[I_j\big]$$

$${}_nd_x = l_0 \,.\{s(x) - s(x + n)\}$$

$$ {}_{n}d_{x} = l_{x} - l_{x+n} \tag{2.6.8} $$

Dimana ${}_{n}d_{x}$ menyatakan banyaknya orang yang berusia x tahun meninggal sebelum mencapai usia $x + n$ tahun.

Berdasarkan Persamaan (2.6.4) dan (2.6.8) diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$ l_{x} = l_{0} \,.\, s(x) \rightarrow s(x) = \frac{l_{x}}{l_{0}} $$

$$ {}_{x}p_{0} = \frac{l_{x}}{l_{0}} \tag{2.6.9} $$

Dan

$$ {}_{x}q_{0} = 1 - {}_{x}p_{0} = 1 - \frac{l_{x}}{l_{0}} = \frac{l_{0} - l_{x}}{l_{0}} = \frac{d_{x}}{l_{0}} \tag{2.6.10} $$

Sehingga peluang (x) akan meninggal sebelum mencapai $x + t$ tahun dapat dinyatakan dengan :

$$ {}_{t}q_{x} = 1 - {}_{t}p_{x} $$

$$ {}_{t}q_{x} = 1 - \frac{l_{x+t}}{l_{x}} $$

$$ {}_{t}q_{x} = \frac{l_{x} - l_{x+t}}{l_{x}} $$

$$ {}_{t}q_{x} = 1 - {}_{t}d_{x} \,.\, \frac{1}{l_{x}} \tag{2.6.11} $$

Dan sebuah peluang meninggal yang ditangguhkan atau kondisi yang menyatakan bahwa x akan berlangsung hidup sampai t tahun meninggal dalam u tahun, didefinisikan sebagai berikut :

$$_{t|u}q_x = 1 - \ _{t|u}p_x$$

Jika $u = 1$, maka berdasarkan Persamaan (2.2.4) diperoleh :

$$_{t|}q_x = \ _tp_x \cdot q_{x+t}$$

$$_{t|}q_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+k} - l_{x+k+1}}{l_{x+t}}$$

$$_{t|}q_x = \frac{l_{x+k} - l_{x+k+1}}{l_x} \qquad (2.6.12)$$

2.6.1 Distribusi Gompertz

Distribusi Gompertz sangat sering digunakan untuk mendeskripsikan suatu distribusi kematian. Pada tingkat terendah kematian bayi dan anak-anak, penggambaran percepatan mortalita Gompertz meluas sampai rentang seumur hidup pada suatu populasi tanpa mengamati perlambatan pola kematian. Maka, percepatan mortalita dari distribusi Gompertz yaitu:

$$\mu_x = Bc^x \qquad (2.6.13)$$

Dengan $B > 0, c > 0, x \geq 0$

Fungsi survival distribusi Gompertz dapat didefinisikan sebagai berikut :

$$s(x) = exp\left(-\int_0^x \mu(x)dx\right)$$

$$= exp\left(-B\left(\frac{1}{\ln c}\ c^x\right)\right)\Bigg|_0^x$$

$$= exp\left(-\frac{B}{\ln c}(c^x - 1)\right) \qquad (2.6.13)$$

Dari fungsi survivalnya, dapat ditentukan fungsi distribusi kumulatif (*cumulative distribution function*) dari distribusi Gompertz (Futami, 1993), yaitu :

$$F(x) = 1 - s(x) = \left(1 - exp\left(-\frac{B}{\ln c}(c^x - 1)\right)\right)$$

Densitas (*probability density function*) dari distribusi Gompertz sebagai berikut :

$$f(x) = F'(x) = \frac{d}{dx}\left(1 - exp\left(-\frac{B}{\ln c}(c^x - 1)\right)\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(-\frac{B}{\ln c}(c^x - 1)\right)\left(-exp\left(-\frac{B}{\ln c}(c^x - 1)\right)\right)$$

$$= \left(-\frac{B}{\ln c}(\ln c.\, c^x)\right)\left(-exp\left(-\frac{B}{\ln c}(c^x - 1)\right)\right)$$

$$= (Bc^x)\left(exp\left(-\frac{B}{\ln c}(c^x - 1)\right)\right)$$

2.6.2 Hukum Mortalita Gompertz

Benjamin Gompertz (1825), menjalani penelitian seraya menghitung nilai anuitas hidup, menyadari bahwa jika nilai percepatan mortalita bernilai konstan, maka tanpa memperhatikan bahwa usia nilai anuitas hidup akan sama walaupun pada usia 20 atau usia 65. Namun, pada kenyataanya tidak ada kasus seperti itu. Harga anuitas akan jauh lebih mahal untuk seorang berusia 65 dari pada seorang berusia 20. Gompertz menduga kematian mungkin terjadi karena dua penyebab umum. Satu, peluang tanpa

kecenderungan sebelumnya untuk meninggal atau rusak. Penyebab lain, yaitu memburuknya kondisi/keadaan, atau peningkatan ketidakmampuan untuk menahan kerusakan. Hukum mortalita Gompertz merupakan bentuk kasus khusus dari hukum mortalita Makeham dengan A=0 (Effendie, 2015).

Fungsi peluang ${}_tp_x$ dari hukum mortalita Gompertz adalah sebgai berikut :

$$
\begin{aligned}
{}_tp_x &= exp\left(-\int_x^{x+t} \mu(x)dx\right) \\
&= exp\left(-\int_x^{x+t} Bc^x\, dx\right) \\
&= exp\left(-B.\frac{1}{\ln c}\,.c^x\right)\Big|_x^{x+t} \\
&= exp\left(-\frac{B}{\ln c}\,.c^x\right)\Big|_x \\
&= exp\left(-\frac{B}{\ln c}(c^{x+t}-c^x)\right)
\end{aligned}
$$

$$
{}_tp_x = exp\left(-\frac{B}{\ln c}(c^{x+t}-c^x)\right) \qquad (2.6.14)
$$

Dalam penelitian Benjamin Gompertz (1825) mengenai daya tahan kekuatan pria dalam kerentanan kematiannya, Gompertz menyatakan kebalikan/perlawanan dari kerentanan pria untuk kematiannya dengan $1/\mu_x$ (Futami, 1993). Lalu, Gompertz mendefinisikan percepatan mortalitas adalah sebagai berikut :

$$
\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\mu_x}\right) = -h\frac{1}{\mu_x} \qquad (2.6.15)
$$

Dalam hal ini berarti kekuatan untuk menghindar dari kematian (*escaping power from death*) dan ini bertolak secara proposional dari kekuatan itu sendiri. Sehingga didapat :

$$\ln \frac{1}{\mu_x} = -hx - \ln B$$

Dimana $-\ln B$ adalah konstan dan misalkan $h = \ln(c)$, maka fungsi penyederhanaanya menurut Gompertz (Futami, 1993) adalah sebagai berikut :

$$\ln \frac{1}{\mu_x} = -\ln(c)x - \ln B$$

$$\frac{1}{\mu_x} = e^{-(\ln(c)x + \ln B)} . e^{-\ln B}$$

$$\mu_x = e^{\ln(c)x + \ln B}$$

$$\mu_x = \left(e^{\ln(c)}\right)^x e^{\ln B} \qquad (2.6.16)$$

Dengan $e^{\ln(c)} = c$ sehingga :

$$\mu_x = Bc^x$$

Dimana $B > 0, c > 1, x > 0$.

Dimana dapat didefinisikan, parameter B dikaitkan dengan peluang atau kemungkinan, dan parameter c adalah peningkatan ketidakmungkinan menahan kerusakan. Dari uraian tersebut, dapat dilihat bahwa distribusi Gompertz memiliki ciri khas yaitu memiliki pola tingkat kegagalan (*failure rate*) yang meningkat. Jika $c = 1$, tingkat kematian akan menjadi konstan, dan untuk $c < 0$ maka distribusi Gompertz akan memiliki pola laju tingkat kematian yang menurun. Hal ini sesuai dengan filosofinya yang menyatakan bahwa seiring berjalannya waktu, maka tingkat laju ketidakmampuan menahan kerusakan akan meningkat. Sama halnya, dengan

memberikan B dengan nilai positif akan menjamin bahwa pada setiap waktunya pasti akan terdapat kemungkinan peluangg kematian yang positif.

2.6.3 Distribusi Makeham

Distribusi Makeham memberikan aproksimasi yang lebih baik untuk suatu distribusi mortalita. Distribusi Makeham merupakan suatu perluasan dari distribusi Gompertz. Perbedaan antara keduanya yaitu fungsi distribusi Makeham menggunakan parameter tambahan dari fungsi distribusi Gompertz. Berikut adalah percepatan mortalita distribusi makeham.

$$\mu_x = A + Bc^x \tag{2.6.17}$$

Dengan $B > 0,\ A \geq -B, c > 1,\ x \geq 0,$ maka fungsi survival model mortalita Makeham adalah (Bowers, dkk., 1997) :

$$\begin{aligned} s(x) &= exp\left(-\int_0^x \mu(x)\ dx\right) \\ &= exp\left(-\int_0^x A + Bc^x\ dx\right) \\ &= \exp\left(-Ax - B\left(\frac{1}{\ln c}\ c^x\right)\right)\Bigg|_0^x \\ &= \exp\left(-Ax - \frac{B}{\ln c}(c^x - 1)\right) \end{aligned}$$

Dari fungsi survivalnya dapat ditentukan fungsi distribusi kumulatif (*cumulative distribution function*) dari distribusi Makeham yaitu :

$$F(x) = 1 - s(x) = \left(1 - \exp\left(-Ax - \frac{B}{\ln c}(c^x - 1)\right)\right)$$

Densitas (*probability density function)* dari distribusi Makeham adalah sebagai berikut :

$$f(x) = F'^{(x)} = \frac{d}{dx}\left(1 - \exp\left(-Ax - \frac{B}{\ln c}(c^x - 1)\right)\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(-Ax - \frac{B}{\ln c}(c^x - 1)\right)\left(-\exp\left(-Ax - \frac{B}{\ln c}(c^x - 1)\right)\right)$$

$$= \left(-Ax - \frac{B}{\ln c}(\ln c \,.\, c^x)\right)\left(-\exp\left(-Ax - \frac{B}{\ln c}(c^x - 1)\right)\right)$$

$$= (A + Bc^x)\ \left(\exp\left(-Ax - \frac{B}{\ln c}(c^x - 1)\right)\right)$$

Fungsi peluang ${}_tp_x$ dari hukum mortalita Makeham sebagai berikut :

$${}_tp_x = exp\left(-\int_x^{x+t} \mu(x)\, dx\right)$$

$$= \exp\left(-Ax - B\left(\frac{1}{\ln c}\ c^x\right)\right)\Bigg|_x^{x+t}$$

$$= \exp\left(-At - \frac{B}{\ln c}(c^{x+t} - c^x)\right)$$

$${}_tp_x = \exp\left(-At - \frac{Bc^x}{\ln c}(c^t - 1)\right) \qquad (2.6.18)$$

2.6.4 Hukum Mortalita Makeham

Hukum mortalita Makeham merupakan modifikasi dari hukum mortalita Gompertz. Dalam peryataan Gompertz mengenai penyebab umum terjadinya kematian, hanya

menggunakan penyebab kedua dalam menentukan hukum mortalitanya. Hal tersebut membuat Makeham (1860) menggabungkan dua penyebab tersebut. Dengan pengaruh dari penyebab pertama yaitu kesepatan akan menjadi tambahan konstan pada percepatan mortalita Gompertz (Futami,1993).

$$\mu_x = A + Bc^x \tag{2.6.19}$$

Dengan $B > 0,\ A \geq -B, c > 1, x \geq 0$

Konstanta A dapat mewakili faktor terjadinya kecelakaan, dan Bc^x dapat mewakili faktor usia. Oleh karena itu, masing-masing hukum melibatkan sejumlah parameter yang tidak ditentukan karena masing-masing dapat berupa bilangan tak terbatas dari fungsi survival yang berbeda. Pada kasus tertentu, jika nilai pada hukum mortalita Makeham, maka Pada kasus tertentu, jika nilai $A = 0$ pada hukum mortalita Makeham, maka dapat menjadi hukum mortalita Gompertz. Dan jika nilai $c = 1$ pada hukum mortalita Gompertz dan Makeham, maka dapat menghasilkan distribusi eksponensial (laju tingkat kematian konstan).

2.7 Asuransi

Asuransi seumur hidup (*whole life insurance*) yaitu asuransi yang menjamin seumur hidup tertanggung dan dibayarkan bila tertanggung tersebut meninggal. Pengertian asuransi dalam skripsi ini menyatakan premi tunggal dengan referensi yang digunakan adalah buku Bowers dkk Tahun 1997, dengan jenis-jenis pembayarannya, yaitu :

2.7.1 Asuransi yang Dibayarkan Segera pada Saat Meninggal (Kontinu)

Jenis asuransi ini adalah bentuk kontinu dengan besarnya manfaat (b_t) sebesar 1 dibayarkan sebera pada saat meninggal, maka:

$$b_t = 1 \qquad t \geq 0$$

$$v_t = v^t \qquad t \geq 0$$

$$Z = v^T \qquad t \geq 0$$

Nilai sekarang atau biasa disebut *actuarial present value* (APV) dari asuransi dinotasikan dengan symbol $\bar{A}_x$ adalah mengekspektasikan Z, yaitu :

$$\bar{A}_x = E[z] \cong E[v^T] \cong \int_0^\infty v^t \,.\, f(t)\, dt$$

$$= \int_0^\infty v^t \,.\, {}_tp_x \,.\, \mu_{x+t}\, dt \qquad (2.7.1)$$

2.7.2 Asuransi yang Dibayakan pada Akhir Tahun Meninggal (Diskrit)

Asuransi yang berbentuk diskrit ini dinotasikan dengan symbol $K(x)$ yang pembayarannya sebesar 1 pada akhir tahun meninggal, maka :

$$b_{k+1} = 1 \qquad t \geq 0$$

$$v_{k+1} = v^{k+1} \qquad t \geq 0$$

$$Z = v^{K+1} \qquad t \geq 0$$

actuarial present value (APV) dinotasikan dengan A_x adalah :

$$A_x = E[z] \cong E[v^{K+1}]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \,.\, P[K(x) = k]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \,.\; {}_{k}p_{x} \,.\; q_{x+k} \qquad (2.7.2)$$

2.7.3 Asuransi yang Dibayarkan Segera pada 1/p Tahun Meninggal (1/p)

Dalam satu tahun dibagi menjadi $1/p$, sehingga bila tertanggung meninggal dalam interval $1/p$ tersebut, akan dibayarkan asuransinya pada akhir $1/p$ tahun meninggal. Bentuk asuransinya dibayar pada akhir periode $K + (J+1)/p$, J merupakan nilai fungsi integer terbesar dari jumlah keseluruhan p-kali dari tahun orang itu hidup hingga tahun meninggal. APV dari asuransi tersebut adalah :

$$A_x{}^{p} = E\left[v^{K+\frac{J+1}{p}}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} v^{K+\frac{J+1}{p}} \;\; {}_{K+\frac{J+1}{p}}p_{x} \; {}_{\frac{1}{p}}q_{K+\frac{J+1}{p}} \qquad (2.7.3)$$

Atau bentuk lainnya adalah :

$$A_x{}^{p} = \frac{1}{l_x}\left[v^{1/p}\left(l_x - l_{x=1/p}\right) + v^{2/p}\left(l_{x+1/p} - l_{x=2/p}\right) + \cdots\right]$$

$$= -\frac{1}{l_x}\sum_{t=1}^{\infty} v^{\frac{t}{p}} \,.\, \Delta l_{x+\frac{t-1}{p}}$$

Jika p menuju tak hingga maka $A_x{}^{p}$ akan berubah menjadi $\bar{A}_x$, dapat ditunjukkan sebagai berikut :

$$\lim_{m\to\infty} A_x{}^p = \lim_{m\to\infty}\left[\sum_{t=1}^{\infty} v^{\frac{t}{p}} \,.\, \Delta l_{x+\frac{t-1}{p}}\right]$$

$$= -\frac{1}{l_x}\int_0^{\infty} v^t \; dl_{x+t}$$

Dimana : $dl_{x+t} = -l_{x+t} \,.\, \mu_{x+t}\; dt$

Maka,

$$\lim_{m\to\infty} A_x{}^p = \frac{1}{l_x}\int_0^{\infty} v^t \,.\, l_{x+t} \,.\, \mu_{x+t}\; dt$$

$$= \int_0^{\infty} v^t \,.\, \frac{l_{x+t}}{l_x} \,.\, \mu_{x+t}\; dt$$

$$= \int_0^{\infty} v^t \,.\; {}_tp_x \,.\, \mu_{x+t}\; dt$$

$$= \bar{A}_x \qquad (2.7.4)$$

2.7.4 Hubungan Antar Asuransi

Hubungan antar asuransi menurut (Bowers, dkk., 1997) adalah :

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta}\, A_x \qquad (2.7.5)$$

Dengan melihat Persamaan 2.5.3 dan Persamaan 2.7.4, maka:

$$\lim_{p\to\infty} A_x{}^p = \frac{i}{\lim\limits_{p\to\infty} i^{(p)}}\, A_x$$

$$A_x{}^p = \frac{i}{i^{(p)}}\, A_x \qquad (2.7.6)$$

2.8 Anuitas

Anuitas didefinisikan sebagai suatu rangkaian pembayaran dalam jumlah tertentu, yang dilakukan setiap selang waktu dan lama tertentu secara berkelanjutan (Sembiring, 1986). Suatu anuitas yang pasti dilakukan dalam jangka pembayaran disebut anuitas pasti.

2.8.1 Anuitas Pasti (Pembayaran Tahunan)

Anuitas yang dibayarkan di awal jangka waktu pembayaran anuitas disebut anuitas awal (*annuity-due*) sedang bila diakhir jangka waktu pembayaran disebut anuitas akhir atau *annuity-immediate* (Futami,1993).

Total nilai sekarang dari anuitas akhir yang dapat dinotasikan sebagai $a_{\bar{n}|}$ (*annuity-immediate)* adalah :

$$PV = a_{\bar{n}|} = v + v^2 + \cdots + v^{n-1} + v^n$$

Dengan menggunakan rumus deret geometri, maka :

$$a_{\bar{n}|} = v(1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-2} + v^{n-1})$$

$$= v\left(\frac{1 - v^n}{1 - v}\right)$$

Dengan Persamaan 2.4.1 (1-v), maka:

$$= v\left(\frac{1 - v^n}{iv}\right)$$

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{i} \tag{2.8.1}$$

Sedangkan anuitas awal dinotasikan dengan $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ adalah :

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-2} + v^{n-1}$$

$$= \frac{1 - v^n}{1 - v}$$

Dengan Persamaan 2.4.1, maka :

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{d} \tag{2.8.2}$$

2.8.2 Anuitas Pasti (Pembayaran p-kali Setahun)

Suatu anuitas pasti yang pembayarnnya dilakukan p kali dalam setahun dengan selang pembayaran setiap $1/p$ tahun dan total pembayarannya dalam satu tahun sebesar 1 (Futami, 1993).

Maka total nilai sekarang dari anuitas tersebut yang dinotasikan $a_{\overline{n}|}^{(p)}$, adalah :

$$a_{\overline{n}|}^{(p)} = \frac{1}{p}\left(v^{1/p} + v^{2/p} + v^{3/p} + \cdots + v^{n-1/p} + v^{n/p}\right)$$

$$= \frac{1}{p}\left(\frac{v^{1/p} - v^{n+1/p}}{1 - v^{1/p}}\right)$$

$$= \frac{1 - v^n}{p[(1 + i)^{1/p} - 1]}$$

Dengan Persamaan 2.4.2, maka :

$$a_{\overline{n}|}^{(p)} = \frac{1 - v^n}{i^{(p)}} \tag{2.8.3}$$

Sedangkan untuk anuitas awal dinotasikan $\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(p)}$, adalah :

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(p)} = \frac{1}{p}\left(1 + v^{1/p} + v^{2/p} + v^{3/p} + \cdots + v^{n-1/p}\right)$$

$$= \frac{1}{p}\left(\frac{1 - v^n}{1 - v^{1/p}}\right)$$

$$= \frac{1 - v^n}{p[1 - (1 - d)^{1/p}]}$$

Dengan Persamaan 2.4.3, maka:

$$= \frac{1 - v^n}{d^{(p)}} \tag{2.8.4}$$

2.8.3 Anuitas Pasti (Pembayaran Kontinu)

Suatu anuitas pasti yang pembayarannya dilakukan p kali dalam setahun dengan $p \to \infty$, atau dengan kata lain pembayarannya dilakukan setiap saat (Futami,1993), yang dinotasikan dengan $\bar{a}_{\overline{n|}}$.:

$$\bar{a}_{\overline{n|}} = \lim_{p \to \infty} a_{\overline{n}|}^{(p)}$$

$$= \lim_{p \to \infty} \frac{1 - v^n}{i^{(p)}}$$

Dengan Persamaan 2.5.3, didapat :

$$= \frac{1 - v^n}{\delta} \tag{2.8.5}$$

2.9 Anuitas Hidup (*Life Annuity*)

Anuitas hidup (*life annuity*) adalah serangkaian pembayaran yang dilakukan selama seseorang tertentu masih hidup (Sembiring,1986). Besarnya pembayaran bisa tetap atau berubah-ubah.

2.9.1 Anuitas hidup kontinu (Continous Life Annuity)

Anuitas seumur hidup sebesar 1 per akhir tahun dengan pembayaran kontinu setiap saat (Bowers, dkk.,1997). Nilai sekarang dari pembayaran anuitas tersebut variabel acak Y adalah :

$$Y = \bar{a}_{\overline{T|}}, \;\; T \geq 0$$

Dari Persamaan 2.8.5, didapat :

$$\bar{a}_{\overline{T|}} = \frac{1 - v^T}{\delta}$$

Actuarial present value (APV) dari anuitas tersebut adalah

$$\bar{a}_x = E[Y] = E\left[\bar{a}_{\overline{T|}}\right] = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t|}} \,.\; g(t)\, dt$$

Dengan menggunakan pengintegralan parsial integral tentu :

$$\int_a^b u\, dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\, du$$

Misalkan : $u = \bar{a}_{\overline{T|}}$ $\rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1-v^T}{\delta}\right) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{v^T}{\delta}\right) = -\frac{1}{\delta} \,.\, \frac{dv^T}{dt}$

$$= -\frac{1}{\delta} \,.\, v^T \ln v = \frac{1}{\delta} \,.\, v^T \ln(1+i)^{-1} = \frac{1}{\delta} \,.\, v^T . \delta$$

$$= v^T$$

$$du = v^T\, dt$$

$$dv = g(t)\, dt$$

Dari Persamaan 2.3.5, diketahui :

$$dv = {}_tp_x \,.\, \mu(x+t) \;\rightarrow v = -\,{}_tp_x$$

Sehingga :

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t|}} \,.\; g(t)\, dt$$

$$= \bar{a}_{\overline{t|}} \,.\; {}_tp_x|_0^\infty - \int_0^\infty -\,{}_tp_x \;\; v^T\, dt$$

Jika :

$$t = \infty \;\; \rightarrow \;\; {}_tp_x = 0 \;;\; \bar{a}_{\overline{t|}} = \frac{1 - v^\infty}{\delta} = \frac{1}{\delta}$$

$$t = 0 \;\; \rightarrow \;\; {}_tp_x = 1 \;;\; \bar{a}_{\overline{t|}} = \frac{1 - v^0}{\delta} = 0$$

Maka :

$$\bar{a}_x = E[Y] = E\left[\bar{a}_{\overline{T|}}\right] = \int_0^\infty v^T \,.\; {}_tp_x\, dt \qquad (2.9.1)$$

Hubungan antara anuitas seumur hidup dengan asuransi seumur hidup yang kontinu adalah :

$$E\left[\bar{a}_{\overline{T|}}\right] = E\left[\frac{1 - v^T}{\delta}\right] = \int_0^\infty \frac{1 - v^T}{\delta}\; g(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta}\int_0^\infty v^T \,.\, g(t) dt$$

Dari Persamaan 2.7.1, maka:

$$\bar{a}_x = \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta}\bar{A}_x$$

$$= \frac{1 - \bar{A}_x}{\delta}$$

$$\delta\bar{a}_x = 1 - \bar{A}_x$$

$$\bar{A}_x + \delta\bar{a}_x = 1 \qquad (2.9.2)$$

2.9.2 Anuitas Hidup Diskrit (*Discrete Life Annuity*)

Anuitas hidup diskrit menggunakan anuitas awal (*due annuity*) yang pembayarannya setiap awal tahun (Bowers, dkk., 1997). Nilai sekarang dari pembayaran anuitas tersebut yang merupakan variabel acak dari Y adalah :

$$Y = \ddot{a}_{\overline{K+J|}}, \qquad K \geq 0$$

Dari Persamaan 2.8.2, maka :

$$\ddot{a}_{\overline{K+J|}} = \frac{1 - v^{K+J}}{d}$$

Actuarial present value (APV) dari anuitas tersebut, $\ddot{a}_x$:

$$\ddot{a}_x = E[Y] = E\left[\ddot{a}_{\overline{K+J|}}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{K+J|}}\ P(K = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{K+J|}}\ {}_kp_x\, q_{x+k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot {}_k p_x \tag{2.9.3}$$

Hubungan anuitas dengan asuransi :

$$\ddot{a}_x = E\left[\ddot{a}_{\overline{K+J}|}\right] = E\left[\frac{1 - v^{K+J}}{d}\right]$$

Dari Persamaan 2.7.2, maka:

$$\ddot{a}_x = \frac{1 - E[v^{K+J}]}{d}$$

$$= \frac{1 - A_x}{d} \tag{2.9.4}$$

2.9.3 Anuitas Hidup dengan p-kali Pembayaran

APV dari anuitas hidup sebesar 1 pertahun, yang dibayarkan $1/p$ pada awal setiap $1/p$ tahun selama orang berusia (x) tersebut hidup hingga $K + (J + 1)/p$. Untuk K dan J telah dijelaskan di sub bab 2.7.3 dapat dinotasikan dengan simbol $\ddot{a}_x^{(p)}$ (Bowers, dkk., 1997).

Variabel acak Y adalah :

$$Y = \sum_{j=0}^{K+J} \frac{1}{p} v^{j/p} = \ddot{a}^{(p)}_{\overline{K+(J+1)/p}|} = \frac{1 - v^{K+\frac{J+1}{p}}}{d^{(p)}} \tag{2.9.5}$$

APV dari anuitas :

$$\ddot{a}_x^{(p)} = E[Y] = E\left[\ddot{a}^{(p)}_{\overline{K+\frac{J+1}{p}}|}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}^{(p)}_{\overline{K+(J+1)/p|}} \, P(K = k)$$

$$= \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{\infty} v^{k/p} \cdot {}_{\frac{k}{p}}p_x \tag{2.9.6}$$

Hubungan anuitas dengan asuransi :

$$\ddot{a}^{(p)}_x = E\left[\ddot{a}^{(p)}_{\overline{K+(J+1)/|}}\right] = E\left[\frac{1 - v^{K+\frac{J+1}{p}}}{d^{(p)}}\right] \tag{2.9.7}$$

Dari Persamaan 2.7.3, maka :

$$\ddot{a}^{(p)}_x = \frac{1 - E\left[v^{K+\frac{J+1}{p}}\right]}{d^{(p)}}$$

$$= \frac{1 - A_x{}^m}{d^{(m)}} \tag{2.9.8}$$

2.9.4 Anuitas Hidup Aportionabel (*Apportionable Life Annuity*)

Anuitas hidup aportionable didefinisikan sebagai anuitas hidup dengan p −kali pembayaran dengan pengembalian pembayaran yang terjadi akibat perbedaan waktu meninggal dengan waktu pembayaran terakhir (Bowers, dkk., 1997). Notasi untuk anuitas hidup aportionabel adalah $\ddot{a}^{(p)}_x$. Dari Bowers dapat kita lihat variabel acaknya yaitu :

$$Y = \ddot{a}^{(p)}_{\overline{K+(J+1)/p|}} - v^T \left(\frac{\bar{a}_{\overline{K+\frac{J+1}{p}-T|}}}{p \; \bar{a}_{\overline{1/p|}}} \right)$$

$$= \ddot{a}^{(p)}_{\overline{K+(J+1)/p|}} - \frac{v^T - v^{K+\frac{J+1}{p}}}{d^{(p)}}$$

$$= \frac{1 - v^T}{d^{(p)}} \cong \ddot{a}^{(p)}_{\overline{T|}}$$

APV dari anuitas :

$$\ddot{a}^{\{p\}}_x = E\left[\ddot{a}^{(p)}_{\overline{T|}}\right] = E\left[\frac{1 - v^T}{d^{(p)}}\right] = \frac{\delta}{d^{(p)}}\,\bar{a}_x \qquad (2.9.9)$$

2.10 Premi Asuransi Jiwa

Premi adalah besarnya pembayaran tertentu yang dilakukan oleh pihak tertanggung kepada perusahaan asuransi yang disetujui dalam suatu perjanjian dalam kontrak tertulis yang disebut dengan polis asuransi. Pada semua asuransi dikenal premi tunggal (*net single premiums*), tetapi pada prakteknya jarang sekali premi tunggal digunakan. Biasanya premi dibayar secara berkala (tahunan), misalnya tiap tahun, enam bulan sekali, ataupun sebulan sekali dan dilakukan pada awal tiap selang waktu (Sembiring, 1986). Umumnya premi berkala tersebut sama besarnya (*net level premiums*).

Dalam penelitian ini penentuan premi tahunan memakai prinsip keseimbangan (*equivalence principle*) dan mempunyai syarat bahwa :

$$E[L] = 0$$

Dengan L adalah jumlah kerugian perusahaan asuransi, yang merupakan perbedaan nilai sekarang dari santunan (*Benefit*) dan nilai sekarang dari pembayaran premi (Anuitas).

Maka :

E[nilai sekarang santunan – nilai sekarang premi] = 0

E[nilai sekarang santunan] = E[nilai sekarang premi]

Penentuan premi tahunan asuransi jiwa seumur hidup yang dibayarkan p-kali dalam setahun dapat dilakukan dengan beberapa metode yaitu:

2.10.1 Premi Asuransi Kontinu

Untuk premi yang dibayarkan kontinu, dengan santunan dibayarkan segera pada saat tertanggung berusia x meninggal, akan kita lihat sebagai contoh untuk kasus asuransi seumur hidup. Nilai sekarang dari kerugian untuk penanggung jika meninggal terjadi pada saat t adalah :

$$l(t) = v^t - \bar{P}\bar{a}_{\overline{t|}}$$

Maka untuk variabel acak dari kerugian :

$$L = l(T) = v^T - \bar{P}\bar{a}_{\overline{T|}} \qquad (2.10.1)$$

Sehingga dengan prinsip ekuivalen :

$$E[L] = E\left[v^T - \bar{P}\bar{a}_{\overline{T|}}\right] = 0$$

$$= E[v^T] - \bar{P}E[\bar{a}_{\overline{T|}}] = 0$$

Premi kontinu asuransi jiwa seumur hidup dinotasikan dengan $\bar{P}(\bar{A}_x)$ maka :

$$\bar{A}_x - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_x = 0$$

atau :

$$\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x} \tag{2.10.2}$$

Dapat dilihat bahwa untuk kasus premi bersih kontinu, asuransi dan anuitasnya berbentuk kontinu.

2.10.2 Premi Asuransi Diskonto Kontinu

Premi diskonto kontinu atau disebut juga premi aportionabel (*apportionable premium*), $P^{(p)}$, adalah jenis asuransinya dibayar setiap saat atau berbentuk kontinu dan jenis pembayaran preminya (anuitas) berbentuk aportionabel. Maka untuk variable acaknya :

$$L = l(T) = v^T - P^{(p)}\ddot{a}^{(p)}_{\overline{T}|}$$

Menggunakan prinsip ekuivalen :

$$E[L] = E\left[v^T - P^{(p)}\ddot{a}^{(p)}_{\overline{T}|}\right] = 0$$

Premi santunannya dinotasikan $P^{(p)}(\bar{A}_x)$, maka:

$$\bar{A}_x - P^{(p)}(\bar{A}_x)\ddot{a}^{\{p\}}_x = 0$$

Jadi :

$$P^{(p)}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}^{\{p\}}_x} = \frac{\bar{A}_x}{\left[\frac{\delta}{d^{(p)}}\bar{a}_x\right]}$$

$$= \frac{d^{(p)}}{\delta}\frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x} = \frac{d^{(p)}}{\delta}\bar{P}(\bar{A}_x) \tag{2.10.3}$$

$$P^{(p)}(\bar{A}_x) = \frac{p\left[1 - v^{\frac{1}{p}}\right]}{\delta}\bar{P}(\bar{A}_x)$$

$$= \bar{P}(\bar{A}_x)\frac{1 - v^{\frac{1}{p}}}{\delta}.p = \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{\overline{1/p|}}.p$$

Rumus dasar premi diskonto kontinu adalah :

$$\bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{\overline{1/p|}}.p = \bar{P}(\bar{A}_x)\frac{1 - v^{\frac{1}{p}}}{\delta}.p = \frac{d^{(p)}}{\delta}\bar{P}(\bar{A}_x) \qquad (2.10.4)$$

2.10.3 Premi Asuransi Semi Kontinu

Dinotasikan dengan $P^{(p)}$, hampir sama dengan metode kontinu, asuransinya berbentuk kontinu sedangkan anuitasnya berbentuk diskrit. Asuransi seumur hidup dibayarkan segera pada saat tertanggung usia (x) meninggal dan premi dibayarkan pada awal 1/p tahun.Variabel acak kerugiannya adalah :

$$L = l(T) = v^T - P^{(p)}\ddot{a}^{(p)}_{\overline{K+(J+1)/p|}}$$

Dengan prinsip ekuivalen :

$$E[L] = E\left[v^T - P^{(p)}\ddot{a}^{(p)}_{\overline{K+\frac{(J+1)}{p}|}}\right] = 0$$

$$= E[v^T] - P^{(p)}E\left[\ddot{a}^{(p)}_{\overline{K+\frac{J+1}{p}|}}\right] = 0$$

Premi semi kontinu dinotasikan $P_x^{(p),SC}$ atau $P^{(p)}(\bar{A}_x)$, maka :

$$(\bar{A}_x) - P^{(p)}(\bar{A}_x)\ddot{a}_x^{(p)} = 0$$

atau :

$$P^{(p)}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_x^{(p)}} \qquad (2.10.5)$$

2.10.4 Premi Asuransi Diskrit

Konsep dasar dari kasus diskrit tetap menggunakan prinsip ekuivalen, tetapi asuransi dan anuitasnya berbentuk diskrit. Asuransi seumur hidup dibayarkan pada akhir tahun meninggal dan premi dibayarkan pada awal 1/m tahun, akan didapat variabel acak dari kerugian :

$$L = l(T) = v^{K+1} - P^{(p)}\ddot{a}^{(p)}_{\overline{K+(J+1)/p|}}$$

Menggunakan prinsip ekuivalen :

$$E[L] = E\left[v^{K+1} - P^{(p)}\ddot{a}^{(p)}_{\overline{K+\frac{J+1}{p}|}}\right] = 0$$

$$E[v^{K+1}] - P^{(p)}E\left[\ddot{a}^{(p)}_{\overline{K+\frac{J+1}{p}|}}\right] = 0$$

Premi diskrit dinotasikan dengan $P_x^{(p),CU}$ atau $P^{(p)}(A_x)$, maka:

$$A_x - P^{(p)}(A_x)\ddot{a}_x^{(p)} = 0$$

atau :

$$P^{(p)}(A_x) = \frac{A_x}{\ddot{a}_x^{(p)}} \qquad (2.10.6)$$

2.11 Metode Kuadrat Terkecil Nonlinear

Hukum mortalita merupakan bentuk pendekatan terhadap percepatan mortalita dari suatu tabel mortalita. Dalam menentukan nilai premi yang didekati berdasarkan hukum mortalita Makeham dan hukum mortalita Gompertz terdapat modifikasi perhitungan pada percepatan mortalita *force of mortality* $\mu(x+t)$ yang melibatkan

sejumlah parameter-parameter tertentu. Terdapat beberapa cara dalam menentukan nilai parameter pada hukum mortalita. Yakni dengan metode kuadrat terkecil, metode *maximum likelihood estimation, trial and error,* dan sebagainya. Pada penelitian ini akan digunakan metode kuadrat terkecil nonlinier (*nonlinear least squares*). Pengestimasian nilai parameter dilakukan menggunakan bantuan program Matlab R2013b.

Model nonlinier merupakan bentuk hubungan antara peubah terikat dengan variabel bebas yang tidak linear dalam parameter. Secara umum model nonlinier ditulis sebagai berikut :

$$y_i = f(x_i) + \varepsilon_i \qquad i = 1,2,\dots,n$$

Dengan :

y_i = variabel terikat ke-i

$f(x_i)$ = fungsi nonlinear

x_i = variabel bebas ke-i

ε_i = galat ke-i

Misalkan model nonlinier yang dipostulat dengan bentuk :

$$y_i = f\left(x_1, x_2, \dots, x_p\right) + \varepsilon_i$$

Misalkan $X = \left(x_1, x_2, \dots, x_p\right)$ dan $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$, maka :

$$Y = f(x, \theta) + \varepsilon_i \tag{2.11.1}$$

Maka jumlah kuadrat galat untuk model nonlinier diatas didefinisikan sebagai berikut :

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \left(f(x,\theta)\right)\right)^2 \qquad (2.11.2)$$

Nilai dugaan kuadrat terkecil bagi θ akan dilambangkan dengan $\hat{\theta}$. Nilai dugaan ini adalah nilai yang meminimumkan nilai S. Untuk mendapatkan nilai dugaan kuadrat terkecil $\hat{\theta}$ yaitu dengan mendefinisikan S terhadap θ kemudian disamadengankan nol (Mustari, 2013).

Diketahui fungsi nonlinier percepatan mortalita Makeham yaitu :

$$\mu_{xt} = A + Bc^{x+t}$$

Misalkan $\mu_{xt} = Y$ dan $t = 1$ maka jumlah kuadrat untuk persamaan nonlinier percepatan mortalita Makeham yaitu

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - A_1 - B_1 {c_1}^{(x_i+1)}\right)^2 \qquad (2.11.3)$$

dengan

Y_i = Variabel terikat yang menyatakan percepatan mortalita tabel pada tahun ke-i

A_1 = Parameter 1 pada fungsi nonlinier percepatan mortalita Makeham

B_1 = Parameter 2 pada fungsi nonlinier percepatan mortalita Makeham

c_1 = Parameter 3 pada fungsi nonlinier percepatan mortalita Makeham

x_i = Usia (tahun) ke-i

ε_i = Galat ke-i

Maka berlaku :

$$\frac{dS}{dA_1} = 0, \frac{dS}{dB_1} = 0, \frac{dS}{dc_1} = 0$$

Selanjutnya diketahui fungsi nonlinier percepatan mortalita Gompertz yaitu:

$$\mu_{xt} = Bc^{x+t}$$

Misalkan $\mu_{xt} = Y$ dan $t = 1$ maka jumlah kuadrat untuk persamaan nonlinier percepatan mortalita Gompertz yaitu :

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - B_2 c_2{}^{(x_i+1)}\right)^2 \qquad (2.11.4)$$

dengan

Y_i = Variabel terikat yang menyatakan percepatan mortalita tabel pada tahun ke-i

B_2 = Parameter 1 pada fungsi nonlinear percepatan mortalita Gompertz

c_2 = Parameter 2 pada fungsi nonlinear percepatan mortalita Gompertz

x_i = Usia (tahun) ke-i

ε_i = Galat ke-i

Maka berlaku :

$$\frac{dS}{dB_2} = 0, \frac{dS}{dc_2} = 0$$

2.12 Simulasi Penaksir Parameter

Simulasi adalah operasi tiruan suatu proses atau sistem dari kejadian nyata pada waktu tertentu. Keuntungan dari simulasi adalah dapat menganalisa suatu tujuan dari sistem meskipun data yang dimasukkan tidak lengkap. Tujuan simulasi dalam penelitian ini adalah membangkitkan variabel acak dari T_x. Variabel acak ini merupakan lamanya orang hidup dari seseorang berusia x.

2.12.1 Simulasi Penaksir Parameter Gompertz

Dari Persamaan 2.2.3 dan 2.2.6, akan didapat :

$$ {}_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{l_0 * s(x+t)}{l_0 * s(x)} = \frac{l_{x+t}}{l_x} \qquad (2.12.1) $$

Hubungan dengan gompertz, dapat ditentukan dengan Persamaan 2.2.1 dan 2.6.14, yaitu :

$$ {}_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{exp\left(-\frac{B}{\ln c}(c^{x+t}-1)\right)}{exp\left(-\frac{B}{\ln c}(c^{x}-1)\right)} $$

$$ = exp\left(-\frac{B}{\ln c}(c^{x+t}-c^{x})\right) \qquad (2.12.2) $$

Sehingga akan didapat :

$$ l_{x+t} = l_x * \ {}_tp_x $$

$$ l_{x+t} = l_x * \ exp\left(-\frac{B}{\ln c}(c^{x+t}-c^{x})\right) $$

Misalkan $x = 0$, maka :

$$l_t = l_0 * \ exp\left(-\frac{B}{\ln c}(c^t - 1)\right)$$

l_t merupakan banyaknya orang hidup pada usia t, sedangkan dalam table diketahui banyaknya orang hidup pada usia x, maka :

$$l_x = l_0 * \ exp\left(-\frac{B}{\ln c}(c^x - 1)\right) \tag{2.12.3}$$

Dengan menggunakan metode persamaan regresi nonlinier maka akan didapatkan variabel m, c dari distribusi Gompertz (Ahmadi, 2001). Sedangkan nilai-nilai l_x dan l_0 adalah didapat dari tabel mortalita Indonesia laki-laki dan perempuan tahun 2011. Program yang digunakan untuk menghitung regresi nonlinier pada Program Matlab adalah Nlinfit (*nonlinear least square and fitting*) dari hukum mortalita Gompertz, maka didapatlah taksiran parameternya.

2.12.2 Simulasi Penaksir Parameter Makeham

Hubungan dengan makeham, dapat ditentukan dengan Persamaan 2.2.1 dan 2.6.17, yaitu :

$${}_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{exp\left(-Ax - \frac{B}{\ln c}(c^{x+t} - 1)\right)}{exp\left(-\frac{B}{\ln c}(c^x - 1)\right)}$$

$$= exp\left(-Ax - \frac{B}{\ln c}(c^{x+t} - c^x)\right) \tag{2.12.4}$$

Sehingga akan didapat :

$$l_{x+t} = l_x * \ {}_tp_x$$

$$l_{x+t} = l_x * \ exp\left(-Ax - \frac{B}{\ln c}(c^{x+t} - c^x)\right)$$

Misalkan $x = 0$, maka :

$$l_t = l_0 * \ exp\left(-\frac{B}{\ln c}(c^t - 1)\right)$$

l_t merupakan banyaknya orang hidup pada usia t, sedangkan dalam tabel diketahui banyaknya orang hidup pada usia x, maka :

$$l_x = l_0 * \ exp\left(-Ax - \frac{B}{\ln c}(c^x - 1)\right) \qquad (2.12.5)$$

Dengan menggunakan metode persamaan regresi nonlinear maka akan didapatkan variabel A, m dan c dari distribusi Makeham. Sedangkan nilai-nilai l_x dan l_0 adalah didapat dari tabel mortalita Indonesia laki-laki dan perempuan tahun 2011. Program yang digunakan untuk menghitung regresi nonlinier pada Program Matlab adalah Nlinfit (*nonlinear least square and fitting*) dari hukum mortalita Makeham, maka didapatlah taksiran parameternya.

2.13 Transformasi Invers

Teknik transformasi invers merupakan salah satu teknik yang digunakan untuk membangkitkan variabel acak dengan mentransformasikan suatu distribusi menjadi distribusi uniform (0,1).

Asumsi distribusi uniform (0,1) dengan menggunakan variabel acak $R_{1,}$ $R_{2,}$ $R_{3,}$ ... yang telah tersedia (dibangkitkan melalui *random numbers*), setiap $R_{i,}$ mempunyai fungsi densitas:

$$f_R(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & lainnya \end{cases}$$

Dan fungsi distribusinya :

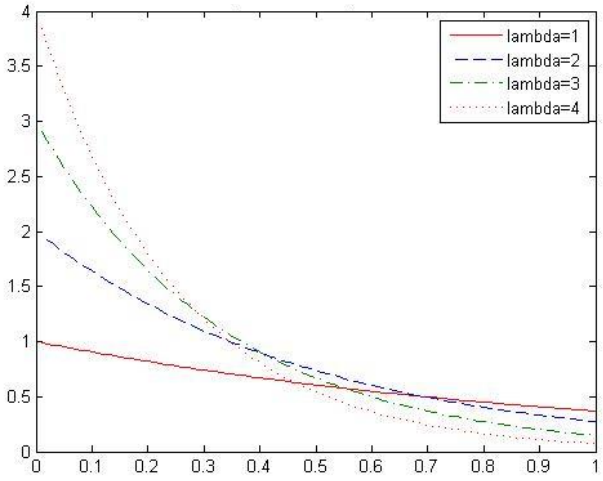
$$F_R(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Salah satu distribusi yang dapat ditransformasikan ke distribusi uniform (0,1) adalah distribusi eksponensial. Dari distribusi eksponensial, fungsi densitasnya :

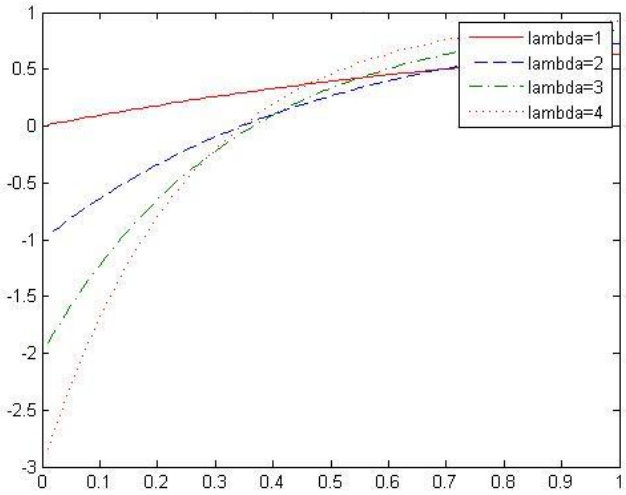
$$f(x) = \begin{cases} \lambda . e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Dan fungsi survival :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



Gambar 2.1 Plot fungsi densitas eksponensial



Gambar 2.2 Plot fungsi survival eksponensial

Berdasarkan Gambar 2.1 dapat dilihat bahwa plot fungsi densitas memiliki lengkungan dengan semakin besar nilai x maka nilai funginya semakin mengecil. lengkungan ini dipengaruhi oleh nilai lambda, dimana semakin besar nilai lambda semakin besar pula lengkungannya. Sehingga distribusi eksponensial sangat baik digunakan untuk

menggambarkan tingkat laju kematian. Gambar 2.2 menunjukkan bahwa Pada saat nilai lambda sama dengan satu, terlihat lengkungan plot fungsi distribusi menyerupai peluang percepatan tingkat laju kematian, oleh karena itu dalam penelitian ini digunakan lambda = 1.

Jika : $\lambda = 1$, maka $f(x) = e^{-x}, x \geq 0$

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-y}\, dy = 1 - e^{-\lambda x}$$

Langkah-langkah teknik transformasi invers dalam kasus ini menggunakan distribusi eksponensial adalah (Ahmadi, 2001):

Langkah 1. Hitung fungsi distribusi variabel acak X untuk distribusi eksponensial,

f.d $F(x) = 1 - e^{-x}, x \geq 0$

Langkah 2. Tetapkan $F(X) = R$ pada ruang lingkup X.

Untuk distribusi eksponensial, menjadi $1 - e^{-X} = R, x \geq 0$

X adalah variabel acak, maka, $1 - e^{-X}$ juga variabel acak yang disebut sebagai R. Nanti akan ditunjukkan R merupakan variabel acak dari distribusi uniform dengan interval (0,1).

Langkah 3. Selesaikan persamaan $F(X) = R$ untuk X dalam bentuk R.

Untuk distribusi eksponensial, penyelesaiannya adalah :

$$1 - e^{-X} = R$$

$$e^{-X} = 1 - R$$

$$X = -\ln(1 - R) \tag{2.13.1}$$

Persamaan 2.13.1 disebut sebagai variabel acak untuk distribusi eksponensial. Pada umumnya Persamaan 2.13.1 ditulis sebagai $X = F^{-1}(R)$.

Langkah 4. Membangkitkan variabel acak uniform $R_{1,}\, R_{2,}\, R_{3,} \ldots$ dan menghitung variabel acaknya yang diinginkan dengan :

$$X_i = F^{-1}(R_i)$$

Untuk kasus eksponensial, dari Persamaan 2.13.1, maka :

$$X_i = -\ln(1 - R_i) \tag{2.13.2}$$

untuk $i = 1,2,3, \ldots$ satu penyederhanaan bahwa biasanya pada Persamaan 2.13.2, R_i diganti dengan $1 - R_i$, menjadi :

$$X_i = -\ln\ R_i \tag{2.13.3}$$

R_i dan $1 - R_i$ adalah distribusi uniform (0,1).

Untuk mendapatkan variabel acak $T(x)$, dapat ditentukan dari Persamaan 2.12.2, yaitu :

$${}_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{exp\big(-m(c^{x+t} - 1)\big)}{exp\big(-m(c^x - 1)\big)} = exp\big(-m(c^{x+t} - c^x)\big)$$

Fungsi distribusi dari $T(x)$ adalah :

$${}_tq_x = 1 - {}_tp_x = 1 - exp\big(-m(c^{x+t} - c^x)\big) \tag{2.13.4}$$

Bentuk Persamaan 2.13.5 hampir sama dengan Persamaan 2.13.3, yaitu :

$$x = m(c^{x+t} - c^{x})$$

Maka dari langkah-langkah teknik tranformasi invers akan didapat variabel acak $T(x)$, yaitu :

$$X = -\ln(1 - R)$$
$$m(c^{x+t} - c^{x}) = -\ln(1 - R)$$

$$mc^{x+t} = -\ln(1 - R) + mc^{x}$$

$$c^{t} = (-\ln(1 - R) + mc^{x}) / \, mc^{x}$$

$$t = ln\left(\frac{(-\ln(1 - R) + mc^{x})}{mc^{x}}\right) / \ln c$$

Jadi variabel acak $T(x)$, adalah :

$$t_i = \frac{\ln(\ln(1 - R) + mc^{x}) - \ln mc^{x}}{\ln c} \qquad (2.13.5)$$

2.14 Simulasi Membangkitkan Variabel Acak

Untuk membangkitkan variabel acak $T(x)$ terdapat langkah-langkah yang harus diambil yaitu(Ahmadi, 2001) :

1. Langkah pertama mengambil variabel acak dari $U(0,1)$ sebesar $n = 10000$ data dari program Matlab berupa $U_1, U_2, \dots, U_{10000}$, kemudian membuat variabel acak baru menjadi variabel acak antitetik (*Antithetic variables*) yaitu yang didapat dari

hasil pengurangan $1 - U_i, i = 1,2 \ldots.,10000$. Sehingga diperoleh data sebanyak 20000. Kegunaan variabel antitetik adalah memperkecil variansi taksiran.

2. Kemudian menransformasikan data tersebut sehingga dapat berdistribusi eksponensial $(\lambda = 1)$ dengan $g = U_i + (1 - U_i)$, transformasinya adalah sebagai berikut :

$$M_g = -\ln\left(1 - U_g\right), \quad g = 1, \ 2, \ldots, 20000$$

3. Transformasi ini dilakukan untuk mensimulasikan $T(x)$ untuk kasus 1 orang, sehingga menghasilkan variabel acak : $t_1, t_2, \ldots, t_{2000}$ dengan menggunakan rumus 2.13.5, sebagai berikut :

$$t_i = \frac{\ln(M_i + mc^x) - \ln mc^x}{\ln c} \tag{2.14.1}$$

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam pada semester genap tahun ajaran 2018/2019.

3.2 Data Penelitian

Penelitian ini menggunakan peluang kematian yang mengacu pada Tabel Mortalita Indonesia (TMI) III Tahun 2011 untuk laki-laki dan perempuan yang terdapat pada buku Effendie, A.R., (2015) hal 132-137. Sebagian dari tabel tersebut disajikan dibawah ini dan tabel lengkapnya dituliskan dalam lampiran.

Tabel 1. TMI III Tahun 2011 untuk laki-laki

x	qx (laki-laki)	px	Lx
0	0.00802	0.99198	100000
1	0.00079	0.99921	99198
2	0.00063	0.99937	99119.63358
3	0.00051	0.99949	99057.18821
4	0.00043	0.99957	99006.66904
5	0.00038	0.99962	98964.09618
6	0.00034	0.99966	98926.48982
7	0.00031	0.99969	98892.85481
8	0.00029	0.99971	98862.19803

9	0.00028	0.99972	98833.52799
10	0.00027	0.99973	98805.8546
…	…	…	…
111	1	0	0.01683049

Tabel 2. TMI III Tahun 2011 untuk perempuan

x	qx (perempuan)	Px	Lx
0	0.0037	0.9963	100000
1	0.00056	0.99944	99630
2	0.00042	0.99958	99574.2072
3	0.00033	0.99967	99532.386
4	0.00028	0.99972	99499.5403
5	0.00027	0.99973	99471.6805
6	0.0003	0.9997	99444.8231
7	0.00031	0.99969	99414.9897
8	0.0003	0.9997	99384.171
9	0.00028	0.99972	99354.3558
10	0.00025	0.99975	99326.5366
…	…	…	…
111	1	0	0.55109576

3.3 Metodologi Penelitian

Dalam melakukan penelitian ini, proses perhitungan komputasi menggunakan program Matlab R2013b dan Microsof Office Excel 2016 untuk masing-masing usia penandatangan kontrak $x = 25, x = 35$ dan $x = 45$. Adapun langkah-langkah yang dilakukan adalah sebagai berikut :

1. Menentukan kondisi awal yang digunakan :

a. Menaksir parameter hukum mortalita hukum Gompertz (m dan c) pada data tabel mortalita Indonesia (TMI) III tahun 2011 dengan metode persamaan regresi nonlinier.

$$l_x = l_0 * \exp[-\frac{B}{\ln c}(c^x - 1)]$$

$m = Bc^x$

b. Menaksir parameter mortalita hukum Makeham (A, m dan c) pada data tabel mortalita Indonesia (TMI) III tahun 2013 dengan metode persamaan regresi nonlinier.

$$l_x = l_0 * \exp[-Ax - \frac{B}{\ln c}(c^x - 1)]$$

$m = A + Bc^x$

c. Melakukan simulasi variabel acak $T(x)$.

Variabel acak $T(x)$ disimulasikan untuk masing-masing hukum mortalita dengan parameter m dan c yang diperoleh dari poin a dan b.

$$t_x = \frac{\ln(\ln(1 - R) + mc^x) - \ln mc^x}{\ln c}$$

Hasil dari simulasi ini selanjutnya digunakan sebagai peluang seseorang akan mampu bertahan hidup sampai usia $x + t$ yang dinotasikan dengan ${}_tp_x$.

d. Periode p-kali setahun, p sebanyak 3

Periode p-kali setahun adalah banyaknya periode pembayaran yang dilakukan selama kurun waktu satu tahun.

e. Tingkat laju suku bunga majemuk (*force of interest*) dengan bunga (i) = 6% yang memenuhi hubungan :

$$v^t = (1+i)^{-t} = e^{-\delta t}$$

f. Tingkat diskonto nominal

$$d^{(p)} = p * \left[1 - v^{1/p}\right]$$

g. Anuitas pasti $1/p$ kali

$$\bar{a}_{\overline{1/p|}} = (1 - v^{\frac{1}{p}})/\ \delta$$

2. Menghitung *Actuarial present value* (APV) untuk masing-masing asuransi seumur hidup:

Perhitungan APV untuk masing-masing asuransi menggunakan nilai ${}_tp_x$ yang diperoleh dari hasil simulasi variabel acak $T(x)$.

a. Asuransi kontinu $(\bar{A}_x)$

$$\bar{A}_x = E[v^T] = \int_0^\infty v^t \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t}\, dt$$

b. Asuransi diskrit (A_x)

$$A_x = E[v^{K+1}] = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k}$$

c. Asuransi p-kali $({A_x}^p)$

$${A_x}^p = E\left[v^{K+\frac{J+1}{p}}\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{p-1} v^{K+\frac{J+1}{p}}\ {}_{K+\frac{J+1}{p}}p_x\ {}_{\frac{1}{p}}q_{K+\frac{J+1}{p}}$$

3. Menghitung APV dari anuitas hidup

Perhitungan APV untuk masing-masing anuitas hidup menggunakan nilai ${}_tp_x$ yang diperoleh dari hasil simulasi variabel acak $T(x)$.

a. Metode Kontinu ($\bar{a}_x$)

$$\bar{a}_x = E\left[\bar{a}_{\overline{T}|}\right] = \int_0^\infty v^T \cdot {}_tp_x \, dt$$

b. Metode Diskrit (a_x)

$$\ddot{a}_x = E\left[\ddot{a}_{\overline{K+J}|}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot {}_kp_x$$

c. Metode P-kali ($\ddot{a}_x{}^p$)

$$\ddot{a}_x^{(p)} = E\left[\ddot{a}^{(p)}_{\overline{K+\frac{J+1}{p}}|}\right] = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{\infty} v^{k/p} \cdot {}_{\frac{k}{p}}p_x$$

4. Menghitung premi jenis-jenis asuransi :

a. Premi Metode Kontinu

Perhitungan premi dengan metode kontinu menggunakan asuransi kontinu yang diperoleh dari hasil langkah kedua poin a dan anuitas hidup kontinu yang diperoleh dari hasil langkah ketiga poin a.

$$\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}$$

b. Premi Metode Diskonto Kontinu

Perhitungan premi dengan metode diskonto kontinu menggunakan premi asuransi kontinu yang diperoleh dari hasil langkah keempat poin a dan anuitas hidup aportionabel yang diperoleh dari hasil langkah ketiga poin c.

$$P^{(p)}(\bar{A}_x) = \bar{P}(\bar{A}_x) \,.\, \bar{a}_{\overline{\frac{1}{p}|}} \,.\, p$$

c. Premi Metode Semi Kontinu

Perhitungan premi dengan metode semi kontinu menggunakan asuransi kontinu yang diperoleh dari hasil langkah kedua poin a dan anuitas hidup p-kali yang diperoleh dari hasil langkah ketiga poin c.

$$P^{(p)}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_x^{(p)}}$$

d. Premi Metode Diskrit

Perhitungan premi dengan metode diskrit menggunakan premi asuransi diskrit yang diperoleh dari hasil langkah kedua poin b dan anuitas hidup p-kali yang diperoleh dari hasil langkah ketiga poin c.

$$P^{(m)}(A_x) = A_x / \ddot{a}_x^{(m)}$$

3.4 Algoritma Pemrograman Perhitungan Premi

1. Masukkan tingkat laju kematian hukum mortalilta Gompertz dan Makeham (load)
2. Memasukkan usia
3. Tentukan batas awal (jl) = 0, bts = 1
4. Ketika iterasi i ≥ bts dan ketika j ≥ $p + 1$
   a. Hitung xr = usia+(i-1)+((j-1)/p)
   b. Hitung Tx=log(((-log(E))+(mg*cg^xr))/(mg*cg^xr))/log(cg)

c. Asuransi dan anuitas hidup

```
A1=mean(v.^Tx);              %asuransi jiwa Kontinu
a1=mean((1-v.^Tx)/dlt);      %anuitas jiwa Kontinu
A2=mean(v.^(floor(Tx)+1));   %asuransi jiwa Diskrit
a2=mean((1-v.^(floor(Tx1)+1))/d); %anuitas jiwa diskrit
Kmr=floor(Tx)+ceil((Tx-floor(Tx))*p)/p;
A3=mean(v.^Kmr);             %asuransi jiwa m-kali
a3=mean((1-v.^Kmr)/dm);      %anuitas jiwa m-kali
```

5. Ketika jl = jl+1 dan jl < 2

Hitung premi jenis-jenis asuransi

```
Kontinu=A1/a1;              %premi asuransi kontinu
Diskonto=Kontinu*am*p;  %premi asuransi diskonto kontinu
Semi=A1/a3;                 %premi asuransi semi kontinu
Diskrit=A2/a3;              %premi asuransi diskrit
```

V. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut :

1. Premi jenis-jenis asuransi dapat dengan mudah dihitung dengan kecepatan rata-rata proses perhitungan untuk laki-laki 0.086903 detik dan untuk perempuan 0.086570 detik.
2. Usia sangat mempengaruhi besarnya harga premi, diamana semakin besar usia penandatanganan kontrak maka premi yang harus dibayar juga semakin besar.
3. Pendekatan hukum mortalita Makeham adalah pendekatan terbaik untuk menghitung premi. Karena hasil perhitungan premi jenis-jenis asuransi yang diperoleh dari pendekatan hukum mortalita Makeham lebih besar dibandingkan dengan tabel mortalita dan hukum mortalita Gompertz.

DAFTAR PUSTAKA

Ahmadi, I. D. P., 2001. *Ekivalen Metodologi Cadangan*. Thesis. Magister Aktuaria Program Pasca Sarjana Institut Teknologi Bandung, Bandung.

Bowers, N. L., et al. 1997. *Actuarial Mathematics*. The Society of Actuaries, United States of America.

Effendie, A.R., 2015. *Matematika Dengan Software R*. Gajah Mada University Press, Yogyakarta.

Futamii,T. 1993. *Matematika Asuransi Jiwa, Bagian I*. Oriental Life Insurance Cultural Development Centre, Inc. Tokyo. Japan.

Mustari, N. S. 2013. *Model Nonlinear*. Skripsi. Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung, Bandar Lampung.

Sembiring, R.K.1986. *Asuransi I Modul 1-9*. Karunika Jakarta, Jakarta.