ANALISIS KESTABILAN MODEL EPIDEMIK SIR DENGAN PENGARUH VAKSIN

(Skripsi)

Oleh

EKA SULISTIA NINGSIH

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

ABSTRAK

ANALISIS KESTABILAN MODEL EPIDEMIK SIR DENGAN PENGARUH VAKSIN

oleh

Eka Sulistia Ningsih

Pengaruh vaksinasi dapat membantu dalam mengurangi penyebaran penyakit. Salah satu cara untuk membantu mempermudah mengendalikan penyebaran penyakit yaitu dengan menggunakan model matematika. Model yang dimaksud yaitu model epidemik *SIR* (*Susceptible*, *Infected*, *Recovered*). Pada penelitian ini, model epidemik *SIR* mengahsilkan dua titik kesetimbangan. Titik kesetimbangan yang dimaksud yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik. Analisis yang dilakukan menghasilkan rasio reproduksi vaksin. Selanjutnya, diberikan simulasi untuk setiap kasus yang menggambarkan perilaku dan kestabilan titik kesetimbangan.

Kata Kunci :Vaksin, Model Matematika, kestabilan

ABSTRAK

STABILITY ANALYSIS OF SIR MODEL WITH VACCINATION

By

Eka Sulistia Ningsih

The effect of vaccination can help in reducing the spread of disease. A way to facilitate controlling the spread of disease is by using mathematical models. The model is the SIR epidemic model (Susceptible, Infected, Recovered). In this study, the SIR epidemic model produced two equilibrium points. The equilibrium points are a disease-free and endemic equilibrium point. The analysis produces the reproduction ratio of the vaccine. Next, simulations for each case describe the behavior and stability of the equilibrium point.

Keyword :*Vaccination, Mathematical Model, Stability*

ANALISIS KESTABILAN MODEL EPIDEMIK SIR DENGAN PENGARUH VAKSIN

Oleh

EKA SULISTIA NINGSIH

Skripsi

Sebagai Salah Satu Untuk Mencapai Gelar
Sarjana Sains

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

Judul Skripsi : **ANALISIS KESTABILAN MODEL EPIDEMIK SIR DENGAN PENGARUH VAKSIN**

Nama Mahasiswa : *Eka Sulistia Ningsih*

No. Pokok Mahasiswa : 1517031035

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.
NIP 19700831 199903 1 002

Drs. Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D.
NIP 19620513 198603 1 003

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Drs. Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Drs. Suratman, M.Sc.
NIP 19640604 199003 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **08 Maret 2019**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	: Eka Sulistia Ningsih
Nomor Pokok Mahasiswa	: 1517031035
Judul	: Analisis Kestabilan Model Epidemik *SIR* Dengan Pengaruh Vaksin
Jurusan	: Matematika

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri, bukan hasil orang lain, dan semua hasil tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, Maret 2019

Penulis

Eka Sulistia Ningsih
NPM. 1517031035

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Eka Sulistia Ningsih, Anak pertama dari empat bersaudara yang dilahirkan di Bekri pada tanggal 4 Maret 1997 oleh pasangan Bapak Aria Gunawan dan Ibu Sri Hartini. Penulis memiliki adik laki-laki bernama Julian Aria Dwiva dan dua adik perempuan yaitu Ari Fitriani dan Astika Ariyanti.

Penulis menempuh pendidikan Taman Kanak-kanak IKI PTP N VII Bekri pada tahun 2002 – 2003, kemudian menumpuh pendidikan Sekolah Dasar (SD) diselesaikan di SD Negeri 2 Sinar Banten pada tahun 2003-2009, lalu bersekolah di SMP Negeri 2 Bangun Rejo pada tahun 2009-2012, dan bersekolah SMA Negeri 1 Trimurjo pada tahun 2012-2015.

Pada tahun 2015 penulis melanjutkan pendidikan di perguruan tinggi dan terdaftar sebagai mahasiswa S1 Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur SNMPTN. Selama menjadi mahasiswi, penulis ikut serta dalam organisasi Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA) FMIPA UNILA sebagai anggota aktif.

Pada tahun 2018 penulis melakukan Kerja Praktik (KP) di PTP N VII Unit Bekri di Lampung Tengah, dan Pada tahu yang sama penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Mulyo, Kecamatan Gunung Terang Kabupaten Tulang Bawang Barat.

PERSEMBAHAN

Dengan Mengucapkan Alahmdulilah,

Puji dan syukur kepada Allah Subhanahu Wata'ala atas segala nikmat dan karunia-Nya, dan suri tauladan Nabi Muhammad Shallallahu 'Alaihi Wasalam yang menjadi contoh dan panutan untuk kita semua.

Kupersembahkan sebuah karya kecil ini untuk:

Ayahanda Aria Gunawan dan Ibunda Sri Hartini

Terimkasih atas limpahan kasih sayang, pengorbanan, doa, dan seluruh motivasi di setiap langkahku. Karena atas doa dan ridho kalian, Allah memudahkan setiap perjalanan hidup ini.

Terimalah bukti kecil ini sebagai kado keseriusanku untuk membalas semua pengorbanan, keikhlasan, dan jerih payah yang selama ini kalian lakukan.

Adik-adikku Julian Aria Dwiva, Ari Fitriani dan Astika Ariyanti

Semoga apa yang telah kakakmu lakukan biasa menjadi contoh dan motivasi untuk kalian.

Almamaterku Tercinta Universitas Lampung

Kata Inspirasi

“Lakukan kebaikan sekecil apapun, karena engkau tidak pernah tau kebaikan mana yang akan membawamu ke surga”
(Imam Al-Hasan)

“Setiap pria dan wanita sukses adalah pemimpi-pemimpi besar. Mereka berimajinasi tentang masa depan mereka, berbuat sebaik mungkin dalam setiap hal, dan bekerja setiap hari menuju visi jauh ke depan yang menjadi tujuan mereka “(Brian Tracy)

"Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan, sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan."
(Asy-Syarh ayat 5-6)

“Hidup adalah sebuah petualangan”
(Eka Sulistia Ningsih)

SANWACANA

Alhamdulilah, puji syukur penulis panjatkan atas kehadirat Allajh SWT. yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya sehingga dapat terselesaikannya skripsi dengan judul **"Analisis Kestabilan Model Epidemik *SIR* Dengan Pengaruh Vaksin".**

Terselesaikanya skripsi ini tidak terlepas dari bantuan, kerjasama, dan dukungan berbagai pihak. Untuk itu penulis mengucapkan terimakasih kepada :

1. Bapak Agus Sutrisno, S.Si., M.Si., selaku Pembimbing I yang telah memberikan arahan, bimbingan, ide, kritik dan saran kepada penulis selama proses pembuatan skripsi ini.
2. Bapak Drs. Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D., selaku Pembimbing II yang telah memberikan arahan, dukungan, serta semangat kepada penulis.
3. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si., selaku Penguji yang telah memberikan ide, kritik dan saran sehingga terselesainya skripsi ini.
4. Bapak Drs. Rudi Ruswandi, M.Si., selaku Pembimbing Akademik yang telah membimbing penulis dalam menyelesaikan permasalahan seputar akademik.
5. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, M.A, Ph.D., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.

6. Bapak Drs. Suratman Umar, M.Sc. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.
7. Seluruh Dosen, Staf dan Karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
8. Bapak Aria Gunawan, Ibu Sri Hartini dan keluarga yang selalu mendampingi langkah penulis dengan do'a dan nasihat untuk selalu berjuang setiap harinya.
9. Julian Aria Dwiva, Ari Fitriani dan Astika Ariyanti yang selalu member semangat, motivasi, dan do'a serta tak pernah bosan mendengar keluh kesah penulis.
10. Teman-teman Matematika 2015, Abang dan Yunda yang selalu memberikan semangat, ide dan saran kepada penulis.
11. Sahabat-sahabat Neli, Fransiska, Wilma, Farida, Wahyu, Uli, Riana dan teman-teman kelas A yang telah menjadi pelangi indah di masa kuliah penulis.
12. Teman-teman KKN 2018 Desa Mulyo Jadi.
13. Semua pihak yang terlibat dalam penyelesaian skripsi ini.

Tentunya, Penulis menyadari bahwa masih ada kekurangan dari skripsi ini, akan tetapi besar harapan semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Sekian dan terima kasih.

Bandar Lampung,   Maret 2019

Penulis

Eka Sulistia Ningsih

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Model matematika merupakan salah satu alat yang dapat membantu mempermudah penyelesaian masalah dalam kehidupan nyata. Masalah-masalah tersebut dapat dibawa ke dalam model matematis dengan menggunakan asumsi-asumsi tertentu. Selanjutnya, dari model yang didapat dicari solusinya, baik dengan cara analitis maupun secara numerik. Salah satu permasalahan di kehidupan nyata adalah mengenai penyebaran suatu penyakit. Pada tahun 1927, W. O. Kermarck dan A. G. Mckendrick memperkenalkan sebuah model penyebaran penyakit. Model matematika yang dimaksud adalah model epidemik *SIR* (*Susceptible-Infected-Recovered*) klasik. Secara umum, model epidemik *SIR* klasik dapat disajikan sebagai sistem persamaan diferensial *autunomuos*. Sampai saat ini, model epidemik *SIR* klasik tersebut telah dikembangkan oleh ilmuan lain seperti Picollo dan Billings, dan K. J. Vareen untuk mempelajari penyebaran penyakit dalam kasus-kasus tertentu.

Model epidemik *SIR* klasik membagi populasi menjadi tiga kelompok, yaitu kelompok individu yang sehat tetapi dapat terinfeksi penyakit (*susceptible*), kelompok individu yang terinfeksi dan dapat menularkan penyakit (*infected*), dan individu yang telah sembuh dan kebal dari penyakit (*recovered*). Secara garis besar, model epidemik *SIR* klasik menggambarkan alur penyebaran penyakit dari kelompok individu *susceptible* menjadi *infected* melalui kontak langsung atau perantara lain. Selanjutnya, kelompok individu *infected* yang mampu bertahan terhadap penyakit akan sembuh dan memasuki kelompok *recovered*.

Salah satu cara untuk menanggulangi penyebaran penyakit yaitu dengan vaksin. Vaksin merupakan bahan antigenic yang digunakan untuk menghasilkan kekebalan terhadap suatu penyakit. Pemberian vaksin dilakukan untuk mencegah atau mengurangi pengaruh infeksi penyebab penyakit.

1.2 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan kestabilan disekitar titik ekuilbrium dan memodelkan secara matematis model epidemik *SIR* dengan pengaruh vaksin menggunakan metode Runge-Kutta.

1.3 Manfaat Penelitian

Penelitian ini bermanfaat untuk mengetahui analisis kestabilan titik kesetimbangan dan model matematis pada model epidemik *SIR* dengan pengaruh vaksin menggunakan metode Runge-Kutta.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial

Definisi 2.1.1:

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan satu (atau beberapa)fungsi yang tidak diketahui.

Contoh 1:

1) $y' + xy = 3$
2) $y'' + 2y' + 3y = \cos x$
3) $y'' = (1 + y')(x^2 + y^2)$
4) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

Contoh 1 merupakan persamaan-persamaan diferensial. Dalam persamaan (1)-(3) merupakan fungsi yang tidak diketahui dan dinyatakan dengan *y* dan dianggap sebagai fungsi satu peubah bebas *x*, yaitu $y = y(x)$. Sedangkan persamaan (4) fungsi yang tidak diketahui *u* dianggap sebagai fungsi dua peubah bebas *t* dan *x*, yaitu $u = u(t, x)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ dan $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ berturut-turut adalah turunan parsial kedua dari fungsi $u(t, x)$ terhadap *t* dan *x*.

Definisi 2.1.2

Suatu persamaan diferensial biasa orde *n* adalah suatu persamaan yang dapat ditulis dalam bentuk

$$y^{(n)} = F(x, y, y, \cdots, y^{(n-1)})$$

Dimana y, y’, ⋯, $y^{(n)}$ semua ditentukan nilainya oleh *x*

Contoh 2:

1) $\frac{dy}{dx} - y = x$

2) $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 - 2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y - 3x = 0$

Definisi 2.1.3:

Orde dari persamaan diferensial yaitu derivative tertinggi yang terdapat pada persamaan differensial tersebut

Contoh 3:

1) $\frac{dy}{dx} = 2\ \cos 2x - 3e^{-x}$

2) $y\,dy - xe^x dx = 0$

3) $\frac{d^3y}{dx^3} + 2xy = e^x$

Pada contoh 3 di atas (1) dan (2) merupakan persamaan diferensial berorde satu, sedangkan (3) persmaan diferensial berorde tiga (Baiduri, 2002).

2.2 Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan difernsial biasa adalah suatu persamaan meliputi derivatiif biasa dari *uknown function*. Di dalam persamaan diferensial biasa, *uknown function* bergantung pada satu variabel bebas. Solusi umum dari persamaan diferensial biasa memuat satu kontanta sembarang. Solusi umum dapat diintepretasikan secara geometri dengan bidang ruang berdimensi dua, yaitu memiliki nilai yang berbeda dari sembarang konstanta. Keunikan solusi memuat nilai awal $y=y_o$ketika $x=x_o$.

Contoh :

Tentukan solusi umum dari persamaan diferensial berikut.

$$\frac{dx}{dy}+ (tan\ x)\ y = sin\ x$$

Penyelesaian:

Persamaan diferensial linear orde 1 dengan

$$a(x) = tan\ x\ \ dan\ b(x) = sin\ x$$

Keduanya kontinu pada interval (0, $\frac{\pi}{2}$) . Kalikan kedua sisi dengan

$$e^{\int tan\ xdx} = e^{-ln\ cos\ x} = \frac{1}{cos\ x}$$

Maka dapat

$$(y\frac{1}{cos\ x}) = \frac{sin\ x}{cos\ x}$$

Integralkan kedua ruas, maka dapat

$$y\frac{1}{cos\ x} = c - ln\ cos\ x$$

Dengan membagi kedu sisi dengan $\frac{1}{\cos x}$ (mengalikan kedua sisi dengan *cos x*), maka solusi adalah

$$y(x) = (\cos x)\,(c - \ln \cos x),\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

(Finzio dan Ladas, 1988).

2. 3 Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persmaan diferensial adalah suatu sistem yang memuat *n* buah persamaan diferensial, dengan *n* buah fungsi yang tidak diketahui, dimana *n* merupakan bilangan bulat positif lebih besar sama dengan dua. Antara persamaan diferensial yang satu dengan yang lain saling berkaitan dan konsisten.

Bentuk umum dari suatu sistem *n* persamaan orde pertama mempunyai bentuk sebagai berikut:

$$\frac{dx_1}{dt} = g_1\,(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = g_2\,(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = g_n\,(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

Dengan $x_1, x_2, \cdots, x_n$adalah variabel bebas dan *t* adalah varibel terikat, sehingga $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \cdots, x_n = x_n(t)$, dimana $\frac{dx_n}{dt}$ merupakan derivative fungsi $x_n$terhadap *t*, dan *g*, adalah fungsi yang tergantung pada variabel $x_1, x_2, \cdots, x_n$ dan *t* (Neuhaser, 2004).

2.4 Titik Kestimbangan

Panfilov menyebutkan bahwa titik kestimbangan dari sistem merupakan titik dimana sistem tersebut tidak mengalami perubahan sepanjang waktu. Secara sistematis, define titik kestimbangan dapat dituliskan pada definisi 2.1.1 berikut.

Definisi 2.1.1

Titik (x^*, y^*) disebut titik kestimbangan jika

$$f_1(x^*, y^*) = 0, \qquad f_2(x^*, y^*) = 0.$$

Selanjutnya, untuk mengetahui perilaku sistem disekitar titik kestimbangan digunakan konsep kestabilan. Menurut Bellomo dan Preziosi, definisi kestabilan dituliskan pada definisi berikut ini:

Definisi 2.1.2

Titik kestimbangan (x^*, y^*) dikatakan stabil jika untuk setiap $t > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga setiap penyelesaian $(x(t), y(t))$ yang pada $t = 0$ memenuhi

$$(x(0) - x^*)^2 - (y(0) - y^*)^2 < \delta$$

Berlaku

$$(x(t) - x^*)^2 - (y(t) - y^*)^2 < \in$$

Untuk setiap $t \geq 0$. Jika tidak demikian dikatakan tak stabil.

Definisi 2.1.3

Titik kesetimbangan (x^*, y^*) dikatakan stabil asimtotis jika titik tersebut stabil dan terdapat δ_0 sedimikan hingga setiap penyelesaian $\big(x(t), y(t)\big)$yangpada $t = 0$ memenuhi

$$(x(0) - x^*)^2 - (y(0) - y^*) < \delta_0$$

Berlaku

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \lim_{t\to\infty} y(t) = 0$$

Untuk setiap t$\geq$ 0.

Berdasarkan Definisi 2.1.2 dan 2.1.3 dapat dikatan bahwa pada sietem ini stabil berarti perubahan kecil dalam syarat awal hanya menyebabkan pengaruh kecil pada penyelesaian. Sistem ini stabil asimtotik berarti pengaruh dari perubahan kecil cenderung menghilang sama sekali (tidak berpengaruh), sedangkan kestabilan berarti suatu perubahan kecil pada syarat awalnya akan berakibat besar pada penyelesaian

2.5 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 2.1

Jika A adalah matriks berukuran $n\ x\ n$ maka vektor tak nol di dalam R^n dinamakan vektor eigen dari A jika Ax adalah kelipatan scalar dari x yakni

$$Ax = \lambda x$$

untuk suatu skalar λ. Skalar λ dinamakan nilai eigen dari A dan x dikatan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ. Selanjutnya untuk mencari nilai eigen dari matriks A, persamaan diatas dapat ditulis menjadi

$$Ax = \lambda x$$

$$Ax = \lambda Ix$$

$$Ax - \lambda Ix = 0$$

$$(Ax - \lambda Ix) = 0$$

dengan *I* adalah matriks identitas.

Menurut (Howard, 1991) supaya λ menjadi nilai eigen maka harus ada pemecahan tak nol dari persamaan $(Ax - \lambda I) = 0$. Persamaan ini akan mempunyai pemecahan tak nol jika dan hanya jika

$$det(A - \lambda I) = 0$$

yang disebut sebagai persamaan karakteristik dari A.

Contoh

Akan dicari nilai-nilai eigen dari matriks A berukuran 3 x 3,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Peneyelesaian

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh persamaan karakteristik dari A yaitu

$$det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) = 0.$$

Solusi dari persamaan diatas adalah $\lambda = 1, \lambda = 2$, dan $(\lambda = -1)$ yang merupakan nilai-nilai eigen dari matriks A.

2.6 Analisis Kestabilan

Dalam menemukan titik kestabilan pada persamaan linear adalah dengan menguji sekitaran titik kestabilan dan sistem yang sederhana untuk menentukan nilai eigen yang menghasilkan matriks Jacobian sedangkan penentuan titik stabil pada sistem nonlinear juga sangat penting dalam perilaku sistemnya.

Bentuk-bentuk umum dan tipe-tipe kesetimbangan sistem linear dengan sifat kestabilan yaitu:

1. Kedua sisi eigen positif, menghasilkan trayektori simpul tak stabil (*unstablenode*).
2. Nilai eigen positif, yang lainnya negatif, menghasilkan titik pelana (*saddle point*).
3. Kedua nilai eigen negatif, menghasilkan simpul stabil (*stable node*).
4. Bagian positif, menghasilkan spiral tak stabil (*unstable spiral*).
5. Bagian real nol, menghasilkan trayektori pusat sentral atau stabil netral (*neutral center* atau *neutral stable*).
6. Bagian real negatif, menghasilkan spiral stabil (*stable spiral*)

Kestabilan suatu titik kesetimbangan dapat diperiksa berdasarkan nilai eigen dengan menyelesaikan $|\lambda I - A| = 0$ dengan A adalah matriks yang berukuran n x n, menghasilkan polynomial dengan derajat yang sama dengan ukuran matriks A yang mempunyai bentuk umum

$$\alpha_n\lambda_n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0,$$

Stabilitas titik kestimbangan $\boldsymbol{x}^*$ ditentukan berdasarkan tnada bagian real pada nilaieigen yang dibagi menjadi tiga, yaitu:

1. Stabil: Titik kesetimbangan $\boldsymbol{x}^*$ dikatakan stabil jika dan hanya jika nilai eigen λ adalah real dan negatif atau mempunyai bagian real tak positif.
2. Stabil Asimtotik: Titik kesetimbangan $\boldsymbol{x}^*$ dikatakan satbil asimtotik jika dan hanya jika nilai eigen λ adalah real dan negative atau mempunyai bagian real negatif.
3. Tidak stabil: Titik kesetimbangan $\boldsymbol{x}^*$ dikatakan tidak stabil jika dan hanya jika nilai eigen λ adalah real dan positif atau mempunyai paling sedikit satu nilai eigen dengan bagian real positif (Tarumingkeng, 1994).

2.7 Model Epidemi SIR

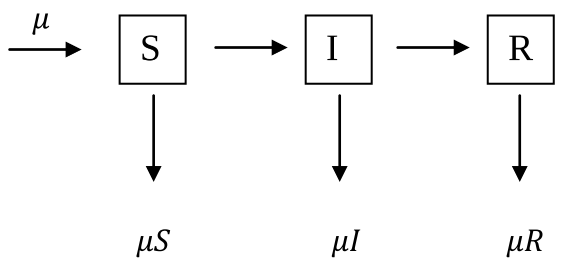
Definisi 2.5

Satu dari model epidemi sir paling dasar disebut model epidemi SIR yang pertama kali diperkenalkan oleh Kermack-McKendrick. Jumlah populasi dibagi menjadi ke dalam tiga kelas:

S : kelas *suspectible*, adalah kelas yang berisi individu-individu yang dapat terkena penyakit dan masuk ke kelas *infected* (S > 0),

I : kelas *infected*, adalah kelas yang berisi individu-individu pada kelas *suspectible* ($I > 0$), dan

R : kelas *revored*, adalah kelas yang berisi individu-individu yang telah sembuh dari penyakit ($R > 0$) (Copasso, 1993).



Model matematika dari diagram kompartemen di atas adalah :

$$\frac{dS}{dt} = \mu - \beta SI - \mu S$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - (\alpha + \mu)I, \text{ dan}$$

$$\frac{dR}{dt} = \alpha I - \mu R, \text{ dengan}$$

μ : laju kelahiran atau kematian ($0 \leq \mu \leq 1$)

β : laju penularan penyakit ($0 \leq \beta \leq 1$)

α : laju kesembuhan ($0 \leq \alpha \leq 1$)

Sebeleum mendapatkan model tersebut, pertama-tama membentuk asumsi-asumsi sebgai berikut:

1. Populasi tertutup (tidak ada proses migrasi)
2. Terjadi proses kelahiran dan kematian
3. Laju kelahiran sama dengan laju kematian (jumlah populasi tetap)
4. Penyakit dapat disembuhkan
5. Setiap individu yang belum terserang penyakit masuk ke subpopulasi *susceptible*
6. Individu yang sembuh mempunyai kekebalan dalam jangka waktu tertentu
7. Penyakit menular melalui kontak langsung antara individu rentan dengan penderita
8. Tidak ada masa inkubasi apabila terjadi proses penularan

9. Masa terjangkit yang cukup lama

Diasumsikan terdapat kontak yang tetap dari subpopulasi *susceptible* dan *infected* dalam populasi tersebut angka *susceptible* ditambah dengan bilangan konstan. Bilangan konstan melambangkan kondisi di mana muncul kelahiran baru dan bayi yang baru lahir otomatis masuk dalam kondisi rentan. Karena laju kelahiran sama dengan kematian, maka nilai kedua laju sama yakni μ. Misalkan laju penularan penyakit adalah β, maka dalam satu waktu laju dari *susceptible* menjadi *infected* adalah $\frac{dS}{dt} = \mu - \beta SI - \mu S$, dengan β adalah konstanta posiif dan μS adalah jumlah kematian pada subpopulasi *susceptible*.

Jika $\alpha > 0$ adalah laju kesembuhan dari *infected* menjadi *recovered*, maka $\frac{dI}{dt} = \beta SI - (\alpha + \mu)I$, dengan μI adalah jumlah kematian pada subpopulasi *infected*. Laju perubahan subpopulasi *recovered* adalah $\frac{dR}{dt} = \alpha I - \mu R$, dengan μR adalah jumlah kematian dari subpopulasi *recovered*.

2.8 Metode Runge-Kutta

Metode Runge-Kutta adalah alternative lain dari metode deret Taylor yang tidak membutuhkan perhitungan turunan. Metode ini berusaha mendapatkan derajat ketelitian yang lebih tinggi, dan sekligus menghindarkan keperluan mencari turunan yang lebih tinggi dengan jalan mengevaluasi fungsi (x , y) pada titik terpilih dalam setiap selang langkah. Metode Runge-Kutta adalah metode PDB yang paling populer karena lebih banyak dipakai dalam praktek.

Bentuk umum metode Runge-Kutta orde-n ialah:

$$y_{r+1} = y_r + a_1k_1 + a_2k_2 + \cdots + a_nk_n,$$

Dengan $a_1, a_2, \cdots a_n$ adalah konstanta, dan

$$k_1 = h\,f\,(x_r\,, y_r)$$

$$k_2 = h\,f\,(x_r + p_1h, y_r + q_{11}k_1)$$

$$k_2 = h\,f\,(x_r + p_2h, y_r + q_{12}k_2)$$

$$\vdots$$

$$K_n = h\,f\,(x_r + p_{n-1}, y_r + q_{n-1,1}k_1 + q_{n-1,2}k_2 + \ldots + q_{n-1,n-1}k_{n-1})$$

Nilai a_i , p_i …, q_{ij} dipilih sedemikian rupa sehingga tiga sifat utama yaitu:

1. Metode satu langkah : untuk mencapai y_{r+1} hanya diperlukan keterangan yang tersedia pada titik sebelumnya yaitu x_r , y_r
2. Mendekati ketelitian deret Taylor sampai suku dalam h^p, dimana nilai p berbeda untuk metode yang berbeda, dan nilai p ini disebut derajat dari metode
3. Tidak memerlukan perhitungan turunan $f\ (x,\ y)$ tetapi hanya memerlukan fungsi itu sendiri.

   Metode Runge-Kutta yang umum digunakan untuk mengitegrasikan persamaan diferensial adalah metode Runge-Kutta orde keempat yang berbentuk

$$y_{r+1} = y_r + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Dimana

$k_1 = f(x_r, y_r)$

$k_2 = f(x_r + \frac{h}{2}, y_r + \frac{hk1}{2})$

$k_3 = f(x_r + h, y_r + \frac{hk2}{2})$

$k_4 = f(x_r + h, y_r + hk_3)$

(Djojodiharjo, 2000)

III. METODE PENELITIAN

3.1 Tempat dan Waktu Penelitian

Penelitian ini dilakukan di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung dan waktu penelitian dilaksanakan pada semester ganjil tahun ajaran 2018/2019.

3.2 Metode Penelitian

Adapun langkah-langkah yang dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Membuat asumsi-asumsi yang akan dilakukan.
2. Menkostruksikan model epidemik *SIR* dengan pengaruh vaksin.
3. Menentukan titik kestimbangan model epidemik *SIR* dengan pengaruh vaksin.
4. Menganalisis kestabilan titik kestimbangan model epidemik *SIR* dengan pengaruh vaksin.
5. Melakukan simulasi numerik.
6. Menginterpretasikan hasil dari solusi dinamik tersebut.

V. PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Dari hasil dan pembahasan penelitian yang telah dilakukan, maka dapat disimpulkan bahwa:

1. Model matemtika epidemik *SIR* dengan pengaruh vaksin yaitu:

$$\frac{ds}{dt} = (1-\rho)\mu - \beta si - \mu s$$

$$\frac{di}{dt} = \beta si - \gamma i - \mu i$$

$$\frac{dr}{dt} = \rho\mu - \gamma i - \mu r$$

$$\frac{dv}{dt} = \rho\mu - \mu v$$

2. Diperoleh dua kestabilan dari model matematika epidemik *SIR* dengan pengaruh vaksin yaitu:

   a. Kestabilan titik kesetimbangan bebas infeksi yaitu $(E_0^*) = \big((1-\rho), 0, \rho\big)$ yang satbil pada saat $R_v < 1$. Sehingga pada saat $R_v < 1$ penyakit hilang dari populasi.

b. Kestabilan titik kesetimbangan epidemik penyakit yaitu $(E_e) = (s_e, i_e, v_e) = \left(\frac{\gamma+\mu}{\beta}, \frac{(1-\rho)\mu\beta - \mu(\mu+\gamma)}{\beta(\mu+\gamma)}, \rho\right)$ stabil asimtotik jika $R_v > 1$. akan ada sampai waktu terbatas.

5.2 Saran

Disarankan untuk pembaca yang tertarik masalah ini dapat mengembangkan model epidemi *SIR* dengan menambahkan peubah yang belum disebutkan pada penilitian ini, contohnya factor imigrasi.

DAFTAR PUSTAKA

Baiduri. 2002. *Persamaan Diferensialdan Matematika Model.* UMM Press. Malang.

Bartle, R. 2011. *Introduction to Real Analysis*.4^{th} . John Wiley & Sons. NewYork.

Capasso, V. 1993. *Mathematical Structue Of Epidemic System*. Springer-Verlagh Berlin Heiddelberg. New York.

Chauhan S, Misra, & Dhar, J. 2014. *Stability Analysis Of SIR Model With Vaccination.* American Journal Of Computational And Applied Mathematics, 4(1): 17-23.

Djojodiharjo, H. 2000. *MetodeNumerik*. PT. GramediaUtama. Jakarta.

Finzio, N. & Ladas, G. 1998.*Ordinary Differential Equation with Modern Application.*Wadswort Publishing Company. California.

Hothcote, H.W. 2000. *The Mathematical of Incefteious Disease*. SIAM Review 42 Number 4, 599-653.

Neuhauser, C. 2008. *Calculus for Biology and Medicine*.Pearson Education. New Jersey.

Perko, L. 2001. *Differential Equations and Dynamical System.* 3^{rd} . Springer. New York.

Tarumingkeng, R. C. 1994. *Dinamika Poulasi Kajian Ekologi Kuantif*. Pustaka Sinar Harapan. Jakarta.