SOLUSI MODEL MATEMATIKA PADA MASALAH EKSTRAKSI URANIUM MELALUI *POLYMER INCLUSION MEMBRANE*

(Skripsi)

Oleh

BIRGITA TYAS SURYANDARI

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

ABSTRAK

SOLUSI MODEL MATEMATIKA PADA MASALAH EKSTRAKSI URANIUM MELALUI *POLYMER INCLUSION MEMBRANE*

Oleh

BIRGITA TYAS SURYANDARI

Polymer Inclusion Membrane (PIM) untuk ekstraksi uranium merupakan pemisahan uranium dari suatu larutan asam sulfat dengan menggunakan membran. Fenomena ekstraksi uranium dalam PIM dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan difusi Fick yang dilengkapi syarat awal dan syarat batas tertentu. Pada penelitian ini, model difusi diselesaikan secara analitik dan numerik pada dua syarat batas kanan yang berbeda, yaitu fungsi konstan dan fungsi yang bergantung pada variabel waktu. Berdasarkan hasil evaluasi disepanjang titik posisi x dan waktu t tertentu, diperoleh bahwa model difusi dengan syarat batas kanan konstan tidak merepresentasikan model secara fenomena. Dengan menggunakan syarat batas kanan bergantung waktu, model difusi dikaji mengenai dampak perubahan nilai parameter koefisien difusi dan konstanta ekstraksi terhadap hasil ekstraksi. Hasil menunjukkan bahwa semakin besar nilai koefisien difusi (D) maka semakin besar pula konsentrasi uranium yang tertranspor. Sebaliknya, semakin kecil nilai konstanta ekstraksi (K_{ex}) maka konsentrasi uranium yang tertranspor semakin besar.

Kata kunci: PIM, Model Difusi, Koefisien Difusi, Konstanta Ekstraksi

ABSTRACT

SOLUTION OF MATHEMATICAL MODEL OF URANIUM EXTRACTION PROBLEMS THROUGH THE POLYMER INCLUSION MEMBRANE

By

BIRGITA TYAS SURYANDARI

Polymer Inclusion Membrane (PIM) for uranium extraction is the separation of uranium from a solution of sulfuric acid using a membrane. The phenomenon of uranium extraction in PIM can be expressed in the form of the Fick diffusion equation that comes with initial conditions and certain boundary conditions. In this study, the diffusion model is solved analytically and numerically in two different right boundary conditions, a constant function and a function that depends on the time variable. Based on the evaluation results along a certain position x and time t, it was found that the diffusion model with the constant right boundary condition does not represent the phenomenon. By using the right time-dependent boundary conditions, the diffusion model is examined by regarding the effect of change in the value of the diffusion coefficient and the extraction constant parameters on the extraction results. The results show that the greater the diffusion coefficient (D), the greater the concentration of the transported uranium. Conversely, the smaller value of the extraction constant (K_{ex}), the greater the concentration of uranium transported.

Keywords: PIM, Diffusion Model, Diffusion Coefficient, Extraction Constant

SOLUSI MODEL MATEMATIKA PADA MASALAH EKSTRAKSI URANIUM MELALUI *POLYMER INCLUSION MEMBRANE*

Oleh:

BIRGITA TYAS SURYANDARI

Skripsi
Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

Judul Skripsi	: **SOLUSI MODEL MATEMATIKA PADA MASALAH EKSTRAKSI URANIUM MELALUI *POLYMER INCLUSION MEMBRANE***
Nama Mahasiswa	: *Birgita Tyas Suryandari*
Nomor Pokok Mahasiswa	: 1517031144
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Aang Nuryaman, S. Si., M. Si.	**Dr. Notiragayu, S. Si., M. Si.**
NIP. 19740316 200501 1 001	NIP. 19731109 200012 2 001

2. Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
FMIPA Universitas Lampung

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph. D.
NIP. 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Aang Nuryaman, S. Si., M. Si.** ....

Sekretaris : **Dr. Notiragayu, S. Si., M. Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Drs. Suratman, M. Sc.
NIP. 19640604 199003 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **1 November 2019**

PERNYATAAN

Nama	: Birgita Tyas Suryandari
Nomor Pokok Mahasiswa	: 1517031144
Program Studi	: Matematika
Jurusan	: Matematika

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi yang berjudul **Solusi Model Matematika pada Masalah Ekstraksi Uranium melalui *Polymer Inclusion Membrane*** ini tidak terdapat karya yang pernah dilakukan orang lain, dan sepengetahuan saya tidak ada karya atau pendapat yang ditulis atau diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini, sebagaimana disebutkan dalam daftar pustaka.

Apabila ada pernyataan saya yang tidak benar maka saya bersedia dikenai sanksi dengan hukum yang berlaku.

Bandar Lampung, 1 November 2019
Yang Menyatakan,

METERAI TEMPEL
56BDCAHF129630509
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Birgita Tyas Suryandari
NPM. 1517031144

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan pada tanggal 7 Juli 1996 di Sukoharjo, sebagai anak pertama dari dua bersaudara, dari Bapak Slamet dan Ibu Sarmini. Pendidikan formal yang ditempuh penulis adalah Sekolah Taman Kanak-kanak (TK) Dharma Wanita Bumi Dipasena Jaya diselesaikan tahun 2003, Sekolah Dasar (SD) diselesaikan di SD Negeri 01 Bumi Dipasena Jaya pada tahun 2009. Sekolah Menengah Pertama (SMP) diselesaikan di SMP Negeri 1 Rawajitu Timur pada tahun 2012, dan Sekolah Menengah Atas (SMA) di SMA Negeri 2 Pringsewu selesai pada tahun 2015. Pada tahun 2015, penulis terdaftar sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung melalui jalur SBMPTN. Semasa kuliah, penulis terdaftar dalam Organisasi Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA) FMIPA Unila sebagai Anggota Bidang Keilmuan periode 2016/2017.

Selama menjadi mahasiswa, beberapa kegiatan yang pernah dilakukan penulis antara lain:

1. Pada bulan Januari 2016 penulis melaksanakan Karya Wisata Ilmiah (KWI) di Desa Batutegi, Air Naningan, Kabupaten Tanggamus.

2. Pada Semester Ganjil Tahun Akademik 2018/2019 penulis pernah menjadi asisten praktikum mata kuliah Pengantar Analisis Numerik.
3. Pada Semester Genap Tahun Akademik 2018/2019 penulis pernah menjadi asisten praktikum mata kuliah Matematika Komputasi.
4. Pada Bulan Januari 2018, penulis melakukan Kerja Praktik di PT. Jiwasraya (Persero) di Kota Bandar Lampung.
5. Pada Bulan Juli 2018 penulis melakukan kegiatan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Sumber Hadi, Kecamatan Melinting, Kabupaten Lampung Timur.
6. Pada Bulan November 2018 penulis mengikuti Seminar Nasional Metode Kuantitatif II yang diselenggarakan oleh Jurusan Matematika FMIPA Unila sebagai Pemakalah.

MOTTO

"Segala perkara dapat kutanggung di dalam Dia yang memberi kekuatan kepadaku"

(Filipi 4:13)

"Bersikaplah kukuh seperti batu karang yang tidak putus-putusnya dipukul ombak. Ia tidak saja tetap berdiri kukuh, bahkan ia menenteramkan amarah ombak dan gelombang"

(Marcus Aurelius)

"Tuhan tidak pernah menjanjikan segala sesuatu itu mudah, tetapi percayalah bahwa Tuhan tidak akan membiarkan kamu berjalan sendirian dalam kesusahan"

(Birgita Tyas Suryandari)

PERSEMBAHAN

Segala Puji dan Syukur Kepada Tuhan Yang Maha Esa Kupersembahkan Skripsi ini kepada:

Kedua orang tuaku, bapak dan mamakku tersayang yang selalu memberikan do'a, kasih sayang dan nasihat di dalam setiap langkah.

Adik-adikku serta seluruh keluarga besarku yang selalu memberikan bantuan, dukungan, penyemangat, dan kebahagian dalam hidupku.

Dengan rasa hormat kepada Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si., Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si., dan Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D. serta seluruh Dosen Jurusan Matematika yang telah membimbing dan mendidikku selama menempuh pendidikan di kampus.

Sahabat dan teman-temanku yang telah memberikan warna dan kebahagiaan, serta menemani dan berjuang bersamaku.

Dan almamater tercinta, Universitas Lampung.

SANWACANA

Puji dan Syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa, atas berkat dan pertolongan-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **"Solusi Model Matematika pada Masalah Ekstraksi Uranium melalui *Polymer Inclusion Membrane*"**. Skripsi ini merupakan salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Pada saat pelaksanaan dan penyusunan skripsi penulis sangat berterima kasih kepada seluruh pihak yang membantu penulis menyelesaikan skripsi ini. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Kedua orangtua tercinta, Bapak Slamet dan Ibu Sarmini yang tidak pernah putus memberikan do'a, dukungan, kerja keras, serta menjadi penyemangat paling besar untuk dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Saudara-saudariku Lusia Trisna Sasami dan Feri Saputra, yang telah sudi berbagi suka dan duka. Turut memberikan dukungan, dan selalu menjadi tempat untuk pulang.
3. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S. Si., M. Si. selaku Dosen Pembimbing I dan selaku Kepala Laboratorium Matematika dan Statistika Terapan atas segala kebaikan, ilmu, motivasi, kritik, saran, kesabaran, bimbingan, serta izin

penggunaan laboratorium yang telah diberikan kepada penulis sehingga penulis bisa menyelesaikan penelitian dan skripsi ini dengan baik.

4. Ibu Dr. Notiragayu, S. Si., M. Si. selaku Pembimbing II yang telah membimbing penulis serta memberikan saran, kritik, motivasi, dan bantuan dalam pembuatan skripsi.
5. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D. selaku Dosen Pembahas dan selaku Ketua Jurusan Matematika Universitas Lampung atas masukan, kritik, semangat, serta bimbingan dalam penyelesaian skripsi ini.
6. Bapak Subian Saidi, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing Akademik yang telah membimbing penulis terkait permasalahan akademik selama masa perkuliahan ini.
7. Bapak Amanto, S. Si., M. Si. selaku Sekretaris Jurusan Matematika Universitas Lampung.
8. Bapak Dr. Agung Abadi Kiswandono, M.Si. selaku Dosen Jurusan Kimia yang memberikan ilmunya di bidang Kimia sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
9. Bapak dan Ibu Dosen serta seluruh staf yang ada di Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmu dan bantuan yang bermanfaat bagi penulis.
10. Bang Rahmad Riyanto, S.Si., Teguh Wijaya Hakim, S.Si., dan Kakak-Ka Tingkat 2014 di FMIPA yang telah membagikan ilmu serta pengalamannya dalam menyelesaikan skripsi
11. Sahabat-sahabatku sedari SMA: Agnes, Ana, Anding, Asih, Dhukha, dan Luluk yang selalu mendengarkan keluhan dan memberikan dukungan selama ini.

12. Teman berbagi terbaik Diana Ayundira, Pipin Agustina, dan Teman-teman seperjuangan angkatan 2015 khususnya kelas C terima kasih atas bantuan, semangat, dan berbagi suka duka selama menempuh pendidikan bersama.

Penulis menyadari bahwa penyusunan skripsi ini masih banyak kekurangan dan masih jauh dari kesempurnaan. Semoga Tuhan melimpahkan rahmat dan berkenan membalas semua budi baik yang diberikan kepada penulis, serta semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua, Amin.

Bandar Lampung, 1 November 2019
Penulis,

Birgita Tyas Suryandari

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Gambar **Halaman**

DAFTAR TABEL

Tabel **Halaman**

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Seiring berkembangnya teknologi, permasalahan di berbagai bidang ilmu juga semakin bertambah, mulai dari masalah yang sederhana hingga masalah yang rumit untuk diselesaikan. Masalah yang muncul sering tidak dilibatkan hanya pada satu bidang ilmu, sehingga diperlukan bidang ilmu lain untuk menyederhanakan permasalahan. Hal tersebut juga berlaku bagi masalah ekstraksi dan transpor senyawa dalam bidang kimia, yang membutuhkan persamaan matematika untuk menyederhanakan fenomena sistem ektrasksi. Matematika juga dibutuhkan untuk memberikan solusi sistem ekstraksi baik secara analitik maupun numerik.

Fenomena ekstraksi yang telah banyak menarik perhatian adalah ekstraksi berbasis membran cair. Hal ini disebabkan karena metode membran cair mempunyai spektrum pemisahan yang luas, selektif, dan mudah dilakukan. Dalam proses ekstraksi, senyawa yang diekstraksi merupakan larutan yang larut dalam air, stagnan atau mengalir di antara dua larutan cair yang berada di fasa sumber dan fasa penerima. Fasa sumber, fasa penerima, dan fasa membran pada banyak eksperimen merupakan larutan cair, khususnya pada fasa membran yang merupakan senyawa organik. Cairan organik ini biasanya berada di dalam pori-

pori kecil suatu membran polimer. Kelebihan metode ini adalah sangat efektif dan menarik dalam proses pemisahan dan pemurnian pada skala industri maupun laboratorium (Kiswandono, 2014).

Pada banyak eksperimen yang dilakukan, metode membran cair biasanya diterapkan untuk pemisahan logam, pemisahan limbah organik, sampai pemisahan limbah radioaktif dengan berbagai jenis senyawa organik. Dalam penelitian bidang matematika, masalah ekstraksi membran cair merujuk kepada pemodelan dan simulasi. Simulasi digunakan untuk mempelajari bagaimana perilaku suatu senyawa dalam suatu sistem. Model matematika untuk ekstraksi dalam beberapa dekade ini telah dikembangkan, salah satunya yaitu model matematika untuk ekstraksi uranium oleh Kolev *et al*. (2013).

Kolev *et al*.(2013) telah memodelkan ekstraksi uranium dari larutan asam sulfat yang menggunakan teknologi *Polymer Inclusion Membrane*. Model tersebut dideskripsikan ke dalam persaman difusi Fick dengan syarat batas yang bergantung pada fungsi waktu, yang membuat model tersebut menjadi rumit dan tidak dapat diselesaikan secara analitik, sehingga harus diselesaikan secara numerik (implisit). Kemudian dari hasil pendekatan tersebut dilakukan pengepasan kurva dengan data eksperimen untuk mengkonfirmasi model dan untuk mendapatkan koefisien difusi (D) serta konstanta ekstraksi (K_{ex}).

Pada penelitian ini, model difusi dibentuk menjadi dua model dengan syarat batas berbeda, yaitu fungsi konstan dan fungsi yang bergantung pada variabel waktu. Model difusi akan dikaji pada beberapa variasi waktu serta beberapa perubahan parameter misalnya koefisien difusi dan konstanta ekstraksi. Dengan demikian, kedua model tersebut dapat dianalisis melalui simulasi numerik (eksplisit) dan analitik. Sehingga akan lebih mudah untuk mengetahui bagaimana perilaku konsentrasi uranium sejak di dalam larutan asam sulfat hingga kemudian terekstraksi di saat melalui membran.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Menentukan solusi analitik dan solusi hampiran persamaan difusi Fick dengan syarat batas konstan dan fungsi bergantung waktu.
2. Menganalisis solusi persamaan difusi dengan melihat pengaruh dari parameter, yaitu koefisien difusi dan konstanta ekstraksi terhadap jumlah konsentrasi yang diperoleh.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini adalah :

1. Mengetahui solusi analitik dan hampiran penyelesaian persamaan difusi Fick.
2. Mengetahui dinamika konsentrasi uranium melalui pengaruh koefisien difusi dan konstanta ekstraksi.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 *Polymer Inclusion Membrane* (PIM)

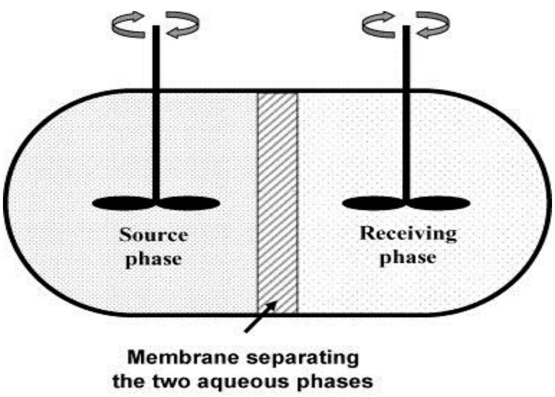
Polymer Inclusion Membrane atau PIM adalah teknologi membran ekstraksi terbaru yang mampu untuk memisahkan ion-ion dan molekul organik kecil secara aman dan efektif. PIM terbentuk atas senyawa pembawa, *plasticizer* dan polimer pendukung dalam suatu larutan, kemudian mencetaknya dalam satu cetakan hingga terbentuk film yang tipis, stabil dan fleksibel. Hasilnya berupa membran yang dapat digunakan untuk memisahkan larutan yang diinginkan. Membran ini disebut dengan membran polimer terinklusi (Dzygiel dan Wieczorek, 2010).

Membran Polimer Terinklusi/*Polymer Inclusion Membrane* terbentuk dari tiga komponen yang terdapat perannya masing-masing seperti polimer pendukung (misalnya *polyvinyl chloride*-PVC) yang diharapkan dapat mengatasi kebocoran senyawa pembawa. Senyawa pembawa merupakan salah satu komponen dalam membran sehingga proses pemisahan dapat berjalan. Fungsi senyawa pembawa adalah memfasilitasi senyawa target melalui membran. Senyawa pembawa bereaksi dengan komponen yang ditargetkan pada fasa sumber, bergerak melintasi membran, dan melepaskan komponen ini di fasa penerima, sedangkan *plasticizer* berfungsi membuat sistem membran menjadi lebih stabil (Kiswandono, 2014).

Selain itu, Ferraz *et al.* (2007) membagi sistem ekstraksi menjadi beberapa tahap :

1. Penyerapan pada permukaan fasa sumber.
2. Terjadinya reaksi kompleks dengan senyawa pembawa.
3. Difusi antara senyawa target atau kompleks senyawa target dengan pembawa melewati membran cair.
4. Penguraian senyawa target dan senyawa pembawa pada permukaan fasa penerima.
5. Pelepasan senyawa target.

Proses di atas dapat disingkat menjadi tiga tahap, yaitu difusi antara senyawa target dengan senyawa pembawa pada membran, pembentukan kompleks senyawa atau interaksi senyawa target dengan senyawa pembawa dan pelepasan senyawa target ke fasa penerima.



Gambar 1. Sistem Ekstraksi dengan Membran PIM (Nghiem *et al.*, 2006)

2.2 Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial adalah suatu persamaan yang melibatkan turunan parsial suatu fungsi dua atau lebih peubah bebas. Tingkat (*orde*) persamaan diferensial parsial adalah tingkat tertinggi suku derivatif. Persamaan diferensial parsial merupakan fungsi linier apabila variabel tak bebas beserta turunannya berderajat satu dan koefisien persamaan tersebut hanya bergantung pada variabel bebas atau konstanta (Kreyszig, 2006).

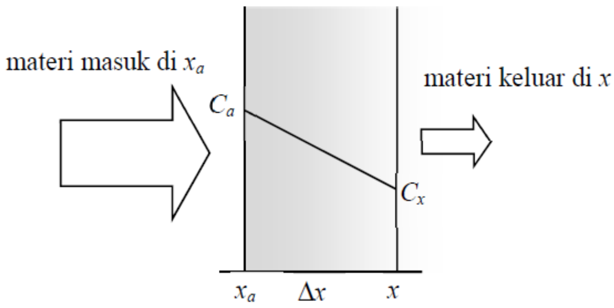
2.3 Persamaan Difusi Fick

Pada tahun 1855, Adolph Fick menemukan persamaan difusi dari konduksi panas yang dikembangkan oleh Fourier pada tahun 1822 untuk diterapkan ke dalam perpindahan massa. Adolph Fick menghasilkan Hukum Fick yang menyatakan bahwa pada arah tertentu, massa dari suatu bahan terlarut yang melewati suatu luasan tertentu tiap unit waktu adalah sebanding dengan gradien konsentrasi bahan terlarut pada arah tersebut.

Hukum Fick di bagi atas dua kondisi, yaitu kondisi mantap dan kondisi *transient*.

1). Kondisi Mantap

Suatu peristiwa difusi dalam keadaan mantap terjadi pada satu lapis membran. Massa bahan terlarut yang terdifusi menyebar mengikuti gradien konsentrasi atau dari konsentrasi yang tinggi ke arah konsentrasi yang lebih rendah, seperti diperlihatkan oleh Gambar 2. Konsentrasi bahan terlarut yang terdifusi bervariasi secara linier sebesar C_0 di x_0 menjadi C_x di x. Secara termodinamika, faktor pendorong untuk terjadinya difusi, yaitu adanya perbedaan konsentrasi.



Gambar 2. Difusi pada Kondisi Mantap

Pada proses difusi, fluks/laju alir massa bahan terlarut dapat kita tuliskan sebagai

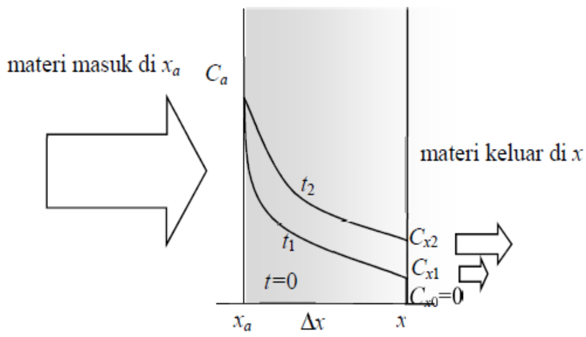
$$J_x = -D\frac{dC}{dx} \quad (2.1)$$

J_x adalah fluks yang merepresentasikan perbandingan jumlah zat mol atau massa bahan terlarut dengan luas permukaan yang dilalui zat untuk setiap detiknya, sehingga dinyatakan dalam satuan seperti mol m^{-2} s^{-1}. J_x mengukur jumlah zat atau massa bahan terlarut yang akan mengalir melalui setiap unit area selama interval waktu unit. D adalah koefisien difusi yang dimensinya area per unit waktu sehingga unit tipikal untuk mengekspresikannya adalah m^2 s^{-1}.

Selain itu, C (untuk campuran ideal) adalah konsentrasi yang dimensinya adalah jumlah zat atau massa bahan terlarut per satuan volume ini dapat dinyatakan mol/L atau lainnya seperti mg/L. x adalah posisi yang dinyatakan dalam m. dC/dx adalah variasi konsentrasi dalam keadaan mantap di mana C_0 dan C_x bernilai konstan. Persamaan (2.1) ini disebut Hukum Fick Pertama yang secara formal menyatakan bahwa fluks bahan terlarut yang berdifusi sebanding dengan gradien konsentrasi.

2). Kondisi *Transient*

Peristiwa yang lebih umum terjadi adalah peristiwa *transient*, yaitu konsentrasi dipengaruhi oleh perubahan waktu. C_x adalah fungsi waktu yang berarti bahwa fluks bahan terlarut juga merupakan fungsi waktu. Keadaan *transient* ini digambarkan pada Gambar 3. Pada t = 0 konsentrasi di x adalah C_{x0} = 0; pada t = t_1 difusi telah terjadi dan konsentrasi di x meningkat menjadi C_{x1}; pada t = t_2 konsentrasi di x meningkat lagi menjadi C_{x2}, dan seterusnya.



Gambar 3. Difusi pada Kondisi *Transient*

Perubahan konsentrasi adalah selisih antara fluks yang masuk di x_a dan fluks yang keluar di x, $J_{xa} - J_x$. Selisih yang terjadi setiap saat ini merupakan laju perubahan konsentrasi, C_x. Sementara itu, fluks yang keluar di x adalah $J_x = J_{xa} + \frac{\partial J}{\partial x}\Delta x$. Oleh karna itu

$$\frac{dC_x}{dt} = \frac{\partial J}{\partial x}\Delta x = \frac{d}{dx}\left[-D\,\frac{dC_x}{dx}\right] \qquad (2.2)$$

Persamaan (2.2) ini disebut Hukum Fick Kedua. Jika D tidak tergantung pada konsentrasi maka Persamaan (2.2) dapat ditulis

$$\frac{dC_x}{dt} = D\,\frac{d^2C_x}{dx^2} \qquad (2.3)$$

Hukum Fick Kedua menyatakan bahwa laju perubahan komposisi sebanding dengan turunan kedua konsentrasi (Sudirham, 2012).

2.4 Masalah Nilai Awal dan Syarat Batas

Masalah nilai awal dan syarat batas adalah materi yang menyertai suatu persamaan diferensial parsial. Apabila persamaan diferensial diselesaikan, maka akan diperoleh suatu penyelesaian umum. Namun, untuk memperoleh penyelesaian khusus diperlukan adanya nilai awal dan syarat batas (Astuti, 2016).

Menurut Strauss (2008), menjelaskan yang dimaksud dengan nilai awal adalah kondisi yang harus dipenuhi pada awal waktu tertentu (t_0). Sebagai contoh untuk persamaan difusi nilai awal adalah:

$$\varphi(\mathbf{x}, t_0) = \psi(\mathbf{x}) \tag{2.4}$$

dimana $\psi(\mathbf{x}) = \psi(x, y, z)$ adalah fungsi yang ditentukan. Pada penyebaran substansi, $\psi(\mathbf{x})$ adalah konsentrasi awal.

Terdapat tiga bentuk syarat batas yang penting, yaitu :

a). Syarat Dirichlet, jika φ telah ditentukan.

b). Syarat Neumann, jika turunan normalnya $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ ditentukan.

c). Syarat Robin, jika $\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \alpha_0\varphi$ telah ditentukan, dengan α_0 adalah sebuah fungsi yang bergantung pada variabel yang sama dengan φ.

Pada masalah satu dimensi dimana domain pada interval $0 \le x \le L$, batas hanya terdiri dari dua titik ujung dalam bentuk sederhana :

a). Syarat Dirichlet, $\varphi(0, t) = f(t)$ dan $\varphi(L, t) = g(t)$.

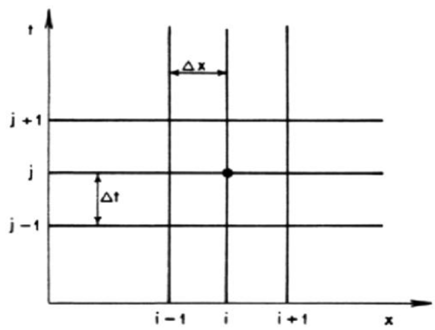
b). Syarat Neumann, $\frac{\partial}{\partial x}\varphi(0,t) = h(t)$ dan $\frac{\partial}{\partial x}\varphi(L,t) = i(t)$.

c). Syarat Robin, $\frac{\partial}{\partial x}\varphi(0,t) + \alpha_0\varphi(0,t) = j(t)$ dan

$\frac{\partial}{\partial x}\varphi(L,t) + \alpha_0\varphi(L,t) = k(t)$.

2.5 Metode Beda Hingga

Metode beda hingga adalah suatu metode numerik yang dapat digunakan untuk memecahkan persamaan diferensial secara diskrit, terutama persamaan diferensial parsial yang tidak dapat diselesaikan secara analitik. Konsep dasar metode ini adalah membentuk petak-petak ruang dan waktu (*grid).* Petak-petak ini digunakan sebagai acuan untuk menemukan solusi pada koordinat tempat dan waktu tertentu yang terwakilkan sebagai titik pada petak-petak tersebut.



Gambar 4. Bidang Petak (*grid*) Beda Hingga

Metode beda hingga mengaplikasikan penggunaan deret Taylor. Deret Taylor adalah hampiran dari sebuah fungsi yang merupakan penjumlahan dari turunan-turunan fungsinya.

Notasi umum dari deret Taylor memiliki bentuk sebagai berikut.

$$f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + \Delta x\, f'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x_i) + \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x_i) + \cdots + \frac{\Delta x^n}{n!} f^{(n)}(x_i) \qquad (2.5)$$

atau

$$f(x_i - \Delta x) = f(x_i) - \Delta x\, f'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x_i) - \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x_i) + \cdots + \frac{\Delta x^n}{n!} f^{(n)}(x_i) \qquad (2.6)$$

dengan f adalah fungsi dari variabel bebas x, tanda $'$ menunjukkan turunan terhadap x, dan x_i adalah partisi x sebesar Δx untuk $i = 0,1,2, \ldots. N$.

Terdapat tiga pendekatan dalam metode beda hingga, yaitu beda maju (*forward difference)*, beda mundur (*backward difference)*, dan beda pusat (*central difference).* Ketiga pendekatan ini didapatkan dengan menurunkan deret Taylor pada orde pertama.

1. Beda Maju

Pendekatan jenis ini didasari oleh penurunan order pertama dan pemangkasan pada orde kedua, $O(\Delta x^2)$, dari Persamaan (2.5) yang merupakan deret Taylor bentuk penjumlahan seperti berikut.

$$f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + \Delta x\, f'(x_i) + O(\Delta x^2) \qquad (2.7)$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} - O(\Delta x) \qquad (2.8)$$

dengan mengabaikan bentuk $O(\Delta x)$ sebagai bentuk galat pemotongan, pendekatan beda maju orde pertama diperoleh:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} \tag{2.9}$$

2. Beda Mundur

Pendekatan jenis ini didasari oleh penurunan order pertama dan pemangkasan pada orde kedua, $O(\Delta x^2)$, dari Persamaan (2.6) yang merupakan deret Taylor bentuk pengurangan seperti berikut.

$$f(x_i - \Delta x) = f(x_i) - \Delta x\, f'(x_i) + O(\Delta x)^2 \tag{2.10}$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_i - \Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \tag{2.11}$$

dengan mengabaikan bentuk $O(\Delta x)$ sebagai bentuk galat pemotongan, pendekatan beda mundur orde pertama diperoleh:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_i - \Delta x)}{\Delta x} \tag{2.12}$$

3. Beda Pusat

Pendekatan beda pusat, dilakukan dengan melakukan operasi pengurangan pada formula beda maju dan beda mundur seperti berikut.

$$f(x_i + \Delta x) - f(x_i - \Delta x) = 2\Delta x\, f'(x_i) \tag{2.13}$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i - \Delta x)}{2\Delta x} \tag{2.14}$$

Sedangkan pada penurunan deret Taylor orde dua, akan terbentuk satu pendekatan metode beda hingga, yaitu beda pusat (*central difference*), yang didapat melalui proses penggabungan formula orde kedua dari persamaan (2.5) dan (2.6) melalui operasi penjumlahan:

$$f(x_i + \Delta x) + f(x_i - \Delta x) = 2f(x_i) + f''(x_i)\,\Delta x^2 \tag{2.15}$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i + \Delta x) - 2f(x_i) + f(x_i - \Delta x)}{\Delta x^2} \tag{2.16}$$

Ketiga metode beda hingga tersebut dapat digunakan sebagai cara untuk menyelesaikan masalah persamaan diferensial parsial. Misalkan terdapat fungsi $f(x,t)$ dimana x dan t adalah variabel bebas. Maka, dapat dibuat bidang petak (*grid*) $x - t$ seperti Gambar 4, dimana i adalah indeks dari x dan j adalah indeks dari t (Chaudhry, 2008).

Ada dua pendekatan metode beda hingga untuk turunan parsial yaitu metode beda hingga eksplisit dan metode beda hingga implisit. Metode beda hingga bersifat eksplisit, artinya keadaan suatu sistem atau solusi variabel pada suatu saat dapat digunakan untuk menentukan keadaan sistem pada waktu berikutnya sedangkan metode implisit penentuan solusi sistem harus dengan memecahkan sistem pada kedua keadaan, yaitu sekarang dan yang akan datang (Gustiawan, 2016).

2.6 Metode Beda Hingga Eksplisit

Metode beda hingga *Forward Time Center Space* (FTCS) disebut juga metode eksplisit dimana solusi di waktu sekarang diketahui dan digunakan untuk menentukan solusi di waktu yang akan datang. Selang jarak $[0,\delta]$ dipartisi sebesar dx dengan titik-titik partisi $x_i = i\,dx$ untuk $i = 0,1,\dots,Nx$ dan selang waktu $[0,T]$ dipartisi sebesar dt dengan titik-titik partisi $t_j = j\,dt$ untuk

$j = 0,1, \dots, Nt$. Sehingga solusi persamaan difusi dinyatakan dalam posisi x dan saat t yaitu $U(x_i, t_j)= U(i, j)$.

Menurut Durmin (2013) metode FTCS menerapkan beda maju untuk turunan orde pertama terhadap t di titik (x_i, t_j) sehingga diperoleh

$$U_t(x_i, t_j) = \frac{U(i,j+1) - U(i,j)}{dt} \tag{2.17}$$

dan menerapkan beda pusat untuk turunan orde kedua terhadap x di titik (x_i, t_j)

$$U_{xx}(x_i, t_j) = \frac{U(i+1,j) - 2U(i,j) + U(i-1,j)}{(dx)^2} \tag{2.18}$$

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun akademik 2019/2020 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan secara studi pustaka yaitu mempelajari jurnal-jurnal *membrane science* yang menunjang proses penelitian. Pada penelitian ini juga dilakukan simulasi numerik menggunakan *software* Matlab.

Adapun langkah-langkah yang akan dilakukan penulis dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Mengidentifikasi model ekstraksi Uranium-D2EHPA (UL_2) yang berupa persamaan difusi Fick serta syarat batasnya.
2. Menentukan persamaan hasil diskritisasi untuk persamaan difusi yang diperoleh dengan menggunakan metode beda hingga *Forward Time Center Space* (FTCS).

3. Menyelesaikan Persamaan difusi secara analitik dalam dua kondisi yaitu, kondisi mantap (*steady state*) dan *transient.*
4. Menentukan simulasi dari solusi hampiran persamaan difusi dengan algoritma sebagai berikut :

   a. Menentukan banyaknya partisi beda hingga, N_x dan N_t. Lalu menghitung jarak antar partisi untuk spasial dan waktu, dx dan dt.

   b. Menghitung nilai konstanta D, K_{ex}, $C_{U(s)}^0$, V_m , V_s , C_H , C_L^0 secara berturut-turut adalah koefisien difusi, konstanta ekstraksi, konsentrasi awal uranium, volume membran, volume larutan, konsentrasi asam sulfat, dan konsentrasi awal senyawa pembawa.

   c. Menghitung nilai batas kiri $C_{UL_2}(0\ ,j+1)$ dan syarat awal $C_{UL_2}(i\ ,0)$.

   d. Menghitung nilai $C_{UL_2}(i,j+1)$ dari Persamaan Terdiskretisasi.

   e. Menghitung nilai batas kanan $C_{UL_2}(Nx+1\ ,j+1)$.

   f. Menghitung Konsentrasi Uranium C_U .

5. Menarik kesimpulan.

V. KESIMPULAN

Penyelesaian masalah difusi secara analitik dan numerik dikaji pada dua sayarat batas kanan yang berbeda, yaitu fungsi konstan dan fungsi yang bergantung pada variabel waktu sehingga terdapat dua model yang akan diselesaikan. Model difusi dengan syarat batas kanan konstan dapat diperoleh solusi analitiknya sebagai berikut.

$$C_{UL_2}(x,t) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-2{,}2211 \times 10^5\ )}{(2n-1)\pi} (-1)^{n+1} \times \cos\left(\frac{2n-1}{2\ (50 \times 10^{-6})} \pi x \right) \right.$$

$$\left. \times\ e^{-\left(\frac{2n-1}{2\ (50\times10^{-6})}\pi\right)^2 6.46\times10^{-14}\ t} \right) + 2{,}22110 \times 10^5$$

Kedua model difusi diselesaikan secara numerik pada ketebalan membran $0 < x < 50 \times 10^{-6}$ dan waktu pengamatan $0 < t < 1500$ menit sehingga diperoleh persamaan terdiskritisasi sebagai berikut.

$$C_{UL_2}(i,j+1) = S\left\{C_{UL_2}(i+1,j) + C_{UL_2}(i-1,j)\right\} + (1-2S)C_{UL_2}(i,j)$$

dengan syarat awal kedua model adalah $C_{UL_2}(i\ ,1) = 0$, syarat batas kiri kedua model adalah $C_{UL_2}(1,j+1) = 2SC_{UL_2}(2,j) + (1-2S)C_{UL_2}(1,j)$, serta syarat batas kanan masing-masing model adalah $C_{UL_2}(Nx+1,j+1) = \ C_L^0 + \frac{1-\sqrt{1+8K'_{ex}C_L^0C_U^0}}{2K'_{ex}C_U^0}$ dan $C_{UL_2}(Nx+1,j+1) = C_L^0 + \frac{1-\sqrt{1+8K'_{ex}C_L^0C_U\ (j+1)}}{2K'_{ex}C_U\ (j+1)}$.

Berdasarkan hasil evaluasi kedua model difusi disepanjang titik posisi x dan waktu t tertentu, diperoleh bahwa model difusi dengan syarat batas kanan konstan tidak merepresentasikan model secara fenomena sehingga syarat batas kanan bergantung waktu lebih tepat untuk digunakan. Kajian model juga dilakukan untuk mengetahui dampak perubahan nilai koefisien difusi dan konstanta ekstraksi terhadap hasil ekstraksi. Model difusi dengan syarat batas kanan bergantung waktu dikaji untuk koefisien difusi: 1,6150 $\times 10^{-14}$, 6,4600 $\times 10^{-14}$, dan $1{,}4535 \times 10^{-13}$ serta diperoleh hasil bahwa semakin besar nilai koefisien difusi maka semakin besar pula konsentrasi uranium yang tertranspor.

Sebaliknya, saat model dikaji untuk nilai konstanta ekstraksi sebesar $1{,}7755 \times 10^{-6}$, $4{,}4388 \times 10^{-7}$, dan 1,1097 $\times 10^{-7}$ diperoleh bahwa semakin kecil nilai konstanta ekstraksi maka konsentrasi uranium yang tertranspor semakin besar.

DAFTAR PUSTAKA

Astuti, R.W. 2016. Tinjauan Persamaan Laplace Dimensi Dua Dengan Syarat Batas Dirichlet dan Robin. Skripsi. Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta, Yogyakarta.

Chaudhry, M.H. 2008. *Open-Channel Flow*. Edisi ke-2. Springer, New York.

Durmin. 2013. Studi Perbandingan Perpindahan Panas Menggunakan Metode Beda Hingga dan Crank-Nicholson. Tugas Akhir. Jurusan Matematika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh November, Surabaya.

Dzygiel, P. & Wieczorek, P.P. 2010. Supported Liquid Membranes and Their Modifications: Definition, Classification, Theory, Stability, Application and Perspectives. In Kislik, V.S. (Ed.). *Liquid Membranes: Principles and Applications in Chemical Separations and Wastewater Treatment* (pp.72-140). Elsevier, Amsterdam.

Ferraz, H.C., Duarte, L.T., Alves, M.D., Habert, A.C., & Borges, C.P. 2007. Recent Achievements in Facilitated Transport Membrane For Separation Processes. *Brazilian Journal Chemical Eng*ineering. **24**(1):101-118.

Gustiawan, A. 2016. Pemodelan Matematika Laju *Water Flow Filtering Furification* dengan Metode Beda Hingga. Skripsi. Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung, Bandar Lampung.

Kiswandono, A.A. 2014. Kajian Transpor Fenol Melalui Membran Berbasis Polieugenol Tertaut Silang Menggunakan Metode Polymer Inclusion Membrane (PIM). *Disertasi Program Studi S3 Ilmu Kimia*. Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.

Kolev, S.D., John, A.M.S., & Cattral, R.W. 2013. Mathematical Modeling of the Extraction of Uranium(VI) into A Polymer Inclusion Membrane Conposed of PVC and Di-(2-Ethylhexyl) Phosphoric Acid. *Journal of membrane science*. **425-426**: 169-175.

Kreyszig, E. 2006. *Advanced Engineering Mathematics*. Edisi ke-10 . John Wiley and Sons, New York.

Nghiem, L.D., Mornane, P., Potter, I.D., Perera, J.M., Cattrall, R.W., & Kolev, S.D. 2006. Extraction and Transpor of Metal Ions and Small Organic Compounds Using Polymer Inclusion Membranes (PIMs): Review. *Journal of membrane science*. **281**: 7 – 41.

Strauss, W.A. 2008. *Partial Differential Equations: An Introduction.* Wiley, Hoboken.

Sudirham, S. & Sudaryatno, N.U. 2012. *Mengenal Sifat Material.* Darpublic, Bandung.