PEMODELAN MATEMATIKA DAN ANALISIS KESTABILAN PADA PENYEBARAN PENYAKIT TYPHUS DENGAN KONTROL ANTIBIOTIK

(Skripsi)

Oleh

Dwi Wahyu Lestari

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

ABSTRAK

PEMODELAN MATEMATIKA DAN ANALISIS KESTABILAN PADA PENYEBARAN PENYAKIT TYPHUS DENGAN KONTROL ANTIBIOTIK

Oleh

Dwi Wahyu Lestari

Penelitian ini membahas analisis model matematika penyebaran penyakit typhus dengan pengaruh antibiotik. Pada penelitian ini digunakan model sistem persamaan diferensial dengan peubah *Suspectible Infected Recovered* (SIR) yang digunakan untuk menggambarkan karakteristik model penyakit typhus dan menjabarkan model matematika untuk penyebaran penyakit typhus SIR dengan memperhatikan adanya antibiotik, dengan menggunakan asumsi-asumsi yang ditentukan. Titik kesetimbangan pada model penyebaran penyakit typhus dengan kontrol antibiotik juga ditentukan. Lalu dilakukan analisis kestabilan titik kesetimbangan dan simulasi numerik dengan metode Runge-Kutta untuk dapat dilihat perilaku sistem penyebaran penyakit typhus dan hasil simulasi dapat diintrepretasi.

Kata Kunci : Sistem Persamaan Diferensial, Typhus, Model SIR.

ABSTRACT

MATHEMATICAL MODELING AND STABILITY ANALYSIS IN THE DISTRIBUTION OF TYPHUS DISEASE WITH ANTIBIOTIC CONTROL

By

Dwi Wahyu Lestari

This study discusses the analysis of mathematical models the spread of typhus with the influence of antibiotics. In this study, a differential equation system model with the Suspectible Infected Recovered (SIR) model was used to describe the characteristics of typhus disease models and describe the mathematical model for the spread of SIR typhus by paying attention to antibiotics, using prescribed assumptions. The equilibrium point on the model of the spread of typhus with antibiotic control is also determined. Then an analysis of the stability of equilibrium points and numerical simulations using the Runge-Kutta method can be seen in the system behavior of the spread of typhus and simulation results can be interpreted.

Key words: Differential Equation System, Typhus, SIR Model.

PEMODELAN MATEMATIKA DAN ANALISIS KESTABILAN PADA PENYEBARAN PENYAKIT TYPHUS DENGAN KONTROL ANTIBIOTIK

Oleh

Dwi Wahyu Lestari

Skripsi

Sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2019

Judul Skripsi : **PEMODELAN MATEMATIKA DAN ANALISIS KESTABILAN PADA PENYEBARAN PENYAKIT TYPHUS DENGAN KONTROL ANTIBIOTIK**

Nama Mahasiswa : *Dwi Wahyu Lestari*

No. Pokok Mahasiswa : 1517031108

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.	**Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.**
NIP 19700831 199903 1 002	NIP 19720227 199802 1 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Amanto, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Drs. Suratman, M.Sc.
NIP 19640604 199003 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **12 Maret 2019**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertandatangan dibawah ini:

Nama	: **Dwi Wahyu Lestari**
Nomor Induk Mahasiswa	: **1517031108**
Judul	: **PEMODELAN MATEMATIKA DAN ANALISIS KESTABILAN PADA PENYEBARAN PENYAKIT TYPHUS DENGAN KONTROL ANTIBIOTIK**
Jurusan	: **Matematika**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan semua tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah karya penulisan ilmiah Universitas Lampung.

Bandar Lampung,12 Maret 2019

Yang menyatakan

METERAI TEMPEL

0FA7FAFF801277733

6000

ENAM RIBU RUPIAH

Dwi Wahyu Lestari

NPM.1517031108

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di desa Pasir Sakti, pada tanggal 4 Juni 1997, sebagai anak kedua dari tiga bersaudara, putri dari bapak Sarno dan Ibu Siti Muntamah. Jenjang pendidikan diawali dari TK Baiturrohman diselesaikan pada tahun 2003, kemudian penulis melanjutkan pendidikan sekolah dasar di SD Negeri 1 Pasir Sakti diselesaikan pada tahun 2009. Pada tahun 2009 penulis melanjutkan pendidikan di SMP Negeri 1 Pasir Sakti dan selesai pada tahun 2012 kemudian melanjutkan sekolah di MAN 1 Lampung Timur dan selesai pada tahun 2015. Tahun 2015, penulis terdaftar sebagai Mahasiswa Jurusan Matematika FMIPA Unila melalui jalur SBMPTN (Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri).

Pada tahun 2018 penulis melakukan Kuliah Kerja nyata bulan Januari hingga Februari di desa Sribhawono, kecamatan Sribahwono, Lampung Timur. Kemudian pada semester selanjutnya penulis melakukan Praktek Kerja Lapangan (PKL) di BULOG teluk betung, Bandar Lampung dimulai bulan Juli sampai Agustus.

Selama menjadi mahasiswa, penulis aktif di organisasi Badan Eksekutif Mahasiswa (BEM) FMIPA Unila sebagai anggota pada tahun 2015/2016 dan semester selanjutnya penulis tetap aktif BEM sebagai staf bendahara pada tahun 2016/2017.

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirobil'alamin dengan segala syukur rahmat dan hidayah serta karunia Allah SWT dapat memberikanku kesempatan untuk menuntut ilmu di Universitas Lampung.

Sebuah pengorbanan waktu, tenaga, fikiran yang harus diluangkan demi menyelesaikan karya kecil ini sebagai syarat kelulusan. Kupersembahkan karya kecil ini teruntuk :

Dua nama yang sangat berjasa yaitu Bapak (Sarno) dan Mamak (Siti Muntamah) yang selalu memberikan doa, semangat, nasihat, dukungan moril maupun materil, kasih sayang serta pengorbanan yang tak tergantikan hingga aku selalu kuat menjalani setiap rintangan yang ada di depanku. Bukti kecil ini sebagai bukti keseriusanku untuk membalas semua pengorbanan kalian yang iklas tanpa kenal lelah berjuang separuh nyawa hingga segalanya demi hidupku.

Terlalu berat untuk hidup di dunia ini tanpa bantuan Allah SWT dan orang lain. Untuk itu kupersembahkan untaian terima kasih kepada saudara sekandungku yaitu Mamas (Dadang Fidiyanto S.Pd) dan adikku (Nazhwa Maulida Hapsari) yang selalu memberi dukungan dan berbagi pengalaman sebagai pembelajaran terbaik untukku.

KATA INSPIRASI

“Maka sesungggguhnya bersama kesulitan itu pasti ada kemudahan”
(Qs. Al Insyirah:5)

“ Pendidikan merupakan perlengkapan paling baik untuk hari tua”
(Aristoteles)

“Hasil tidak akan menghianati proses”

SANWACANA

Puji dan syukur kehadirat Allah SWT yang telah memberikan nikmat, karunia, serta hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan judul "PEMODELAN MATEMATIKA DAN ANALISIS KESTABILAN PADA PENYEBARAN PENYAKIT TYPHUS DENGAN KONTROL ANTIBIOTIK." Disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) di Universitas Lampung. Terselesaikannya skripsi ini tidak terlepas dari bantuan, dukungan dan kerjasama berbagai pihak. Untuk itu penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Agus Sutrisno S.Si., M.Si., selaku pembimbing I yang telah meluangkan waktu, memberikan arahan, bimbingan, ide, kritik dan saran kepada penulis selama proses pembuatan skripsi ini.
2. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si., selaku pembimbing II yang telah memberikan arahan dan dukungan kepada penulis.
3. Bapak Amanto, S.Si., M.Si., selaku penguji yang telah memberikan kritik dan saran sehingga terselesaikannya skripsi ini.
4. Bapak La Zakaria selaku Pembimbing Akademik yang telah membimbing penulis untuk menyelesaikan permasalahan seputar akademik.
5. Ibu Prof. Dra. Wamilialana, M.A, Ph.D., selaku ketua jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.

6. Bapak Drs. Suratman Umar, M.Sc., selaku dekan fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Seluruh dosen, staf dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.
8. Bapak dan Mamak tersayang yang selalu memotivasi, menasihati, memberikan semangat, dan mendoakan yang terbaik.
9. Sahabat penulis Riska, Dina, Siti, Wulan dan Tya yang selalu mengiringi, mendukung dan memberi warna selama dimasa kuliah penulis.
10. Teman-teman penulis Etis, Delia dan Neily yang menemani disaat suka duka penulis.
11. Teman-teman matematika angkatan 2015 yang menjadi bagian perjalanan selama masa kuliah.
12. Semua pihak yang terlibat dalam penyelesaian skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kata sempurna, sehingga kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan. Akan tetapi besar harapan penulis semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Sekian dan terima kasih.

Bandar Lampung,12 Maret 2019
Penulis

Dwi Wahyu Lestari

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Di Indonesia banyak penyakit yang sangat mudah menular karena gaya hidup yang tidak sehat. Salah satunya penyakit yang sangat mudah menular yaitu typhus yang disebabkan oleh infeksi bakteri *Salmonella typhi*. Bakteri penyebab penyakit ini menyebar melalui makanan atau minuman yang terkontaminasi oleh bakteri. Anak kecil mungkin lebih rentan terkena penyakit karena daya tahan tubuhnya belum sekuat orang dewasa atau karena anak-anak kurang bisa menjaga kebersihannya saat makan. Selain dari makanan atau minuman yang terkontaminasi bakteri, penyakit ini juga bisa disebabkan melalui kontak langsung dengan orang yang terinfeksi. Jadi, setiap manusia bisa terinfeksi bakteri penyebab typhus saat mengonsumsi makanan yang diolah secara tidak higienis oleh orang yang sedang terinfeksi bakteri typhus.

Saat bakteri typhus masuk ke dalam tubuh, terjadi masa inkubasi bakteri yang biasanya berlangsung 7-14 hari yang kemudian diikuti dengan munculnya gejala pertama. Pada minggu pertama gejala klinis penyakit ini ditemukan keluhan dan gejala serupa dengan penyakit infeksi akut pada umumnya yaitu demam, nyeri kepala, pusing, nyeri otot, anoreksia, mual, muntah, diare, dan batuk (Widodo Joko, 2006).

Pada minggu kedua gejala yang dialami yaitu demam tinggi terus berlanjut hingga memburuk, sering mengigau karena demam yang terjadi, sakit perut, diare atau bahkan sembelit, perut kembung karena pembengkakan hati dan empedu, tinja berwarna kehijauan. Pada minggu ketiga Suhu tubuh yang tinggi akan menurun, namun sebagai gantinya akan muncul komplikasi seperti pendarahan atau pecahnya usus. Hingga minggu keempat jika tidak segera diambil tindakan pengobatan diminggu keempat ini, suhu tubuh memang akan menurun dengan perlahan. Namun, komplikasi lain yang bahkan membahayakan nyawa bisa muncul.

Perkembangan ilmu pengetahuan dibidang matematika mempunyai peranan yang sangat penting untuk menggambarkan fenomena penyebaran penyakit typhus ini. Peranan tersebut dituangkan dalam bentuk pemodelan matematika. Model *Suspectible Infected Recovered* (SIR) dapat digunakan untuk memodelkan penyebaran penyakit infeksi (Hethcote, 2000). Memperhatikan faktor pengobatan penyakit typhus yaitu dengan antibiotik, maka pemodelan matematika dapat menggambarkan penyebaran penyakit typhus dengan pengaruh antibiotik.

1.2 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan pemodelan dan analisis kestabilan penyebaran penyakit tipes yang terkontrol antibiotik dengan metode Runge-Kutta.

1.3 Manfaat Penelitian

Penelitian ini bermanfaat untuk mengetahui simulasi penyebaran penyakit typhus dengan pengaruh antibiotik dan juga menambah pengetahuan tentang pengaplikasian metode Runge-Kutta.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Typhus

Tipes atau *thypus a*dalah penyakit infeksi bakteri pada usus halus dan terkadang pada aliran darah yang disebabkan oleh Bakteri *Salmonella typhosa* atau *Salmonella paratyphi A, B* dan *C*, selain ini dapat juga menyebabkan *gastroenteritis* (radang lambung). Dalam masyarakat penyakit ini dikenal dengan nama Tipes atau thypus, tetapi dalam dunia kedokteran disebut *Typhoid fever* atau *Thypus abdominalis* karena berhubungan dengan usus di dalam perut (Widoyono, 2011).

Penyakit *Thypus abdominalis* merupakan penyakit yang ditularkan melalui makanan dan minuman yang tercemar oleh bakteri *Salmonella typhosa*, (*food and water borne disease*). *Salmonella thyposa* sebagai suatu spesies, termasuk dalam kingdom *Bakteria, Phylum Proteobakteria, Classis Gamma proteobakteria, Ordo Enterobakteriales, Familia Enterobakteriakceae, Genus Salmonella. Salmonella thyposa* adalah bakteri gram negative yang bergerak dengan bulu getar, tidak berspora mempunyai sekurang-kurangnya tiga macam antigen yaitu: antigen 0 (somatik, terdiri dari zat komplek lipopolisakarida), antigen H (flagella) dan antigen V1 (hyalin, protein membrane). Dalam serum penderita terdapat zat anti (glutanin) terhadap ketiga macam anigen tersebut (Zulkhoni, 2011).

2.2 Pemodelan Matematika

Model adalah karakteristik umum yang mewakili sekelompok bentuk yang ada atau representasi masalah dalam bentuk yang lebih sederhana dan mudah dikerjakan. Dalam matematika, teori model adalah ilmu yang menyajikan konsep himpunan atau ilmu tentang model-model yang mendukung suatu sistem sistematis. Teori model diawali dengan asumsi keberadaan obyek-obyek matematika misalnya keberadaan semua bilangan dan kemudian mencari keberadaan operasi-operasi, relasi-relasi, atau aksioma-aksioma yang melekat pada masing-masing obyek atau pada obyek-obyek tersebut. Model matematika yang diperoleh dari suatu masalah matematika yang diberikan, selanjutnya diselesaikan dengan aturan aturan yang ada. Penyelesaian yang diperoleh, perlu diuji untuk mengetahui apakah penyelesaian tersebut valid atau tidak. Hasil yang valid akan menjawab secara tepat model matematikanya dan disebut solusi matematika. Jika penyelesaian tidak valid atau tidak memenuhi model matematika maka solusi masalah belum ditemukan, dan perlu pemecahan ulang atas model matematikanya (Ross, 1989).

Proses pemodelan matematika dapat dilakukan dengan langkah pertama dalam pemodelan matematika adalah menyatakan permasalahan kehidupan nyata ke dalam pengertian matematika. Langkah ini meliputi identifikasi variabel dan sistem kemudian menjabarkannya menjadi model. Langkah selanjutnya adalah menyusun kerangka model dengan membuat asumsi. Setelah membuat asumsi dan memahami variabel-variabel, langkah selanjutnya adalah formulasi persamaan (model). Formulasi model merupakan langkah paling penting, kadang diperlukan adanya pengujian kembali asumsi-asumsi agar langkah formulasi persamaan dapat sesuai sehingga dapat diselesaikan dan realistik. Jika pada proses pengujian kembali model yang terbentuk tidak sesuai maka perlu dilakukan pengkajian ulang asumsi dan membentuk asumsi yang baru. Setelah menyusun persamaan, langkah selanjutnya adalah menyelesaikan persamaan tersebut secara matematis (Edwards, 1989).

2.3 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan matematika untuk fungsi satu variable atau lebih yang menghubungkan fungsi itu sendiri dan turunannya dalam berbagai orde. Selain itu persamaan diferensial juga didefinisikan sebagai persamaan yang memuat satu atau beberapa turunan fungsi yang tidak diketahui. Jenis-jenis persamaan diferensial dapat dibedakan menjadi dua jenis yaitu persamaan diferensial biasa dan diferensial parsial. Suatu persamaan diferensial disebut persamaan diferensial biasa jika semua turunannya berkaitan dengan satu peubah saja. Suatu persamaan diferensial disebut persamaan diferensial parsial jika turunannya berkaitan dengan dua atau lebih peubah. Sedangkan persamaan diferensial dilihat dari bentuk fungsi atau pangkatnya juga dibedakan menjadi dua yaitu persamaan diferensial linear dan persamaan diferensial nonlinear. Persamaan diferensial linear adalah jika memenuhi dua hal yaitu variabel-variabel terikat dan turunannya paling tinggi berpangkat satu dan tidak mengandung bentuk perkalian antara sebuah variabel terikat dengan variabel terikat lainnya atau turunan yang satu dengan turunan lainnya atau variabel terikat dengan sebuah turunan.

Pada istilah linear yang berkaitan dengan kenyataan bahwa tiap suku dalam persamaan diferensial itu, peubah-peubah $y, y^1, \ldots, y^m$ berderajat satu atau nol. Bentuk umum dari persamaan diferensial linear orde-n adalah :

$$a_n(x)\, y^n + a_{n-1}\,(x) y^{n-1} + a_1\,(x)\, y^1 + a_0\,(x)\, y = f\,(x) \tag{2.1}$$

Pada persamaan diferensial $F(x, y^1, \ldots, y^m) = 0$ merupakan persamaan diferensial nonlinear, jika salah satu syarat berikut di penuhi oleh F :

- F tidak berbentuk polinom, dalam $y, y^1, \ldots, y^m$.
- F tidak berbentuk polinom berpangkat lebih dari dua dalam $y, y^1, \ldots, y^m$

(Kartono, 1994).

2.4 Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan yang memuat turunan terhadap fungsi yang memuat satu variabel bebas. Jika *x* adalah fungsi dari *t*, maka contoh persamaan diferensial biasa adalah

$$\frac{dx}{dt} = t^2 \cos x \tag{2.2}$$

dimana persamaan tersebut memiliki order satu. Order dari persamaan diferensial adalah turunan tertinggi pada fungsi tak diketahui (peubah tak bebas) yang muncul dalam persamaan diferensial (Campbell & Haberman, 2008).

2.5 Sistem Persamaan Differensial

Diketahui Persamaan Diferensial Biasa berikut ini

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{2.3}$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

Kumpulan persamaan diferensial biasa dalam persamaan (2.3) yang mempunyai hubungan simultan disebut sistem persamaan diferensial biasa dapat ditulis dengan

$$\dot{x} = f'(t, x), x \in R \tag{2.4}$$

dengan $\dot{x} = (\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \cdots, \frac{dx_n}{dt})$, $f = (f_1, f_2, \cdots, f_n\ )$ dan $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ adalah fungsi-fungsi bernilai real yang terdefinisi dalam ruang Euclide **R** berdimensi *n* + 1 (dinotasikan dalam ruang (*t*,*x)*) (Boyce *and* Diprima, 1977).

2.6 Model SIR

Model SIR pertama kali diperkenalkan oleh W.O. Kermack dan Mc. Kendrick dalam makalahnya yang berjudul “A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics”, yang kemudian muncul dalam Proceding Royal Society London halaman 700-721 tahun 1927, dan kemudian menjadi peranan penting bagi matematika epidemik. Mengenai rangkuman tersebut telah dituliskan oleh Murray. Di dalam modelnya, populasi manusia dibagi menjadi tiga kelompok, yaitu *suspect* dengan symbol S, terinfeksi atau *infected* dengan simbol I dan sembuh atau *recovery* dengan simbol R, yang masing-masing diberikan dalam bentuk *s*,*i dan r*. jumlah total dari keseluruhan kelompok tersebut adalah

n= s + i + r.

s atau *susceptible* dalam pemodelan SIR merupakan individu yang tidak terinfeksi tetapi golongan ini dapat tertular penyakit. Oleh karea itu golongan ini juga memiliki kemungkinan untuk menjadi terinfeksi. *Infected* merupakan individu yang dapat menyebabkan penyakit pada inividu yang *suspectible*. Waktu yang diperlukan oleh penderita infeksi dinamakan periode penyakit. Setelah mengalami periode penyakit kemudian individu ini pindah dan menjadi individu terinfeksi yang semula *recovered*. *Recovered* merupakan individu yang telah sembuh atau kebal dalam kehidupannya (Ripno, 2012).

2.7 Kestabilan Sistem

Kestabilan sistem bisa didapatkan dengan cara menyelidiki pengaruh perubahan kecil pada syarat awal. Jika (x^*, y^*) adalah titik kesetimbangan maka diselidiki pengaruh perubahan kecil pada titik kesetimbangan tersebut.

Jika titik (x, y) merupakan titik disekitar titik kesetimbangan tersebut maka secara matematis titik (x, y) dapat dinotasikan sebagai

$$(x, y) = (x^* + \Delta x, y^* + \Delta y) \tag{2.5}$$

Pendekatan fungsi

$$f_{1,2}(x, y) \approx f_{1,2}(x^* y^*) + \frac{\partial f_1(x^* y^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial f_1(x^* y^*)}{\partial y}(y - y^*) \tag{2.6}$$

Karena (x^*, y^*) adalah titik kesetimbangan maka $f_{1,2}(x, y) = 0$. Oleh karena itu, sistem $\frac{dx}{dt} = f_1(x, y)$ dan $\frac{dx}{dt} = f_2(x, y)$ dapat didekati sebagai sistem linier

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f_1(x^*, y^*)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f_1(x^*, y^*)}{\partial y}\Delta y \tag{2.7}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f_1(x^*, y^*)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f_1(x^*, y^*)}{\partial y}\Delta y \tag{2.8}$$

Sistem linier diatas dapat disajikan dalam bentuk matriks

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x^*, y^*)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x^*, y^*)}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

$$J(f(x)) = f(x) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

Matriks $f(x)$ pada system diatas merupakan matriks Jacobian (Khamsi, 2004).

Stabilitas titik kesetimbangan ditentukan berdasarkan tanda bagian real pada nilai eigen yang dibagi menjadi tiga, yaitu:

1. Stabil: Titik kesetimbangan dikatakan stabil jika dan hanya jika nilai eigen adalah real dan negatif atau mempunyai bagian real tak positif.
2. Stabil Asimtotik: Titik kesetimbangan dikatakan stabil asimtotik jika dan hanya jika nilai eigen adalah real dan negative atau mempunyai bagian real negative.
3. Tidak Stabil: Titik kesetimbangan dikatakan tidak stabil jika dan hanya jika nilai eigen adalah real dan positif atau mempunyai paling sedikit satu nilai eigen dengan bagian real positif (Tarumingkeng, 1994).

2.8 Nilai Eigen

Kriteria kestabilan titik equilibrium pada system (2.4) disajikan pada teorema dibawah ini:

Teorema 2.1 (Wiggins, 1990)

a) Jika semua nilai eigen dari matriks Jacobian $J(f(x))$ mempunyai bagian real negative, maka titik equilibrium ẋ dari system (2.4) stabil asimtotik.

b) Jika terdapat nilai eigen dari matriks Jacobian $J(f(x))$ mempunyai bagian real positif, maka titik equilibrium ẋ dari sistem (2.4) tidak stabil.

Jika persamaan karakteristik yang diperoleh cukup rumit untuk mencari akar-akar karakteristiknya yaitu dengan nilai eigen matrik, maka untuk menentukan apakah nilai eigen bernilai negatif dapat menggunakan kriteria Routh-Hurwitz.

Teorema 2.2 Kriteria kestabilan Routh-Hurwitz

Diberikan persamaan karakteristik $P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$. Untuk n=2, kondisi Routh-Hurwitz sebagai berikut: $a_1 > 0, a_2 > 0$. Untuk n=3 kondisi Routh-Hurwitz sebagai berikut: $a_3 > 0, a_1 > 0, a_1a_2 > a_3$ jika kriteria Routh-Hurwitz terpenuhi, maka titik ekuilibrium stabil asimtotik.

2.9 Metode Numerik

Metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematika sehingga dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan atau aritmatika biasa (tambah, kurang, kali dan bagi). Metode numerik disebut juga sebagai alternatif dari metode analitik, yang merupakan metode penyelesaian persoalan matematika dengan rumus-rumus aljabar yang sudah baku atau lazim. Disebut demikian, karena sering kali persoalan matematika sulit diselesaikan atau bahkan tidak dapat diselesaikan secara analitik. Sebagai alternatifnya, persoalan matematik tersebut diselesaikan dengan metode numerik. Perbedaan antara metode analitik dan metode numerik adalah metode analitik hanya dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang sederhana dan menghasilkan solusi yang sebenarnya atau solusi sejati. Sedangkan metode numerik dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang sangat kompleks dan nonlinier. Solusi yang dihasilkan dari penyelesaian secara numerik merupakan solusi hampiran atau pendekatan yang mendekati solusi eksak atau solusi sebenarnya. Hasil penyelesaian yang didapatkan dari metode numerik dan metode analitik memiliki selisih, dimana selisih tersebut dinamakan kesalahan (*error*) (Triatmodjo, 2002).

2.10 Metode Runge-Kutta

Metode Runge-Kutta merupakan metode yang memberikan ketelitian hasil yang lebih besar dan tidak memerlukan turunan dari fungsi. Bentuk umum dari metode Runge-Kutta adalah

$$x_{i+1} = x_i + \varphi(t_i, x_1, h)h \tag{2.10}$$

dengan $\varphi(t_i, x_1, h)$ adalah fungsi pertambahan yang merupakan kemiringan rerata pada interval dan digunakan untuk mengekstrapolasi dari nilai lama x_1 ke nilai baru x_{i+1} sepanjang interval h.

Fungsi pertambahan dapat ditulis dalam bentuk umum, sebagai berikut:

$$\varphi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n \tag{2.11}$$

dengan a adalah konstanta dan k adalah

$$k_1 = f(t_i, x_i)$$

$$k_2 = f(t_i + p_i h, x_i + q_{11} k_1 h)$$

$$k_3 = f(t_i + p_i h, x_i + q_{21} k_1 h + q_{21} k_2 h$$

$$\vdots$$

$$k_n = f(t_i + p_{n-i} h, x_i + q_{n-1,2} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \cdots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h \tag{2.12}$$

dengan p dan q adalah konstanta. Nilai k menunjukkan hubungan berurutan. Nilai k_1 muncul dalam persamaan k_2 , yang keduanya juga muncul dalam persamaan dan seterusnya. Hubungan yang berurutan ini membuat metode Runge-Kutta efisien untuk hitungan komputer (Triatmodjo, 2002).

2.11 Matlab

MATLAB (Matrix Laboratory) adalah sebuah program untuk analisis dan kumputasi numerik, merupakan suatu bahasa pemrogaman suatu matematika lanjutan yang dibentuk dengan dasar pemikiran menggunakan sifat dan bentuk matriks. Pada awalnya, program ini merupakan interface untuk koleksi rutin-rutin numerik proyek LINPACK dan EISPACK, dikembangkan dengan bahasa FORTRAN. Namun sekarang, program ini merupakan produk komersiar dari perusahaan Mathwork, Inc. yang dalam perkembangan selanjutnya dikembangkan menggunakan bahasa C++ dan asslembler (terutama untuk fungsi- fungsi dasar MATLAB) (Destiani dan Arhami, 2006).

MATLAB telah berkembang menjadi sebuah environtment pemrogaman yang canggih dan berisi fungsi-fungsi built-in untuk melakukan tugas pengolahan sinyal, aljabar linier, dan kalkulasi matematis lainnya. MATLAB juga berisi toolbox yang berisi fungi fungsi tambahan untuk aplikasi khusus. MATLAB merupakan software yang paling efisien untuk perhitungan numerik berbasis matriks. Dengan demikian jika di dalam perhitungan kita dapat memformulasikan masalah ke dalam format matriks, maka MATLAB merupakan software terbaik untuk penyelesaian numeriknya (Destiani dan Arhami, 2006).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan di Jurusan Matematika Fakultas Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung dan waktu penelitian dilaksanakan pada semester ganjil tahun akademik 2018/2019.

3.2 Metode Penelitian

Adapun langkah-langkah yang akan dilakukan penulis dalam menyelesaikan penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Menggambarkan karakteristik model penyakit typhus SIR.
2. Menjabarkan model matematika untuk penyebaran penyakit typhus SIR dengan memperhatikan adanya antibiotik.
3. Menentukan titik kesetimbangan pada model penyebaran penyakit typhus dengan kontrol antibiotik.
4. Melakukan analisis kestabilan titik kesetimbangan.
5. Melakukan simulasi numerik dengan metode Runge-Kutta untuk melihat perilaku sistem penyebaran penyakit typhus dan menginterpretasikan hasil simulasi.

V. KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Dari hasil dan pembahsan penelitian yang telah dilakukan, maka dapat disimpulkan bahwa:

1. Model matematika SIR pada penyebaran penyakit tipes dengan kontrol antibiotik yaitu:

$$\frac{dS}{dt} = \mu N - \omega\mu - \mu S$$

$$\frac{dI}{dt} = (1-\omega)\mu - \beta IR - \mu I - \theta I$$

$$\frac{dR}{dt} = \beta IR - \mu R - \gamma R$$

2. Diperoleh dua titik kesetimbngan dari model matematika SIR pada penyebaran penyakit tipes yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu $E_0 = \left(\frac{(1-\omega)\mu}{\mu+\theta}, 0\right)$. Sedangkan titik kesetimbangan endemik penyakit yaitu $E_e = \left(\frac{\mu+\gamma}{\beta}, \frac{(1-\omega)\mu\beta-(\mu+\theta)(\mu+\gamma)}{\beta(\mu+\gamma)}\right)$ kesetimbangan ini menunjukkan penyakit akan ada sampai waktu yang tak terbatas.

3. Antibiotik yang digunakan yaitu dengan minimum

$$\omega_0 = 1 - \left(\frac{(\mu+\gamma)(\mu+\theta)}{\beta\mu}\right)$$

Supaya penyakit menghilang dan berhenti penyebarannya maka dibutuhkan antibiotik. $\omega_o > \omega$. Namun, jika $\omega_o < \omega$ maka penyakit akan terus ada dan menyebar.

5.2 Saran

Tugas akhir ini memodelkan penyebaran penyakit dengan kontrol antibiotik dengan asumsi-asumsi tertentu. Bagi pembaca yang tertarik dengan topik ini disarakan untuk melakukan penelitian selanjutnya mencari penyebaran penyakit dengan pengaruh vaksinasi sekaligus dengan pengaruh antibiotik.

DAFTAR PUSTAKA

Boyce, W., and Diprima, R., 1977, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 3rd ed., Wiley, New York.

Campbell, S.L. & Haberman, R. 2008. *Introduction to Differential Equations with Dynamical Systems.* Princeton University Press, New Jersey.

Desiani, A. dan Arhami, M. 2006. Konsep Kecerdasan Buatan. Penerbit Andi, Yogyakarta.

Edwards, D.M.H. 1989. *Guide To Mathematical Modelling*. The Macmillan Press, London.

Hethcote, H.W. 2000. *The Mathematics of Infectious Diseases,* SIAM Review. Vol. 42, No. 4:599-653.

Kartono. 1994. *Persamaan Diferensial*. Andi Offset, Yogyakarta.

Khamsi, M. A. 2004. Equilibrium Point Analysis: Lenearization Technique. Utrecht University, Utrecht.

Ripno, J.I. 2012. *Pemodelan Matematika : Aplikasi dan Terpannya.* Graha Ilmu, Yogyakarta.

Ross, S.L. 1989. *Introduction To Ordinary Differensial Equations*. John Wiley and Sons Inc., New York.

Tarumingkeng, R. C. 1994. *Dinamika Populasi Kajian Ekologi Kuantitatif*. Pustaka Sinar Harapan, Jakarta.

Triatmodjo, B. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer*. Beta Offset, Yogyakarta.

Widoyono. 2011. *Penyakit Tropis : Epidemiologi*, *Penularan*, *Pencegahan*, *dan Pemberantasannya*. Erlangga, Jakarta.

Wiggins, S. 1990. *Introduction to Applied Nonlinier Dynamical System and Chaos*. Second Edition. Springer-Verlag, New York.

Zulkoni, A. 2011. *Parasitologi*. Nuha Medika, Yogyakarta.