PEMODELAN MATEMATIKA PADA KASUS DUA *PREDATOR* SATU *PREY*

(Skripsi)

Oleh

FIRLY SYASQITA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2021

ABSTRACT

MATHEMATICAL MODELLING IN THE CASE OF TWO PREDATORS AND ONE PREY

By

Firly Syasqita

Mathematical model predator-prey is a model that describes the case variation of natural phenomenon,one of them is the interaction between two species who lives in an ecosystem. Predator population which in fact is at the higher level in the food chain, tend to be fewer in number than the prey population, and are more susceptible to infection. In this research, a predator-prey model is developed with two types of predator populations, one of them is infected with disease.

Literature study was conducted to examine models involving infection. Identification of problems in the case of two predators and one prey where there is an infected predator population, formulating assumptions for the case, defining variables that represent the four populations, namely the first type of predator which healthy, the first type of predator which infected, the second type of predator, and the prey, also the formation of an interaction scheme among populations is carried out in the formulation of mathematical models.

The mathematical model for a first-type healthy predator population is influenced by infection transmission, vaccination and treatment, predation measures, and natural mortality factors. The mathematical model for the population of the infected predator is also influenced by the transmission of infection, vaccination and treatment, natural mortality and death due to infection. The mathematical model for the second type of predator population is influenced by predation and natural mortality factors. The mathematical model for the prey population is influenced by natural growth and predation measures by the three predator population.

Kata kunci: *Predator-prey model, infected predator, interactionm vaccination, treatment*

ABSTRAK

PEMODELAN MATEMATIKA PADA KASUS DUA *PREDATOR* SATU *PREY*

Oleh

Firly Syasqita

Model matematika *Predator-Prey* merupakan model yang menggambarkan variasi kasus fenomena alam, salah satunya adalah interaksi antar dua spesies yang hidup pada suatu ekosistem. Populasi *predator* yang pada hakikatnya berada pada tingkatan atas rantai makanan, cenderung lebih sedikit jumlahnya dibanding populasi *prey*, serta lebih rentan terkena infeksi penyakit. Dalam skripsi ini, dikembangkan model *predator-prey* dengan dua jenis populasi *predator* yang salah satunya terinfeksi penyakit.

Studi literatur dilakukan untuk mengkaji model yang melibatkan infeksi. Identifikasi masalah pada kasus dua *predator* satu *prey* dimana terdapat populasi *predator* yang terinfeksi, penyusunan asumsi terhadap kasus, pendefinisian variabel yang mewakilkan keempat populasi yaitu *predator* jenis pertama yang sehat, *predator* jenis pertama yang terinfeksi, *predator* jenis kedua, dan *prey*, serta pembentukan skema interaksi antar populasi dilakukan dalam perumusan model matematika.

Model matematika bagi populasi *predator* jenis pertama yang sehat dipengaruhi oleh penularan infeksi, tindakan vaksinasi dan *treatment*, tindakan predasi, dan faktor kematian alami. Model matematika bagi populasi *predator* jenis pertama yang terinfeksi juga dipengaruhi oleh penularan infeksi, tindakan vaksinasi dan *treatment*, faktor kematian alami dan kematian akibat infeksi. Model matematika bagi populasi *predator* jenis kedua dipengaruhi oleh tindakan predasi dan faktor kematian alami. Selanjutnya, model matematika bagi populasi *prey* dipengaruhi oleh pertumbuhan alami dan tindakan predasi oleh ketiga populasi *predator*.

Kata kunci: Model *predator-prey*, predator terinfeksi, interaksi,vaksinasi, *treatment*

PEMODELAN MATEMATIKA PADA KASUS DUA *PREDATOR* SATU *PREY*

Oleh

Firly Syasqita

Skripsi
Sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2021

Judul Skripsi : **PEMODELAN SISTEM PERSAMAAN LOTKA-VOLTERRA DUA *PREDATOR* SATU *PREY***

Nama Mahasiswa : **Firly Syasqita**

Nomor Pokok Mahasiswa : 1517031139

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.
NIP. 19700831 199903 1 002

Dorra E

Dra. Dorrah Aziz, M.Si
NIP. 19610128 198811 2 001

a.n.
2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP. 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Dra. Dorrah Aziz, M.Si** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Amanto, S.Si. M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, S.Si., M.T
NIP. 19740705 200003 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **15 Juli 2021**

SURAT PERNYATAAN

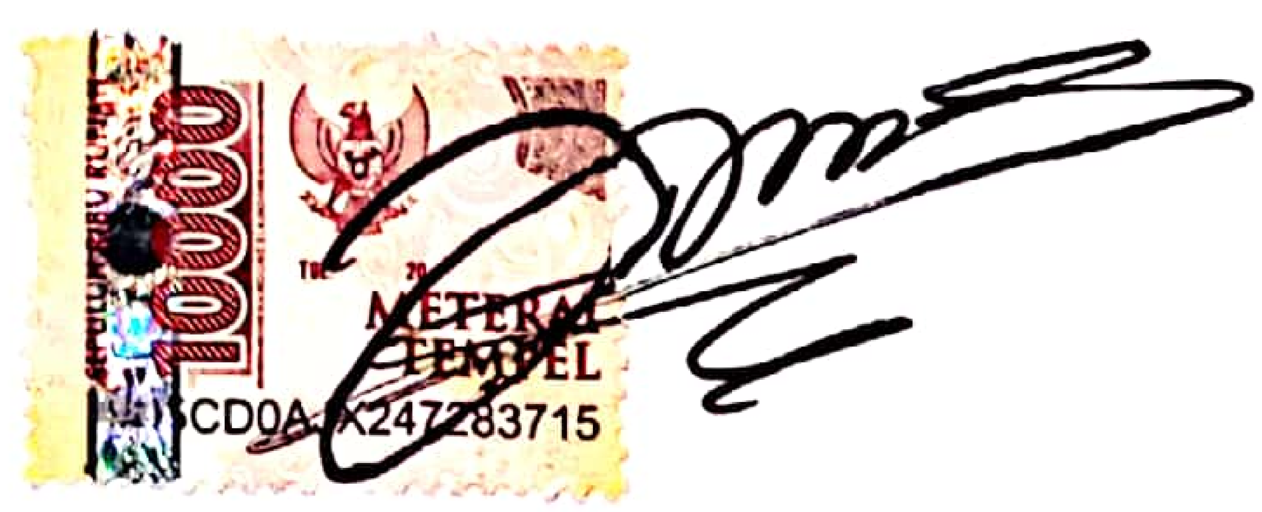
Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	: Firly Syasqita
Nomor Pokok Mahasiswa	: 1517031139
Judul	: Pemodelan Matematika Pada Kasus Dua *Predator* Satu *Prey*
Jurusan	: Matematika

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri, bukan hasil orang lain, dan semua hasil tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, Juli 2021

Penulis



Firly Syasqita
NPM. 1517031139

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Firly Syasqita, anak pertama dari dua bersaudara yang dilahirkan di Jakarta pada tanggal 16 September 1997 oleh pasangan Bapak Syamsul Komar dan Ibu Ita Efendi. Penulis memiliki satu orang adik laki-laki bernama Khairul Muzaqi Syasqita.

Penulis menyelesaikan pendidikan taman kanak-kanak di TK Asiah Jakarta pada tahun 2003. Pendidikan sekolah dasar di SD Negeri 11 Palmerah Jakarta pada tahun 2009. Pendidikan sekolah menengah pertama di SMP Negeri 48 Jakarta pada tahun 2012. Pendidikan sekolah menengah atas di SMA Negeri 65 Jakarta pada tahun 2015.

Penulis melanjutkan pendidikan di perguruan tinggi dan terdaftar sebagai mahasiswi S1 Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung pada tahun 2015 melalui jalur SBMPTN. Pada periode 2015/2016 penulis terdaftar sebagai anggota GEMATIKA Himpunan Mahasiswa Matematika FMIPA Unila. Penulis pernah menjadi anggota magang bidang Eksternal Himpunan Mahasiswa Matematika Tahun 2016.

Sebagai bentuk penerapan ilmu perkuliahan, penulis telah melaksanakan Kerja Praktik (KP) selama 38 hari di Kantor Pelayanan Pajak Pratama Grogol Jakarta Barat pada tahun 2018. Dan pada tahun yang sama, sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat, penulis elah melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) selama 32 hari di Desa Tugupapak, Kecamatan Semaka, Kabupaten Tanggamus.

Kata Inspirasi

"Fa inna ma'al 'usri yusraa
For indeed with every difficulty there is relief"
(Quran 94 : 5)

"Fa inni qariib
Indeed, I am near"
(Quran 2 : 186)

"Alhamdulillah 'alaa kulli haal.
Praise belong to Allah in all conditions."

"Hadzaa min fadhli rabbii.
This is by the Grace of my Lord."

"Allah will open a door
that you desperately thought
never even had a key"

PERSEMBAHAN

Alhamdulillah Wasyukurillah

Puji dan syukur tiada hentinya kepada Allah Subhanahu Wata'ala atas segala nikmat dan karunia-Nya, dan suri tauladan Nabi Muhammad Shallallahu 'Alaihi Wasallam yang menjadi contoh dan panutan untuk kita semua.

Penulis persembahkan sebuah karya sederhana ini untuk:

Ayahanda Syamsul Komar dan Ibunda Ita Efendi
Terimakasih atas limpahan kasih sayang, pengorbanan, doa, dan seluruh motivasi di setiap langkah penulis. Karena atas doa dan ridho kalian, Allah memudahkan setiap perjalanan hidup ini.

Adik Khairul Muzaqi Syasqita
Terimakasih telah menjadi pendengar selama penulis mencurahkan keluh kesah dan mendoakan setiap waktu untuk keberhasilan penulis.

Almamater Tercinta Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillahirabbil'alaamiin, puji dan syukur penulis kepada Allah SWT atas izin serta ridho-Nya dalam menyelesaikan skripsi yang berjudul **"Pemodelan Matematika Pada Kasus Dua *Predator* Satu *Prey*"**. Shalawat serta salam kepada Nabi Muhammad SAW yang telah menjadi suri tauladan yang baik sepanjang masa.

Terselesaikannya skripsi ini tidak terlepas dari bantuan, kejasama, dan dukungan berbagai pihak. Untuk itu, penulis ingin mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Agus Sutrisno, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing I, yang senantiasa membimbing dan memberikan arahan, ide, kritik, dan saran serta semangat kepada penulis selama proses pembuatan skripsi ini.
2. Ibu Dra. Dorrah Aziz, M.Si. selaku Dosen Pembimbing II, yang telah membimbing, memberi masukan, dan mengarahkan penulis selama proses penyusunan skripsi ini.
3. Bapak Amanto, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembahas, yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun kepada penulis selama proses penyelesaian skripsi ini.
4. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing Akademik yang telah memberikan pengarahan selama masa perkuliahan.

5. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, MA., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.
6. Bapak Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, S.Si., M.T. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Seluruh dosen, staf, dan karyawan Jurusan Matematika FMIPA UNILA yang telah memberikan ilmu pengetahuan dan segala bentuk bantuan kepada penulis.
8. Ibunda Ita, Ayahanda Syamsul, Abang Leo, dan keluarga yang tak pernah berhenti memberi semangat, doa, dorongan, kasih sayang, dan nasihat untuk selalu berjuang setiap harinya.
9. Saudara-saudara penulis Abi Zainal, Ummi Ersy, Atu Ike, Paduka Doddie, Kakak Luna, Mauldiene, Zakiyya, Abdia, dan EO Crew yang senantiasa menemani suka duka penulis.
10. Teman-teman penulis, Wafa, Dinda, Adinda, Halilah, Ocha, dan Meidi, Gita, Irna, Itsna yang telah memberikan warna keceriaan walau berjauhan.
11. Dian dan Yonanda yang telah menyemangati dan membantu banyak dalam proses penyelesaian skripsi ini.
12. Seluruh pihak yang telah membantu penulis yang tidak dapat disebutkan satu persatu atas peran dan dukungannya dalam menyusun skripsi ini.

Bandar Lampung,   Juli 2021

Penulis

Firly Syasqita

DAFTAR ISI

V. KESIMPULAN

DAFTAR PUSTAKA

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Hakikatnya makhluk hidup di bumi tidak dapat hidup sendiri secara normal, melainkan akan saling berinteraksi dengan berbagai spesies yang lainnya. Cabang ilmu biologi yang mempelajari hubungan timbal balik antara makhluk hidup seperti manusia, hewan, tumbuhan, dan lingkungan hidup itu sendiri disebut ekologi (Riberu, 2002).

Makhluk hidup tunggal disebut individu, sementara kumpulan dari individu yang sejenis yang berinteraksi pada lingkungan dan waktu yang sama disebut populasi. Kumpulan berbagai populasi dari spesies yang berbeda namun hidup secara bersamaan disebut komunitas. Satu kelompok yang terdiri dari berbagai komunitas berbeda serta memiliki ciri khas tertentu dikenal dengan sebutan ekosistem (Nurhamiyawan *et al*., 2013).

Kompetisi dalam suatu ekosistem merupakan salah satu bentuk interaksi antar individu pada habitat terbuka yang biasa terjadi. Interaksi yang terjadi dapat menimbulkan berbagai macam akibat, salah satunya bersifat *predator-prey* yang dapat terjadi dikarenakan kedudukan populasi *predator* berada di tingkatan atas rantai makanan yang kemudian berinteraksi dengan populasi *prey*. Namun terjadinya interaksi semacam ini penting adanya untuk menjaga kelangsungan hidup populasi *predator* serta merupakan bentuk pengendalian jumlah populasi *prey*.

Dalam sebuah ekosistem, dimungkinkan beberapa jenis populasi *predator* yang hidup dan memburu *prey* bersamaan. Adanya populasi *predator* lain menjadi gangguan bagi *predator* jenis lainnya. Kompetisi di antara kedua populasi *predator* terjadi karena faktor perebutan makanan dan wilayah hidup, namun juga dipengaruhi oleh jumlah kawanan dan kondisi kesehatan masing-masing populasi.

Model *predator-prey* diperkenalkan pertama kali oleh Lotka pada tahun 1925 dan Voltera pada tahun 1926, sehingga model ini juga disebut model *Lotka-Volterra* (Boyce & DiPrima, 2012). Model tersebut berasumsi bahwa apabila interaksi antara *predator* dan *prey* tidak terjadi serta tidak dibatasi oleh lingkungan maka populasi *prey* akan meningkat tak terbatas, yang demikian disebut dengan model eksponensial. Sementara, tanpa adanya *prey*, populasi *predator* akan menurun juga secara eksponensial, dikarenakan fungsi *prey* yang merupakan makanan utama bagi *predator*.

Penelitian yang melibatkan infeksi terkait *predator-prey* telah banyak dilakukan. Hugo *et al*. (2012) membentuk *predator-prey* dengan infeksi pada kedua populasi dan mempertimbangkan adanya pengobatan, dengan populasi yang diberi pengobatan dialokasi dalam satu kelompok baru yang terpisah. Bera *et al*. (2015) meneliti *predator-prey* dengan infeksi pada kedua populasi yang penyebarannya mengadopsi prinsip model epidemi *Susceptible, Infectious, and Removed* (SIR). Penggunaan *Lotka-Volterra* dengan infeksi tidak hanya diterapkan pada makhluk hidup, namun juga pada kasus kepolisian dan kelompok kriminal, atau pada bidang komputer. Kumar *et al*. (2016) mengamati pertumbuhan beberapa jenis virus dalam sebuah jaringan komputer terinfeksi.

Kenyataannya, interaksi antara *predator* dan *prey* tidak hanya terjadi pada dua jenis populasi saja. Seiring perkembangannya, model *Lotka-Volterra* dikembangkan dengan model interaksi antara lebih dari satu *predator* dan *prey*. Berbeda dengan beberapa penelitian terdahulu yang menggunakan satu jenis populasi *predator*, penanganan populasi terinfeksi ditangani dengan *treatment* dan vaksinasi secara terpisah, yaitu dengan membuat variabel baru yang terpisah dari populasi awal. Penelitian ini akan membahas model *Lotka-Volterra* dengan dua jenis populasi *predator* dan satu jenis populasi *prey*. Dianggap tidak terjadi predasi antara kedua jenis populasi *predator* karena keduanya dimisalkan berada pada tingkat rantai makanan yang sama. Sedangkan populasi *prey* menjadi mangsa bagi kedua populasi *predator* dengan tingkat predasi yang sama.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan pada penelitian ini antara lain memodelkan:

1. Perkembangan populasi *predator* jenis pertama yang sehat dengan dipengaruhi tindakan vaksinasi, *treatment*, adanya interaksi, dan proses predasi, serta kematian alami.
2. Perkembangan Populasi *predator* jenis pertama terinfeksi yang juga dipengaruhi tindakan vaksinasi, *treatment*, adanya interaksi, dan kematian alami.
3. Perkembangan populasi *predator* jenis kedua yang dipengaruhi proses predasi dan kematian alami.
4. Perkembangan populasi *prey* yang dipengaruhi laju pertumbuhan serta adanya proses predasi oleh ketiga jenis populasi *predator*.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Penelitian ini dapat menjadi indikator untuk mengetahui perilaku penyebaran infeksi pada contoh kasus dalam kehidupan nyata.
2. Penelitian ini dapat dipakai sebagai bahan acuan bagi mahasiswa yang ingin melanjutkan penelitian mengenai penyebaran infeksi.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Sistem Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial merupakan persamaan yang memuat satu atau lebih turunan dari fungsi yang diketahui. Jika hanya terdapat fungsi tunggal yang akan ditentukan maka satu persamaan saja sudah cukup. Sebuah sistem persamaan diperlukan jika terdapat dua atau lebih fungsi yang tidak diketahui. Sebagai contoh, model *predator-prey* yang merupakan contoh sistem persamaan dalam bidang ekologi. Sistem persamaan tersebut berbentuk

$$\frac{d}{d} = a \quad - \alpha \quad ,$$

$$\frac{d}{d} = -c \quad + \gamma \tag{2.1}$$

dengan $x(t)$ = populasi spesies *prey*

$y(t)$ = populasi spesies *predator*

a = laju kelahiran dari populasi *prey*

α = laju *predator* terhadap *prey*

c = laju kematian dari populasi *predator*, dan

γ = laju pertumbuhan *predator* dalam mengonsumsi *prey* (Waluya, 2006).

2.2 Sistem Persamaan Diferensial Biasa Linier dan Non Linier

$F(x, y, y', y'', y'', \dots, y^n) = 0$ dikatakan linier jika F adalah linier dan variabel-variabelnya adalah $x, y, y', y'', y'', \dots, y^n$. Secara umum persamaan diferensial biasa linier dapat diberikan sebagai berikut:

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \tag{2.2}$$

Menurut Baiduri (2012), persamaan (2.2) merupakan persamaan diferensial linier orde$-n$ jika:

a) Tidak mengandung bentuk perkalian antara sebuah variabel terikat dengan variabel terikat lainnya, atau turunan yang satu dengan turunan lainnya, atau variabel terikat dengan sebuah turunan.
b) Variabel terikat y bukan merupakan fungsi transenden.

Misal koefisien-koefisien $a_n(x), a_{n-1}(x), \dots, a_0(x)$ dan dan fungsi $f(x)$ merupakan fungsi-fungsi yang kontinu pada suatu selang I. Persamaan (2.2) dikatakan homogen jika fungsi $f(x) = 0$. Sebaliknya, persamaan (2.2) dikatakan tak homogen atau non-homogen jika fungsi $f(x) \neq 0$. Bila semua koefisien $a_n(x), a_{n-1}(x), \dots, a_0(x)$ adalah suatu konstanta, maka persamaan (2.2) disebut persamaan linier koefisien konstanta, jika semua variabelnya berupa fungsi maka disebut persamaan linier koefisien variabel.

Sistem persamaan diferensial linier didefinisikan sebagai suatu sistem yang memuat n persamaan diferensial dengan n fungsi yang tidak diketahui, dengan n

merupakan bilangan bulat positif yang lebih besar sama dengan 2. Bentuk umum dari suatu sistem persamaan diferensial linier orde satu dengan n fungsi yang tidak diketahui adalah:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \dots & a_{1n} \\ a_2 & a_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Dengan koefisien a_1 , ... , a_n dan fungsi f_1, ... , f_n; semua merupakan fungsi t yang kontinu pada suatu selang I dan $x_1, \dots, x_n$ adalah fungsi t yang tidak diketahui. Sedangkan titik di atas x_1, ... , x_n menyatakan turunan menurut peubah bebas t (Finizio & Ladas, 1988).

Sedangkan sistem persamaan diferensial non-linier didefinisikan sebagai sistem persamaan yang terdiri dari n buah persamaan diferensial non linier dengan n buah fungsi tak diketahui. Sistem ini disebut juga *sistem non linier*.

Sistem persamaan diferensial dinyatakan sebagai

$$\dot{x} = F(t, x) \tag{2.4}$$

dengan

$$x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, F(t, x) = \begin{pmatrix} F_1(t, x_1, x_2, \dots x_n) \\ \vdots \\ F_n(t, x_1, x_2, \dots x_n) \end{pmatrix}$$

Jika $F(t, x)$ fungsi tak linier pada $x_1, x_2, \dots x_n$, maka sistem ini disebut sebagai sistem persamaan diferensial non linier dan jika F linier maka sistem persamaan diferensial (2.4) disebut persamaan diferensial linier (Farlow, 1994).

2.3 Sistem *Autonomous*

Suatu sistem persamaan diferensial yang berbentuk

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{\lambda}) \tag{2.5}$$

dengan

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \qquad \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}, \lambda) \\ f_2(\vec{x}, \lambda) \\ \vdots \\ f_n(\vec{x}, \lambda) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

dimana fungsi-fungsi f tidak bergantung secara eksplisit pada variabel t, disebut sistem *autonomous* (Finizio & Ladas, 1988).

2.4 Model *Lotka-Volterra*

Seperti yang dijabarkan pada Bab I, laju pertumbuhan populasi *prey* dengan tidak adanya *predator* tumbuh cepat mendekati eksponensial dan tak terbatas dalam bentuk sebagai berikut

$$\frac{d\ \ (t)}{d} = N(t)\, r \tag{2.6}$$

$N(t)$ = populasi spesies *prey*

r = laju pertumbuhan dari *prey*

Laju populasi *prey* menjadi fungsi logistik karena sumber daya alam yang terbatas, yang dapat ditulis menjadi

$$\frac{d\ \ (t)}{d} = N(t)\, r \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \tag{2.7}$$

Dengan proporsi sisa jumlah individu dalam populasi yang belum digunakan $\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$ dan K (*carrying capacity*) adalah jumlah maksimum banyaknya individu dalam suatu populasi. Populasi pada tingkat K kadang disebut tingkat kejenuhan, karena terjadi lebih banyak kematian dibanding kelahiran pada populasi besar.

Carrying capacity atau daya dukung merupakan maksimum banyaknya individu dalam mampu didukung oleh sumber daya dari suatu ekosistem. Dengan kata lain, *carrying capacity* dapat dikatakan sebagai kemampuan ekosistem untuk mendukung semua kehidupan makhluk hidup yang ada di dalamnya secara berkelanjutan. *Carrying capacity* erat kaitannya dengan persediaan makanan *prey* yaitu tumbuh-tumbuhan. Sehingga dibentuk suatu persamaan dengan *prey* dan *predator* yang akan saling berinteraksi yaitu sebagai berikut

$$\frac{d\ \ (t)}{d} = -\beta\ \ (t)P(t) \tag{2.8}$$

Dengan β adalah laju penangkapan *prey* oleh *predator* dan $P(t)$ adalah populasi *predator*. Dalam hal ini *prey* berinteraksi dengan *predator*. Berdasarkan penjelasan di atas maka dapat dibentuk model dinamika pertumbuhan pertumbuhan *prey* sebagai berikut

$$\frac{d\ \ (t)}{d} = N(t)\, r\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) - \beta\ \ (t)P(t) \tag{2.9}$$

Diasumsikan $K, \beta, r > 0$, memperhatikan setiap populasi memiliki potensi untuk berkembang biak.

Karena dalam hubungannya *prey* akan berinteraksi dengan *predator*, maka persamaan di atas bersifat mengurangi banyaknya populasi *prey*. Sedangkan terjadi sebaliknya pada model pertumbuhan *predator*, model ini akan bersifat menambah jumlah populasi *predator* (Timuneno *et al*., 2008).

2.5 Linierisasi Sistem

Linierisasi diperlukan untuk menganalisa kestabilan sistem persamaan diferensial tak linier. Matriks *Jacobian* digunakan untuk memperoleh hasil linieriasi sistem persamaan diferensial tak linier

Definisi 1. Diberikan fungsi $f = (f_1, \dots, f_n)$ pada sistem $\dot{x} = f(x)$ dengan $f_i \in C(E), i = (1,2, \dots, n)$.

$$J\,f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1}(\bar{x}) & \frac{\delta f_1}{\delta x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\delta f_1}{\delta x_n}(\bar{x}) \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1}(\bar{x}) & \frac{\delta f_2}{\delta x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\delta f_2}{\delta x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\delta f_n}{\delta x_1}(\bar{x}) & \frac{\delta f_n}{\delta x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\delta f_n}{\delta x_n}(\bar{x}) \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

Matriks di atas dinamakan matriks *Jacobian* dari f di titik $\bar{x}$ (Kocak dan Hole, 1991).

Definisi 2. Sistem linier $\dot{x} = J\,f(\bar{x})(x - \bar{x})$ disebut linierisasi sistem non linier $\dot{x} = f(x)$ di sekitar titik $\bar{x}$ (Perko, 1991).

2.6 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Misal A adalah matriks $n \times n$, maka vektor tak nol pada R^n disebut vektor eigen dari A jika $A\quad$ adalah kelipatan skalar dari x yaitu, $A\quad = \lambda\quad$ untuk suatu skalar λ. Skalar λ disebut nilai eigen dari A dan x dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

Untuk mencari nilai eigen matriks A yang berukuran $n \times n$ maka

$$A\quad = \lambda \tag{2.11}$$

Ditulis sebagai berikut , $A\quad = \lambda\quad$ atau secara ekuivalen

$$(\lambda\quad - A)x = 0 \tag{2.12}$$

dengan I adalah matrkis identitas. Agar λ menjadi nilai eigen, maka harus ada solusi *non trivial* dari persamaan (2.8). Persamaan (2.8) akan memiliki solusi *non trivial* jika dan hanya jika

$$d\quad (\lambda\quad - A) = 0 \tag{2.13}$$

persamaan (2.9) disebut persamaan karakteristik dari A (Anton, 2004).

2.7 Titik Ekuilibrium

Definisi 3. Diberikan suatu sistem persamaan diferensial orde satu $\dot{x} = f(x)$, yang mempunyai solusi, dengan kondisi awal $x(0) = x_0$. Suatu vektor $\bar{x}$ yang memenuhi $f(\bar{x}) = 0$ disebut titik ekuilibrium.

Analisa kestabilan pada titik ekuilibrium dapat ditentukan dengan cara mencari nilai eigen dari masing-masing matriks *Jacobian* yang dicari. Nilai eigen dapat diperoleh saat memenuhi persamaan $d \quad (\lambda \ - A) = 0$, dengan λ merupakan nilai eigen dari matriks *Jacobian*. Adapun kriteria kestabilan terdapat pada tabel 1 sebagai berikut:

Definisi 4. Diberikan matriks *Jacobian* $J_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)}$ suatu sistem

1. Jika semua bagian *real* nilai eigen dari matriks $J_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)}$ bernilai negatif, maka titik ekuilibrium $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ dari sistem non-linier stabil asimtotik lokal.
2. Jika terdapat paling sedikit satu nilai eigen dari matriks $J_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)}$ bernilai positif, maka titik ekuilibrium $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ dari sistem non-linier tidak stabil.

Tabel 1. Kriteria Kestabilan Titik Ekuilibrium

No	Nilai Eigen	Jenis Titik Kritis	Kestabilan
1	$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Simpul	Stabil
2	$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Simpul	Tak stabil
3	$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	Titik sadel	Tak stabil
4	$\lambda_1, \lambda_2 = r \pm i\iota$ $r < 0$	Titik spiral	Stabil asimtotik
5	$\lambda_1, \lambda_2 = r \pm i\iota$ $r > 0$	Titik spiral	Tak stabil
6	$\lambda_1 = i\iota\,, \lambda_2 = -i\iota$	Pusat	Stabil
7	$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Simpul sejati atau simpul tak sejati	Tak stabil
8	$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Simpul sejati atau simpul tak sejati	Stabil asimtotik

Berdasarkan kriteria kestabilan pada tabel di atas dapat diketahui kestabilan interaksi populasi dengan men-substitusi titik ekuilibrium ke dalam matriks *Jacobian* (Boyce dan DiPrima, 2012).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun akademik 2020/2021, bertempat di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Penelitian ini bersifat studi literatur secara sistematis yang diperoleh dari mempelajari buku-buku teks yang terdapat di perpustakaan universitas, perpustakaan jurusan matematika, dan jurnal-jurnal ilmiah yang terkait dengan materi penelitian ini. Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut

1. Mengkaji model-model yang sudah ditemukan yang melibakan infeksi pada *predator*.
2. Mengidentifikasi masalah pada kasus *predator-prey* dengan dua jenis *predator* yang salah satunya terinfeksi

3. Menyusun asumsi-asumsi guna memudahkan analisis.
4. Mendefinisikan variabel-variabel yang akan digunakan dalam sistem persaman.
5. Membentuk skema interaksi antara populasi *predator* dan *prey* dengan dua *predator* yang salah satunya terinfeksi
6. Merumuskan model matematika berdasarkan kasus *predator-prey* dengan dua jenis *predator* yang salah satunya terinfeksi.

IV. KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan, dimodelkan modifikasi *predator-prey* dengan meninjau adanya dua jenis populasi *predator* dan satu populasi *prey* dalam satu wilayah, dan terdapat satu jenis populasi yang terinfeksi penyakit dan mungkin menularkannya ke sesama spesies. Berdasarkan asumsi yang dijabarkan, didefinisikan model *predator-prey* sebagai berikut:

1. Perkembangan populasi *predator* jenis pertama yang dipengaruhi tindakan vaksinasi, *treatment*, interaksi dengan populasi *predator* terinfeksi, proses predasi terhadap *prey,* dan kematian alami akibat tidak tersedianya populasi *prey,* dimodelkan sebagai berikut:

$$\frac{d}{d} = -a_1(1-\mu_1)x \; + \; \mu_2 i + a_2 x \quad - a_3 x$$

2. Perkembangan populasi *predator* jenis pertama terinfeksi yang dipengaruhi tindakan vaksinasi, *treatment*, interaksi dengan populasi *predator* sehat, kematian alami akibat tidak tersedianya populasi *prey* dan akibat infeksi penyakit dimodelkan sebagai berikut

$$\frac{d}{d} = a_1(1-\mu_1)x \; - \mu_2 i - b_1 i - \; b_2 i$$

3. Perkembangan populasi *predator* jenis kedua yang dipengaruhi proses predasi terhadap populasi *prey* dan kematian alami akibat tidak tersedianya populasi *prey* dimodelkan sebagai berikut:

$$\frac{d}{d} = d_1 y \quad - d_2 y$$

4. Perkembangan populasi *prey* yang dipengaruhi laju pertumbuhan serta adanya proses predasi oleh populasi *predator* pertama, populasi *predator* terinfeksi, dan *predator* jenis kedua dimodelkan sebagai berikut:

$$\frac{d}{d} = \beta \quad - c_1 x \quad - c_2 i \quad - c_3 y$$

5.2 Saran

Kepada pembaca yang tertarik pada kasus ini dapat mengembangkan model *Lotka-Volterra* dengan menstabilkan model yang telah diperoleh pada penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. & Rorres, C. 2004. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi*. Terjemahan oleh Refina Indriasari dan Irzam Harmein. Erlangga, Jakarta.

Baiduri. 2012. *Persamaan Difernsial dan Matematika Model*. UMM Press, Malang.

Bera, S.P., Maiti, A., Samanta, G. P. 2015. A prey-Predator Model with Infection in Both Prey and Predator. *Filomat*. 29(8):1753-1767.

Boyce, W. E. & DiPrima, R. C. 2012. *Elementary Differential Equations And Boundary Value Problems 10th Edition*. John Wiley & Sons, New York.

Farlow, S. 1994. *An Introduction to Differential Equations and Applications*. McGraw-Hill, Inc., New York.

Finizio, N., & Ladas, G. 1988. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Erlangga, Jakarta.

Hugo, A., Massawe, E. S., Makinde, O. D. 2012. An Eco-epidemiological Mathematical Model with Treatment and Disease Infection in Both Prey and Predator Population. *Journal of Ecology and The Natural Environment*. 4(10):266-279.

Kocak, H. & Hole, J. K. 1991. *Dynamic and Bifurcation*. New York: Springer−Verlag Berlin Heidelberg.

Kumar, M., Mishara, B. K., Panda, T. C. 2016. Predator-Prey Models on Interaction between Computer Worms, Trojan Horse and AntivirusSoftware Inside a Computer System. *International Journal of Security and Its Applications*. 10(1):173-190.

Nurhamiyawan, E. N. L., Prihandono., Helmi. 2013. Analisis Dinamika Model Kompetisi Dua Populasi yang Hidup Bersama di Titik Kesetimbangan Tidak Terdefinisi. *Bimaster*. 2(3):197-204.

Perko, L. 1991. *Differential Equation and Dynamical System*. New York: Springer−Verlag Berlin Heidelberg.

Riberu, P. 2002. Pembelajaran Ekologi. *Jurnal Pendidikan Penabur*. 1:125-132.

Timuneno, H. M., R. H. Utomo., Widowati. 2008. Model Pertumbuhan Logistik dengan Waktu Tunda. *Jurnal Matematika*. 11(1):43-51.

Waluya, St. B. 2006. *Persamaan Diferensial*. Garaha Ilmu, Yogyakarta.