KARAKTERISTIK PENDUGA *LAGRANGE MULTIPLIER*
PADA MODEL REGRESI SPASIAL

(Skripsi)

Oleh

NITA VERANIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2021

ABSTRACT

CHARACTERISTICS *LAGRANGE MULTIPLIER* IN THE SPATIAL REGRESSION MODEL

By

NITA VERANIKA

Spatial regression is a regression based on the influence of place or spatial on the data being analyzed. Spatial regression solutions sometimes has limitations in fulfilling assumptions, especially assumptions regarding the problem of correlated errors and the problem of heterogenity in errors. This is because observations at other locations adjacent to the spatial effect. The parameter estimation method commonly used in estimating the parameters of the spatial regression model is the maximum likelihood estimation. In this study, method used to estimate the parameters of the spatial regression model with limited assumptions is the Lagrange Multiplier method. The Lagrange Multiplier method is a method to maximize or minimize a function with it's Lagrange Multiplier. This study aims to examine the characteristics of the Lagrange Multiplier estimator in the spatial regression model. Results based on the research that has been obtained that the estimator β is an unbiased estimator, the variance is minimum and consistent. While the estimator σ^2 and λ is a biased estimator.

Keyword: Spatial Regression, SEM, *Lagrange Multiplier* (LM), Estimator Characteristics.

ABSTRAK

KARAKTERISTIK PENDUGA *LAGRANGE MULTIPLIER* PADA MODEL REGRESI SPASIAL

Oleh

NITA VERANIKA

Regresi spasial merupakan regresi berdasarkan adanya pengaruh tempat atau spasial pada data yang di analisis. Penyelesaian regresi spasial kadang kala mengalami keterbatasan dalam pemenuhan asumsi, terutama asumsi yang berkenaan dengan masalah *error* yang berkorelasi dan masalah heterogenitas pada *error*. Hal itu yang diakibatkan karena pengamatan di suatu lokasi memiliki ketergantungan yang cukup kuat dengan pengamatan di lokasi lain yang berdekatan yang dinamakan dengan efek spasial. Metode pendugaan parameter yang biasa digunakan dalam menduga parameter model regresi spasial adalah *maximum likelihood estimation*. Dalam penelitian ini metode yang digunakan untuk menduga parameter model regresi spasial dengan keterbatasan memenuhi asumsi yaitu metode *Lagrange Multiplier*. Metode *Lagrange Multiplier* adalah metode untuk memaksimumkan atau meminimumkan fungsi dengan λ sebagai pengali *Lagrange* nya. Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji karakteristik penduga *Lagrange Multiplier* pada model regresi spasial. Berdasarkan hasil kajian teori yang telah diperoleh bahwa penduga β merupakan penduga yang tak bias, ragam minimum dan konsisten. Sedangkan penduga σ^2 dan λ merupakan penduga yang bias.

Kata Kunci: Regresi Spasial, SEM, *Lagrange* Multiplier (LM), Karakteristik Penduga.

KARAKTERISTIK PENDUGA *LAGRANGE MULTIPLIER* PADA MODEL REGRESI SPASIAL

Oleh

NITA VERANIKA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2021

Judul Skripsi : **KARAKTERISTIK PENDUGA *LAGRANGE MULTIPLIER* PADA MODEL REGRESI SPASIAL**

Nama Mahasiswa : **Nita Veranika**

Nomor Pokok Mahasiswa : **1717031087**

Jurusan : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Widiarti, S.Si., M.Si.
NIP 198005022005012003

Dian Kurniasari, S.Si., M.Sc.
NIP 196903051996032001

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 197403162005011001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Widiarti, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Dian Kurniasari, S.Si., M.Sc.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Amanto, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwon, S.Si., M.T
NIP 197407052000031001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **20 Agustus 2021**

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: Nita Veranika
Nomor Pokok Mahasiswa	: 1717031087
Jurusan	: Matematika

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi saya yang berjudul **"Karakteristik Penduga *Lagrange Multiplier* pada Model Regresi Spasial"** adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Semua hasil tulisan dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau telah dibuat orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 20 Agustus 2021
Yang menyatakan

Nita Veranika
NPM. 1717031087

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Nita Veranika lahir di Bandar Lampung, 25 Oktober 1999. Penulis merupakan anak kedua dari dua bersaudara, dari Bapak Busroni dan Ibu Rohana.

Penulis telah menempuh pendidikan Taman Kanak-kanak (TK) di Taman Kanak-kanak Madrasah Islamiah pada tahun 2004 – 2005, Sekolah Dasar Negeri (SDN) 1 Sukamaju Bandar Lampung pada tahun 2010 – 2011, Sekolah Menengah Pertama Negeri (SMPN) 6 Bandar Lampung pada tahun 2013 – 2014, dan Sekolah Menengah Atas Negeri (SMAN) 8 Bandar Lampung pada tahun 2016 – 2017.

Pada tahun 2017 penulis terdaftar sebagai mahasiswi S1 Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung (Unila) melalui jalur PMPAP (Program Penerimaan Mahasiswa Perluasan Akses Pendidikan). Selama menjadi mahasiswi penulis aktif dibeberapa organisasi yaitu Anggota Bidang Minat dan Bakat Himpuan Mahasiswa Jurusan Matematika (Himatika) dan Staf Departemen Sains dan Pengabdian Masyarakat pada tahun 2018, dan Staf DPM Universitas Lampung pada tahun 2019. Pada bulan Januari sampai dengan Februari 2020 penulis melaksanakan Praktik Kerja Lapangan (PKL) di Badan Pusat Statistik Provinsi Lampung guna mengaplikasikan serta menerapkan ilmu yang telah diperoleh selama perkuliahan. Selanjutnya pada bulan Juli sampai dengan Agustus 2020 penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Kelurahan Talang, Kecamatan Teluk Betung Selatan, Kota Bandar Lampung sebagai bentuk pengabdian masyarakat atau implementasi Tri Dharma Perguruan Tinggi poin ketiga.

KATA INSPIRASI

Allah tidak berjanji hidup ini mudah tetapi Allah berjanji
"Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan"
(QS. Al-Insyirah: 6)

Jika Allah menolongmu, maka tak ada orang yang dapat
mengalahkanmu
(Qs. Ali-Imran: 160)

Hiduplah seakan kamu akan mati esok dan belajarlah seolah
kamu akan hidup selamanya
(BJ. Habibie)

Satu-satunya sumber pengetahuan adalah pengalaman
(Albert Einstein)

PERSEMBAHAN

Dengan mengucap puji dan syukur kehadirat Allah SWT karena berkat rahmat dan hidayah-Nya akhirnya karya sederhana ini dapat diselesaikan. Semoga keberhasilan ini menjadi langkah awal untuk meraih cita-cita dan impianku, kupersembahkan sebuah karya sederhana ini kepada:

Ayah dan Ibu Tercinta

Yang tidak pernah lelah untuk selalu mendoakan, memberikan dukungan, nasehat dengan cita, kasih, dan sayang yang tidak mungkin terbalas oleh apapun.

Kakakku Tersayang

Yang telah memberi semangat dan doa yang tidak akan terbayarkan dengan oleh apapun

Sahabat-sahabatku

Yang selalu mendukung, mendoakan, dan mengingatkan dalam hal kebaikan serta menjadi tempat berbagi cerita selama perkuliahan

Almamater tercinta, Universitas Lampung

SANWACANA

Puji syukur kehadirat Allah SWT, atas karunia serta kemudahan yang diberikan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Skripsi yang berjudul "Karakteristik Penduga *Lagrange Multiplier* pada Model Regresi Spasial" adalah salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung. Terselesaikannya skripsi ini tidak terlepas atas bantuan serta dukungan berbagai pihak yang tiada hentinya membimbing dan memberi masukan kepada penulis. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Ibu Widiarti, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing I yang selalu bersedia memberikan waktu, arahan, bimbingan, saran serta dukungan dalam berbagai hal kepada penulis sehinga dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Ibu Dian Kurniasari, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing II yang telah memberikan waktu, arahan, bimbingan, dan dukungan kepada penulis.
3. Bapak Amanto, S.Si., M.Si. selaku Penguji yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis sehingga dapat lebih baik lagi.
4. Ibu Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing Akademik yang telah senantiasa meluangkan waktunya untuk membimbing, memotivasi dan mengarahkan penulis pada hal yang berkaitan dengan Akademik.
5. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Bapak Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwon, M.T. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

7. Seluruh dosen dan staff Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
8. Keluargaku tercinta, terutama Ibu dan Ayah yang menjadi motivasi terbesar dalam hidup, selalu mendukung dan mendoakan tiada hentinya apapun yang dicita-citakan untuk penulis.
9. Sahabat-sahabatku di kampus Epmi, Inas, Dewi, Atina, Yustika, Dhea, dan Indah atas tawa, canda, suka, duka, doa, semangat dan bantuan yang telah diberikan untuk penulis.
10. Sahabat-sahabatku Ulan, Beby, Tika, Eci, Mega, Nisa, Suci, dan Dita atas dukungan dan doa untuk penulis.
11. Teman-teman angkatan 2017 yang tidak dapat disebutkan satu-persatu.
12. Terima kasih untuk penulis yang sudah belajar berjuang, sabar, dan ikhlas atas semua yang telah dilalui dengan baik dan penuh semangat.
13. Semua pihak yang membantu dalam pengerjaan skripsi ini yang tidak dapat disebutkan satu-persatu.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun. Semoga skripsi ini dapat berguna dan bermanfaat bagi pembaca.

Bandar Lampung, 20 Agustus 2021
Penulis

Nita Veranika

DAFTAR ISI

Halaman

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

V. KESIMPULAN

DAFTAR PUSTAKA

DAFTAR TABEL

Tabel Halaman

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Regresi spasial merupakan regresi berdasarkan adanya pengaruh tempat atau spasial pada data yang di analisis. Penyelesaian regresi spasial sering kali mengalami keterbatasan dalam memenuhi asumsi, terutama asumsi yang berkenaan dengan masalah *error* yang berkorelasi dan masalah heterogenitas pada *error*. Hal itu diakibatkan karena pengamatan di suatu lokasi memiliki ketergantungan yang cukup kuat dengan pengamatan di lokasi lain yang berdekatan yang dinamakan dengan efek spasial. Efek spasial dibagi menjadi dua yaitu ketergantungan spasial dan keragaman spasial.

Salah satu ciri dalam model regresi spasial adalah adanya ketergantungan (dependensi) antar lokasi yang menyebabkan pendugaan parameter model bisa menjadi kompleks. Struktur dependensi ini umumnya dinyatakan dalam matriks pembobot spasial untuk menggambarkan hubungan antara suatu wilayah dengan wilayah yang lain. Matriks pembobot spasial dapat diperoleh berdasarkan informasi ketersinggungan antar wilayah dan jarak dari ketetanggaan atau jarak antara satu region dengan region yang lain. Sehingga, penentuan matriks pembobot merupakan komponen penting dalam pemodelan data spasial.

Metode penduga parameter yang dapat digunakan untuk menduga parameter model regresi spasial adalah *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Dalam penelitian Mariana (2013), metode MLE digunakan pada kondisi yang tidak memiliki masalah keterbatasan dalam memenuhi asumsinya. Kadang kala regresi spasial mengalami keterbatasan dalam pemenuhan asumsi. Metode yang digunakan untuk menduga parameter model regresi spasial dengan keterbatasan memenuhi asumsi yaitu metode *Lagrange Multiplier* (LM). *Lagrange Multiplier* adalah metode untuk memaksimumkan atau meminimumkan fungsi dengan λ sebagai pengali *Lagrange* nya. Metode ini juga dapat diperluas untuk menyelesaikan masalah yang melibatkan lebih dari satu kendala. Metode LM merupakan salah satu teknik dalam menyelesaikan masalah optimasi dengan kendala persamaan. Inti dari *Lagrange Multiplier* ini yaitu mengubah persoalan titik ekstrim terkendala menjadi persoalan titik bebas kendala menurut Joseph Louis Lagrange pada penelitian Manik, *et al*. (2018).

Karakteristik atau sifat-sifat penduga perlu dikaji guna melihat kualitas dari suatu penduga. Suatu penduga dikatakan penduga yang baik apabila memenuhi karakteristik atau sifat-sifat tertentu, yaitu tak bias dan ragam minimum. Suatu penduga dikatakan tak bias apabila nilai harapan sama dengan parameternya dan jika penduga tersebut bias ketika ukuran sampel semakin besar dan nilai harapan sama dengan parameternya maka dikatakan penduga tak bias asimtotik. Suatu penduga dikatakan efisien bagi parameternya jika penduga tersebut memiliki ragam yang kecil. Suatu penduga jika ukuran sampel semakin besar maka penduga akan mendekati parameternya dan jika ukuran sampel menjadi tak berhingga maka penduga akan sama dengan parameternya atau MSE dari penduga sama dengan nol itu dapat dikatakan konsisten bagi parameternya. Berdasarkan uraian tersebut, penulis akan mengkaji lebih lanjut tentang karakteristik penduga *Lagrange Multiplier* pada model regresi spasial.

1.1. Tujuan Penelitian

Tujuan dari penulisan penelitian ini adalah untuk mendapatkan penduga parameter model regresi spasial serta mengkaji karakteristik atau sifat penduganya.

1.2. Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah untuk menambah wawasan serta memberikan informasi tentang kualitas penduga *Lagrange Multiplier* pada model regresi spasial dari hasil kajian karakteristik penduga.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Regresi Spasial

Regresi spasial merupakan suatu analisis statistik yang mengevaluasi hubungan antara satu variabel dengan satu atau lebih variabel lain dengan memberikan efek spasial pada beberapa lokasi yang menjadi pusat pengamatan yang memungkinkan untuk menghitung ketergantungan antar pengamatan, yang sering muncul ketika pengamatan dikumpulkan dari titik-titik yang ada di dalam ruang (LeSage and Pace, 2009). Disebut dengan model regresi spasial jika model spasial melibatkan pengaruh spasial. Pengaruh spasial yaitu salah satunya ketergantungan spasial adanya unsur autokorelasi. Terbentuknya parameter spasial autoregresif dan *moving average* yaitu karena adanya unsur autokorelasi spasial, sehingga bentuk umum model regresi spasial yaitu sebagai berikut:

$$\text{y}= \rho W_1 y + X\beta + u \tag{2.1}$$

untuk

$$u = \lambda W_2 u + \varepsilon \tag{2.2}$$

dimana $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$

dengan:

$y_{(n\times 1)}$ = vektor peubah dependen

$X_{(n\times p)}$ = matriks yang berisi p peubah independen

$\beta_{(p\times 1)}$ = vektor koefisien parameter regresi

ρ = koefisien autoregresif spasial *lag* dependen

λ = koefisien autoregresif spasial *error* dependen

$u_{(n\times 1)}$ = vektor *error* yang diasumsikan mengandung autokorelasi

$W_{1(p\times 1)}$ = matriks bobot spasial peubah dependen

$W_{2(n\times p)}$ = matriks bobot spasial error

n = banyaknya pengamatan atau lokasi $(i = 1, 2, 3, \cdots, n)$

p = banyaknya parameter regresi

ε = vektor *error* yang diasumsikan tidak mengalami autokorelasi berukuran $n \times 1$

dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \;;\quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} ;\;\; \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} ;\;\; X = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & \cdots & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & \cdots & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & X_{ik} & \vdots \\ 1 & X_{n1} & \cdots & X_{nl} \end{bmatrix} \;;$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \\ \vdots \\ \beta_{il} \end{bmatrix} \;;\quad W_1 \text{ atau } W_2 = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2n} \\ \vdots & \vdots & w_{ij} & \vdots \\ w_{n1} & w_{n2} & \cdots & w_{nn} \end{bmatrix} \;;$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Model u mempunyai *error* yang berdistribusi normal dengan *mean* nol dan $\sigma^2 I$. Untuk k adalah banyaknya variabel prediktor $(k = 1, 2, 3, \cdots, l)$. Asumsi pada regresi spasial sama halnya dengan asumsi pada regresi klasik yaitu, kehomogenan, kenormalan, dan tidak ada autokorelasi pada galat.

Berdasarkan tipe datanya, pemodelan spasial dapat dijadikan menjadi pemodelan dengan pendekatan area dan pendekatan titik. Menurut LeSage (2011), beberapa model regresi spasial dengan pendekatan area yaitu *Spatial Autoregressive Models* (SAR), *Spatial Error Models* (SEM), *Spatial Durbin Models* (SDM), *Conditional Autoregressive Models* (CAR), dan *Spatial Autoregressive Moving Average* (SARMA).

2.1.1 Model Autoregresif Spasial (SAR)

Model autoregresif spasial adalah model regresi linier yang pada variabel responnya terdapat korelasi spasial. Model ini mengkombinasikan model regresi sederhana dengan model lag. Model autoregresif spasial terbentuk apabila $\rho \neq 0$ dan $\lambda = 0$. Bentuk umum persamaan model autoregresif spasial yaitu:

$$y = \rho W_1 y + X\beta + \varepsilon \tag{2.3}$$

$$\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$$

dari persamaan (2.3) diperoleh:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= y - \rho W_1 y - X\beta \\ &= (I - \rho W_1)y - X\beta \end{aligned} \tag{2.4}$$

dimana y adalah variabel respon X adalah matriks variabel penjelas, W adalah matriks pembobot spasial, dan ρ adalah koefisien prediktor model spasial lag. Sehingga model ini mengasumsikan bahwa proses *autoregressive* hanya pada variabel dependen dengan menggunakan data *cross section* (Anselin, 1988).

2.1.2 Model Galat Spasial (SEM)

Menurut Anselin (1988), model galat spasial adalah model spasial *error* dimana pada *error* terdapat korelasi spasial. Jika nilai $\rho = 0$ dan $\lambda \neq 0$ maka model tersebut adalah model SEM.

Bentuk umum model SEM ditunjukkan dengan persamaan berikut:

$$y = X\beta + u \tag{2.5}$$

$$u = \lambda W_u + \varepsilon \tag{2.6}$$

$$\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$$

dari persamaan (2.5) dan (2.6) diperoleh:

$$\varepsilon = (I - \lambda W)(y - X\beta) \tag{2.7}$$

2.2 Indeks Moran

Indeks moran merupakan nilai statistik uji yang digunakan untuk melakukan pengujian terhadap nilai autokorelasi spasial. Nilai indeks moran berada pada selang antara -1 dan 1 (-1 menunjukkan autokorelasi negatif sempurna dan 1 menunjukkan autokorelasi positif sempurna). Hipotesis yang digunakan adalah sebagai berikut:

$H_0: I = 0$ (tidak ada autokorelasi antar lokasi)

$H_1: I \neq 0$ (ada autokorelasi antar lokasi)

Statistik uji indeks moran menurut Bivand, *et al*. (2008) adalah:

$$Z(I)\,\frac{I-E(I)}{\sqrt{Var(I)}} \sim N(0,1)$$

Nilai statistik uji dimna Z(I) mengikuti sebaran normal, yang artinya akan tolak H_0 apabila $|Z(I)| > Z_{\alpha/2}$.

2.3 Efek Spasial

Efek spasial dapat dibedakan menjadi dua yaitu keragaman spasial (*spatial heterogenity*) dan ketergantungan spasial (*spatial dependence*). Keragaman spasial terjadi akibat adanya perbedaan antara satu wilayah dengan wilayah lainnya. Sedangkan ketergantungan spasial terjadi akibat adanya ketergantungan dalam spasial.

2.3.1 Ketergantungan Spasial (*Spatial Dependence*)

Anselin (1988) menyatakan bahwa ketergantungan spasial merupakan adanya hubungan fungsional apa yang terjadi pada suatu titik dalam ruang dan apa yang terjadi di tempat lain. Anselin (1988) menyatakan bahwa uji untuk mengetahui ketergantungan spasial adalah dengan menggunakan uji *Lagrange Multiplier*.

Uji ini dilakukan untuk memilih model regresi spasial yang tepat, dengan menggunakan ketergantungan lag spasial, ketergantungan galat spasial, atau keduanya. Pengujian hipotesis yang digunakan yaitu:

a. *Lagrange Multiplier Lag*

Hipotesis:

H_0: $\rho = 0$ (tidak ada ketergantungan spasial pada variabel respon)

H_1: $\rho \neq 0$ (ada ketergantungan spasial pada variabel respon)

Statistik uji:

$$LM_\rho = \frac{[e'WY/(ee'/n)]^2}{D} \tag{2.8}$$

dimana

$$D = \left[\frac{(WX\beta)'\left(I - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right)(WX\beta)}{\sigma^2}\right] + tr(W'W + WW) \tag{2.9}$$

Keputusan:

Tolak H_0 jika nilai $LM_\rho > \chi^2_{\alpha(p)}$ tabel, dengan p adalah banyaknya parameter spasial. Sehingga model yang dibuat adalah model autoregresif spasial (SAR).

b. *Lagrange Multiplier Error*

Hipotesis:

H_0: $\lambda = 0$ (tidak ada ketergantungan spasial pada galat)

H_1: $\lambda \neq 0$ (ada ketergantungan spasial pada galat)

Statistik uji:

$$LM_\lambda = \frac{[e'WY/(ee'/n)]^2}{tr(W'W + WW)} \tag{2.10}$$

Keputusan:

Tolak H_0 jika nilai $LM_\rho > \chi^2_{\alpha(p)}$ tabel, dengan p adalah banyaknya parameter spasial. Sehingga model yang dibuat adalah model galat spasial (SEM).

2.3.2 Keragaman Spasial (*Spatial Heterogenity*)

Menurut Kosfeld (2006), keragaman spasial diekspresikan dalam bentuk homogenitas dimana varians *error* bervariasi antar ruang. Untuk mengetahui keheterogenan ragam spasial yaitu menggunakan uji Breusch-Pagan (BP). Bentuk umum keragaman spasial sebagai berikut:

$$E(\varepsilon_i^2 \middle| X) = \alpha_1 X_{1i} + \alpha_1 X_{2i} + \cdots + \alpha_p X_{pi} \quad (2.11)$$

Pengujian hipotesis yang digunakan adalah sebagai berikut:

H_0: $\sigma_i^2 = \alpha_i$ (terdapat homogenitas spasial)

H_1: $\sigma_i^2 \neq \alpha_i$ (terdapat heterogenitas spasial)

Adapun statistik uji Breusch-Pagan yaitu:

$$BP = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i f_i\right)'\left(\sum_{i=1}^{n} X_i X_i{}'\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i f_i\right) \quad (2.12)$$

Uji statistik BP mengikuti sebaran $\chi^2_{\alpha(P-1)}$ dengan p banyak parameter regresi. Keputusan tolak H_0 jika nilai $BP > \chi^2_{\alpha(P-1)}$.

2.4 Matriks Pembobot

Matriks pembobot spasial merupakan matriks ketergantungan spasial. Matriks ketergantungan spasial adalah matriks yang menggambarkan hubungan antar daerah. Matriks pembobot spasial W_{ij} yang berukuran $n \times n$ dapat diperoleh berdasarkan jarak dari ketetanggaan (*neighbourhood*), dengan kata lain jarak antara satu wilayah dengan wilayah lainnya.

Matriks pembobot mempunyai aturan yaitu, nilai c_{ij} merupakan nilai dalam matriks pembobot baris ke-i dan kolom ke-j. Nilai 1 diberikan jika wilayah ke-i bersebelahan dengan wilayah ke-j, begitu pun sebaliknya jika wilayah ke-i tidak bersebelahan dengan wilayah ke-j maka diberikan nilai 0. Diagonal utama pada matriks pembobot bernilai nol karena matriks pembobot menunjukkan hubungan antar semua wilayah.

Jenis-jenis matriks pembobot spasial yang digunakan yaitu:

1. Persinggungan sisi (*Rook Contiguity*)

Rook Contiguity menentukan daerah pengamatan berdasarkan sisi-sisi yang saling bersinggungan dan sudut tidak diperhitungkan.

2. Persingggungan sudut (*Bishop Contiguity*)

Bishop Contiguity menentukan daerah pengamatan berdasarkan sudut-sudut yang saling bersinggungan dan sisi tidak diperhitungkan.

3. Persinggungan sisi-sudut (*Queen Contiguity*)

Queen Contiguity menentukan daerah pengamatan berdasarkan sisi-sisi yang saling bersinggungan dan sudut juga diperhitungkan.

2.5 *Lagrange Multiplier* (LM)

Dalam menyelesaikan permasalahan optimasi terdapat dua kondisi yaitu dengan kendala dan tanpa kendala. Suatu kasus optimasi jika fungsi tujuan dan kendalanya mempunyai bentuk nonlinier pada salah satu atau keduanya disebut optimasi nonlinier. Salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan masalah optimasi dengan kendala adalah metode *Lagrange Multiplier* atau pengali *lagrange.*

Untuk optimasi multivaribel dengan kendala persamaan, maka teknik optimasi yang dapat dilakukan adalah dengan menggunakan metode *Lagrange Muliplier*. Pada permasalahan dengan dua variabel dan satu kendala dapat dimisalkan:

Meminimumkan $$f = f(X) \tag{2.13}$$

Kendala $$g_j(X) = 0 \tag{2.14}$$

Metode *Lagrange Multiplier* merupakan suatu metode yang digunakan untuk menyelesaikan fungsi objektif dari suatu permasalahan yang langsung dikaitkan dengan fungsi kendalanya. Fungsi yang terbentuk dari mentransformasi persoalan tersebut yaitu fungsi Lagrange yang didefinisikan sebagai:

$$L(X, \lambda) = f(X) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \, g_j(X) \tag{2.15}$$

dimana:

$L(x, \lambda)$ = Fungsi lagrange

$f(x)$ = Fungsi tujuan

λ_j = Penggali lagrange

$g_j(x)$ = Fungsi kendala

Fungsi tujuan: merepresentasikan tujuan yang ingin dicapai dalam kasus optimasi.

Fungsi kendala: merepresentasikan kondisi yang membatasi.

Pengali Lagrange: ukuran sensitivitas dari L terhadap perubahan dari kendala.

Teorema 2.5.1

Syarat perlu bagi sebuah fungsi $f(X)$ dengan kendala $g_j(X) = 0$, dengan $j = 1,\ 2, 3, \cdots, m$ agar mempunyai minimum relatif pada titik X^* adalah turunan parsial pertama dari fungsi lagrangenya terhadap setiap argumennya mempunyai nilai nol.

Teorema 2.5.2

Syarat harus bagi sebuah fungsi $f(X)$ agar mempunyai minimum atau maksimum relatif pada titik X^* adalah jika fungsi kuadrat Q yang didefinisikan sebagai berikut:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}\ dx_i dx_j \qquad (2.16)$$

dievaluasi pada $X = X^*$ harus definit positif atau negatif untuk setiap nilai dX yang memenuhi semua kendala (Luknanto, 2000).

Syarat agar persamaan (2.16) dapat menjadi definit positif atau negatif untuk setiap variasi nilai dX adalah didapat dari determinan matriks Hessian yaitu didefinisikan H matriks persegi $(n \times n)$ maka untuk menentukan kedefinitan suatu matriks adalah sebagai berikut:

H disebut Definit positif jika dan hanya jika det $(H_i) > 0$ $\quad i = 1,2, \cdots, n$

H disebut Definit positif jika dan hanya jika $(-1)'$ det $(H_i) > 0$ $\quad i = 1,2, \cdots, n$

H disebut Semi Definit positif jika dan hanya jika det $(H_i) \geq 0$ $\quad i = 1,2, \cdots, n$

H disebut Semi Definit positif jika dan hanya jika $(-1)'$ det $(H_i) \leq 0$ $\quad i = 1,2, \cdots, n$

$$|H1| = \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_1};\ |H2| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial L}{\partial x_2 \partial x_2} \end{vmatrix};\ |H3| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_3} \end{vmatrix}$$

Jika $|H1| < 0$, $|H2| > 0$, dan $|H3| < 0$, maka Hessian tersebut definit negatif, merupakan syarat cukup untuk ekstream maksimum. Jadi, fungsi tersebut memilki ekstrim maksimum.

Jika $|H1| > 0$, $|H2| > 0$, dan $|H3| > 0$, maka Hessian tersebut definit positif, merupakan syarat cukup untuk ekstream minimum. Jadi, fungsi tersebut memilki ekstrim minimum.

Lagrange Multiplier memiliki arti secara fisik, jika diberikan fungsi tujuan $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ dengan kendala $g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = b$ maka fungsi Lagrangenya adalah sebagai berikut:

$$L = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \lambda[b - g(x_1, x_2, \cdots, x_n)] \quad (2.17)$$

syarat perlu untuk penyelesaian diatas adalah

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \text{ untuk } i = 1,2,\cdots,n \text{ dan } \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \quad (2.18)$$

dari persamaan (2.19) didapat:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0 \text{ untuk } i = 1,2,\cdots,n \text{ dan } b - g(x) = 0 \text{ atau } b = g(x) \quad (2.19)$$

Persamaan (2.19) menghasilkan:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i - \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i$$

$$\Leftrightarrow df = \lambda db$$

Maka dapat disimpulkan bahwa pada penyelesaian optimum, perubahan fungsi tujuan f berbanding lurus dengan perubahan kendala b dengan faktor sebesar *Lagrange Multiplier* λ.

2.6 Newton-Raphson

Metode *Newton Raphson* adalah metode untuk menyelesaikan persamaan non linier secara iteratif mencari lokasi yang memaksimalkan atau meminimumkan suatu fungsi. Ada pendekatan dalam menurunkan rumus metode *Newton Raphson* yaitu dengan deret taylor, dasar metode ini adalah pendekatan deret taylor yaitu sebagai berikut:

$$f(\theta^{t+1}) = f(\theta^t) + \sum_{i=1}^{p} \frac{1\partial^i f(\theta^t)}{i!\,\partial(\theta^t)^i}(\theta^{t+1} - \theta^t)$$

bila pada suku orde-I maka:

$$f(\theta^{t+1}) = f(\theta^t) + (\theta^{t+1} - \theta^t)f'(\theta^t)$$

karena persoalan mencari akar, maka $f(\theta^{t+1}) = 0$ sehingga

$$0 = \ f(\theta^t) + (\theta^{t+1} - \theta^t)f'(\theta^t)$$

$$\theta^{t+1} = \theta^t - \ \frac{f(\theta^t)}{f'(\theta^t)}$$

metode ini dapat diperluas untuk menyelesaikan sistem persamaan dengan lebih satu parameter. Misal $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_p$ maka iterasinya sebagai berikut:

$$\theta^{t+1} = \theta^t - (H^t)^{-1}G^t$$

dengan indeks t menyatakan ukuran iteratif. Untuk G, θ^{t+1} dan θ^t dalam bentuk vektor, dan H dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\theta^{t+1} = \begin{bmatrix} \theta_1^{t+1} \\ \vdots \\ \theta_k^{t+1} \end{bmatrix} \text{ dan } \theta^t = \begin{bmatrix} \theta_1^t \\ \vdots \\ \theta_k^t \end{bmatrix} \text{ H}= \frac{\partial^2 \ln \mathrm{L}(\theta)}{\partial\theta\partial\theta'} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial(\theta_1)^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta_1\partial\theta_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial(\theta_k)^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial(\theta_k)^2} \end{bmatrix}$$

$$\text{G}= \frac{\partial \ \ln \mathrm{L}(\theta)}{\partial\theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ln \mathrm{L}(\theta)}{d\theta_1} \\ \frac{\partial \ln \mathrm{L}(\theta)}{d\theta_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \ln \mathrm{L}(\theta)}{d\theta_k} \end{bmatrix}$$

2.7 Sifat-Sifat Matriks Idempoten

Matriks idempoten adalah sebuah matriks yang tidak berubah nilainya ketika dikalikan dengan dirinya sendiri.

Teorema 1
Misalkan A adalah matriks idempoten berukuran $n \times n$. Maka, untuk sebarang matriks *non*-singular B berukuran $n \times n$, maka $B^{-1}AB$ adalah idempoten.
Teorema 2
Jika A adalah matriks idempoten yang simetris, maka $I - 2A$ adalah matriks ortogonal.
Teorema 3
Misalkan A dan B matriks simetris yang idempoten. Jika $C(A) = C(B)$, maka $A = B$.

2.8 Karakteristik Penduga

Untuk mendapatkan penduga yang baik maka ada syarat-syarat yang harus dipenuhi dalam suatu penduga antara lain yaitu:

2.8.1 Tak bias

Suatu penduga $U(X) = U(X_1,\ X_{2,}\ \cdots\ ,\ X_1)$ dikatakan tak bias bagi $g(\theta)$ bila

$$E\big(U(X)\big) = g(\theta) \tag{2.20}$$

Untuk semua $\theta \in \Omega$.
Jika $U(X)$ merupakan penduga yang bias maka didefinisikan

$$E\big(U(X)\big) - g(\theta) = Bias \tag{2.21}$$

Jika penduga tersebut bias namun ketika ukuran sampel tak berhingga dan nilai harapannya sama dengan parameternya maka penduga tersebut dikatakan penduga tak bias asimtotik. Dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\lim_{n\to\infty} E\big(U(X)\big) = g(\theta) \qquad (2.22)$$

dengan n yaitu jumlah ukuran sampel (Montgomery and Runger, 2014)

2.8.2 Efisien (Ragam Minimum)

Suatu penduga dikatakan penduga yang baik jika selain memiliki sifat tak bias, juga memiliki sifat ragam minimum.

Definisi 2.12.2

Misalkan $U(X)$ adalah penduga tak bias bagi $g(\theta)$, maka penduga $U(X)$ dikatakan efisien jika dan hanya jika varians dari penduga $U(X)$ mencapai batas bawah Rao-Cramer:

$$Var\big(U(X)\big) \geq \frac{1}{n\, I(\theta)} \qquad (2.23)$$

dimana $\frac{1}{n\, I(\theta)}$ adalah batas bawah Rao-Cramer dan $I(\theta)$ adalah informasi Fisher dengan persamaannya sebagai berikut (Hogg and Craig, 1995):

$$I(\theta) = E\left\{\left[\frac{\partial ln f(x;\theta)}{\partial\theta}\right]^2\right\} \qquad (2.24)$$

atau

$$I(\theta) = -E\left\{\frac{\partial^2 ln f(x;\theta)}{\partial\theta^2}\right\} \qquad (2.25)$$

2.8.3 Konsisten

Sifat lain yang harus dimiliki suatu penduga yaitu salah satunya sifat kekonsistenan dari penduga tersebut. Suatu penduga dikatakan konsisten bagi parameter jika penduga tersebut konvergen dalam peluang menduga $g(\theta)$ atau ukuran sampel semakin besar maka penduga akan mendekati parameternya.

Apabila besarnya sampel menjadi tak berhingga maka penduga akan sama dengan parameternya atau *Mean Square Error* (MSE) penduganya sama dengan nol, didefinisikan sebagai berikut:

$$\lim_{n\to\infty} E((U(X) - g(\theta))^2 = 0 \qquad (2.26)$$

untuk n menuju tak hingga dan untuk semua $\theta \epsilon \Omega$ (Sahoo, 2008).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada semester ganjil tahun ajaran 2020/2021 bertempat di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Data Penelitian

Data yang digunakan pada penelitian ini adalah data sekunder yang diperoleh dari *website* Badan Pusat Statistik (BPS) Provinsi Lampung tahun 2019. Data yang digunakan adalah persentase penduduk miskin tiap kabupaten/kota sebagai variabel dependen dan ke empat variabel independen yaitu harapan lama sekolah (X_1) tiap kabupaten/kota, persentase penduduk (X_2) tiap kabupaten/kota, indeks keparahan kemiskinan (X_3) tiap kabupaten/kota, keluhan kesehatan (X_4) tiap kabupaten/kota.

3.3 Metode Penelitian

Dalam penelitian ini akan dikaji karakteristik penduga *Lagrange Multiplier* yang diterapkan pada model Regresi Spasial. Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini yaitu sebagai berikut:

1. Menentukan fungsi tujuan dan fungsi kendala dari model Regresi Spasial.
2. Menduga parameter $(\beta, \lambda, \sigma^2)$ pada model Regresi Spasial dengan menggunakan metode *Lagrange Multiplier*.
3. Memeriksa karakteristik penduga parameter pada model Regresi Spasial dengan *Lagrange Multiplier*.
4. Melakukan analisis regresi spasial dengan bantuan *software* R yaitu menguji nilai autokorelasi spasial terhadap data menggunakan nilai indeks Moran.
5. Menguji asumsi yaitu normalitas (*Kolmogorov-Smirnov)* dan tidak terjadi multikolinearitas.
6. Memeriksa efek kehomogenanan ragam spasial menggunakan uji *Breusch-Pagan*.
7. Memeriksa efek ketergantungan spasial menggunakan uji *Lagrange Multiplier*.
8. Melakukan pendugaan parameter model regresi yang terpilih (model SEM) dengan metode *Lagrange Multiplier* sebagai penduga parameternya.
9. Melihat nilai koefisien determinasi R^2 dari model regresi spasial.

V. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa:

1. penduga parameter β dengan metode *Lagrange Multiplier* yaitu:
   $\hat{\beta} = (X'X + \lambda(I - \lambda W_2)'X'(I - \lambda W_2)X)^{-1}(X'y + \lambda\,(I - \lambda W_2)'X'(I - \lambda W_2)y)$
   penduga β pada model regresi spasial merupakan penduga yang tak bias bagi β karena nilai harapannya sama dengan parameternya, penduga β memilki ragam yang minimum atau efisien dan juga konsisten. Jadi untuk $\hat{\beta}$ dengan metode *Lagrange Multiplier* merupakan penduga yang tak bias terbaik.
2. penduga parameter σ^2 dengan metode *Lagrange Multiplier* adalah:
   $$\widehat{\sigma^2} = \frac{((y - X\beta)'(y - X\beta)) + \lambda\left(\left((y - X\beta)P\right)'\left((y - X\beta)P\right)\right)}{(\lambda n + n)}$$
   Karena nilai harapan σ^2 tidak sama dengan parameter itu sendiri maka penduga σ^2 pada model regresi spasial merupakan penduga yang bias.
3. penduga parameter λ dengan metode *Lagrange Multiplier* adalah:
   $$\hat{\hat{P}} = -\pi n - 2n\,(P'y'y - P'y'X\beta - P'X'\beta'y - P'X'\beta'X\beta)^{-1}$$
   Karena nilai harapan dari $\hat{P}$ tidak sama dengan parameter itu sendiri maka penduga $\hat{P}$ pada model regresi spasial ini merupakan penduga yang bias.

DAFTAR PUSTAKA

Anselin, L. 1988. *Spatial Economic: Methods and Models.* Dordrech: Kluwer Academics Publisher, Netherlands.

Badan Pusat Statistik. 2019. Persentase Penduduk Miskin Tahun 2019. Lampung. www.lampung.bps.go.id. Diakses pada hari Senin 8 Desember 2020 pukul 19.56 WIB.

Badan Pusat Statistik. 2019. Data dan Informasi Tenaga Kerja Kabupaten/Kota Tahun 2019. Lampung. www.lampung.bps.go.id. Diakses pada hari Selasa 21 Desember 2020 pukul 19.37 WIB.

Bivand,R.S., Rubio,V.G., and Pebesma, E.J. 2008. *Applied Spatial Data Analysis with R.* New York.

Hoog, V.R., and Craig, T.A. 1995. *Introduction of Mthematical Statistic Fifth Edition.* New Jersey, The United States of America.

Kosfeld, R. 2006. *Spatial Economic.* University of Kassel, Economics Departement.

LeSage, JP., and Pace, R.K. 2009. *Introduction to Spatial Economics.* Texas State University CRS Press, San Marcos.

LeSage, JP. 2011. *Pitfalls In Higher Order Model Extentions of Basic Spatial Regression, Metodology.* Texas State University San Marcos, Departement of Finance and Economics.

Luknanto, D. 2000. Pengantar Optimasi Nonlinier. Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.

Mariana. 2013. Pendekatan Regresi Spasial dalam Pemodelan Tingkat Pengangguran Terbuka. Jurnal Matematika dan Pembelajarannya. **1**(1): 2303-099

Montgomery, D.C. and Runger, G.C. 2014. *Applied Statistic and Probability for Engineers Sixth Edition*. John Wiley and Sons, USA.

Sahoo, P. 2008. *Probability and Mathematical Statistic*. Departemen of Mathematics University of Louisville, Louisville.