PEMODELAN SPATIAL AUTOREGRESSIVE (SAR) MENGGUNAKAN INTEGRATED NESTED LAPLACE APPROXIMATION (INLA)

(Skripsi)

Oleh

EKA ADITYA FITRIANI

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2021

ABSTRACT

MODELING SPATIAL AUTOREGRESSIVE (SAR) WITH INTEGRATED NESTED LAPLACE APPROXIMATION (INLA)

By

EKA ADITYA FITRIANI

Spatial Autoregressive (SAR) is one of the methods of spatial or regional analysis that has a spatial influence on the dependent variable. One of the methods used in estimating SAR parameters is the Bayes method which provides conjecture with higher accuracy compared to the classical method. The estimation of the Bayes parameter by numerical is by the *Integrated Nested Laplace Approximation* (INLA) method through the posterior marginal. The application of the SAR method using INLA is modeling the Human Development Index (IPM) in Lampung Province in 2020 by using the most optimum weighting matrix based on the largest *Moran's I* value of K-NN 2. This study aims to find out the factors that affect HDI in Lampung Province. The factors used in this study are per capita expenditure, percentage of poor people, average length of the school, number of health workers, and school participation rate of 16-18 years old. The modeling results obtained the most significant factors to the model, namely per capita expenditure and the average length of school with an R-Square value of 88,74788%.

Keyword: Spatial, SAR, Bayesian, INLA, K-NN, IPM

ABSTRAK

PEMODELAN SPATIAL AUTOREGRESSIVE (SAR) MENGGUNAKAN INTEGRATED NESTED LAPLACE APPROXIMATION (INLA)

Oleh

EKA ADITYA FITRIANI

Spatial Autoregresive (SAR) merupakan salah satu metode analisis spasial atau kewilayahan yang terdapat pengaruh spasial pada variabel terikatnya. Salah satu metode yang digunakan pada pendugaan parameter SAR adalah dengan metode Bayes yang memberikan dugaan dengan ketepatan lebih tinggi dibandingkan dengan metode klasik. Pendugaan parameter Bayes dengan cara numerik adalah dengan metode *Integrated Nested Laplace Approximation* (INLA) melalui posterior marginal. Penerapan metode SAR menggunakan INLA yaitu memodelkan Indeks Pembangunan Manusia (IPM) di Provinsi Lampung tahun 2020 dengan menggunakan matriks pembobot paling optimum berdasarkan nilai *Moran's I* terbesar yaitu K-NN 2. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui faktor-faktor yang mempengaruhi IPM di Provinsi Lampung. Faktor yang digunakan dalam penelitian ini yaitu pengeluaran perkapita, persentase penduduk miskin, rata-rata lama sekolah, jumlah tenaga kesehatan, dan angka partisipasi sekolah usia 16-18 tahun. Hasil pemodelan mendapatkan faktor yang paling signifikan terhadap model yaitu pengeluaran perkapita dan rata-rata lama sekolah dengan nilai *R-Square* sebesar 88,74788%.

Kata Kunci: Spasial, SAR, Bayes, INLA, K-NN, IPM.

PEMODELAN SPATIAL AUTOREGRESSIVE (SAR) MENGGUNAKAN INTEGRATED NESTED LAPLACE APPROXIMATION (INLA)

Oleh

EKA ADITYA FITRIANI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2021

Judul Skripsi : **PEMODELAN *SPATIAL AUTOREGRESSIVE* (SAR) MENGGUNAKAN *INTEGRATED NESTED LAPLACE APPROXIMATION* (INLA)**

Nama Mahasiswa : Eka Aditya Fitriani

Nomor Pokok Mahasiswa : 1717031020

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Widiarti, S.Si., M.Si.
NIP. 19800502 200501 2 003

Dian Kurniasari, S.Si., M.Sc.
NIP. 19690305 199603 2 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Widiarti, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Dian Kurniasari, S.Si., M.Sc.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Prof. Drs. Mustofa Usman, M.A., Ph.D.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, S.Si., M.T.
NIP. 19740705 200003 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **10 Agustus 2021**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: **EKA ADITYA FITRIANI**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1717031020**
Jurusan	: **Matematika**
Judul	: **PEMODELAN *SPATIAL AUTOREGRESSIVE* (SAR) MENGGUNAKAN *INTEGRATED NESTED LAPLACE APPROXIMATION* (INLA)**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan semua tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah karya penulisan ilmiah Universitas Lampung. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, Agustus 2021

Yang Menyatakan,

SEPULUH RIBU RUPIAH 10000 METERAI TEMPEL 155D6AJX443814373

Eka Aditya Fitriani
NPM. 1717031020

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Eka Aditya Fitriani lahir di Purbalingga pada tanggal 26 November 1999. Penulis merupakan anak pertama dari dua bersaudara oleh pasangan Bapak Hadiman dan Ibu Aisyah.

Penulis memulai pendidikannya di TK Diponogoro Kabupaten Purbalingga Jawa Tengah pada tahun 2004-2005. Penulis menempuh pendidikan tingkat dasar di SD Negeri 1 Durian Payung pada tahun 2005-2011. Pada tahun 2011 penulis melanjutkan ke pendidikan tingkat menengah pertama di SMP Negeri 25 Bandar Lampung pada tahun 2011-2014, kemudian penulis melanjutkan pendidikan tingkah menengah atas di SMA Negeri 1 Bandar Lampung pada tahun 2014-2017. Pada tahun 2017, penulis diterima sebagai mahasiswi di jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SNMPTN).

Penulis menjadi anggota Biro Kesekretariatan Himpunan Mahasiswa Matematika (Himatika) pada tahun 2018. Sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu di dunia kerja, penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Badan Kependudukan dan Keluarga Berencana (BKKBN) Daerah Provinsi Lampung pada bulan Januari- Februari tahun 2020, serta pada tahun yang sama di Bulan Juli-Agustus penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) Mandiri Putra Daerah periode kedua di

Kelurahan Durian Payung, Kecamatan Tanjung Karang Pusat, Kota Bandar Lampung.

PERSEMBAHAN

Bismillahirrohmanirrohim

Alhamdulillah, puji Syukur kehadirat Allah SWT yang maha pengasih lagi maha penyayang karena atas izin-Nya terselesaikan skripsi ini. Penulis mempersembahkan skripsi ini kepada:

Orang Tua Tercinta

Orang Tuaku Bapak Hadiman dan Ibu Aisyah yang selalu memberikan dukungan, bimbingan, doa, dan kasih sayang yang tiada batas.

.

Adik Tersayang

Adikku Nafisa Dwi Kartika yang mendukung, memberikan keceriaan, dan mendoakan.

Dosen

Seluruh dosen-dosen Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam yang telah memberikan bimbingan, motivasi, dan ilmu yang sangat bermanfaat.

Keluarga dan Sahabat Terbaik

Seluruh Keluarga, saudara,dan juga sahabat yang memberikan kebahagiaan dan memberikan banyak motivasi.

Almamater Tercinta Universitas Lampung

KATA INSPIRASI

“Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan”

(Qur’an Surat Al-Insyirah ayat 5)

“Dan barangsiapa yang bertaqwa kepada Allah, niscaya Allah menjadikan baginya kemudahan dalam urusannya.”

(Qur’an Surat At-Talaq ayat 4)

“Many of life’s failures are people who did not realize how close they were to success when they gave up”

(Thomas A. Edison)

SANWACANA

Puji Syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT, yang telah memberikan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Pemodelan *Spatial Autoregressive* (SAR) Menggunakan *Integrated Nested Laplace Approximation* (INLA)".

Selesainya skripsi ini adalah berkat motivasi, arahan, dan dukungan banyak pihak. Untuk itu, dengan segala kerendahan hati penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar besarnya kepada :

1. Ibu Widiarti, S.Si., M.Si., selaku dosen pembimbing utama yang telah banyak memberikan bimbingan dan arahan, memberikan evaluasi dan saran yang membangun dalam proses penyusuan skripsi ini.
2. Ibu Dian Kurniasari, S.Si., M.Sc., selaku dosen pembimbing kedua dan pembimbing akademik yang telah banyak membantu memberikan bimbingan, saran dan nasehat selama proses penyusunan skripsi dan selama proses perkuliahan.
3. Bapak Prof. Drs. Mustofa Usman, M.A., Ph. D., selaku dosen penguji atas kritik dan saran yang membangun guna penyempurnaan skripsi ini.
4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Bapak Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, M.T., selaku dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Seluruh dosen, staf, dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang telah memberikan banyak ilmu pengetahuan dan bantuan kepada penulis.
8. Keluarga ku, terutama kedua orang tuaku serta adikku yang selalu memberikan dukungan, semangat, dan doa

9. Sahabat-sahabatku Safira, Sari, Nimas, Cindy, dan Uli yang selalu menyemangati, memberikan dukungan dan motivasi kepada penulis.
10. Sahabat-sahabatku di kampus, Anggitha, Annisa, Dela, Wenty, Tresya, Fani, Hesty dan Lina yang selalu memberikan dukungan dan motivasi kepada peneliti selama masa perkuliahan.
11. Seluruh mahasiswa seperjuangan Matematika 2017 atas segalanya selama masa perkuliahan hingga akhir .
12. Pihak-pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu yang telah banyak membantu dan memberi masukan serta inspirasi bagi penulis.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih banyak kekurangan. Oleh karena itu penulis mengharapkan saran dan kritik yang membangun guna penelitian selanjutnya.

Bandar Lampung, Agustus 2021

Penulis

Eka Aditya Fitriani

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Halaman

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Analisis regresi merupakan salah satu teknik analisis data dalam statistika yang dapat menjelaskan dan mengevaluasi hubungan antara suatu variabel respon dengan satu atau lebih variabel prediktor (Kutner, *et al*., 2004). Analisis regresi digunakan jika peubah respon merupakan data berskala kontinu dan berdistribusi normal. Pengembangan metode regresi yang didasarkan adanya pengaruh tempat atau spasial pada data yang dianalisis adalah regresi spasial. Regresi spasial merupakan metode yang memungkinkan untuk menghitung ketergantungan antar pengamatan yang sering muncul ketika pengamatan dikumpulkan dari titik-titik yang ada di dalam ruang (LeSage and Pace, 2009).

Salah satu ciri khas dalam model regresi spasial yaitu adanya dependensi (ketergantungan) antar lokasi yang menyebabkan pendugaan model bisa menjadi lebih kompleks. Pengaruh dependensi spasial digambarkan dengan adanya kemiripan sifat dari lokasi yang saling memiliki sifat ketetanggaan. Struktur dependensi ini umumnya dinyatakan dalam matriks pembobot spasial untuk menggambarkan hubungan antara suatu wilayah dengan wilayah yang lain. Matriks pembobot spasial dapat diperoleh berdasarkan informasi ketersinggungan antar wilayah dan jarak dari ketetanggaan (*neighborhood*) atau jarak antara satu region dengan region yang lain. Sehingga, penentuan matriks pembobot merupakan komponen penting dalam pemodelan data spasial. Penelitian yang dilakukan Jaya, dkk.(2017), menemukan bahwa penggunaan metode *K-Nearest Neighbor* (K-NN) dalam memilih matriks pembobot spasial yang paling optimum dengan nilai *Moran's I* terbesar memberikan hasil akhir yang baik.

Menurut Anselin (1988), spasial memiliki pengaruh yang terjadi antar wilayah yaitu keragaman spasial dan dependensi spasial. Pengaruh keragaman spasial terjadi karena adanya perbedaan pengaruh peubah penjelas terhadap respon antara satu wilayah dengan wilayah lain. Pengaruh dependensi spasial terjadi akibat adanya hubungan fungsional antara kejadian pada suatu wilayah pengamatan dengan kejadian pada suatu pengamatan lain. Pengaruh dependasi spasial yang terjadi karena ketergantungan lag dapat dimodelkan dengan *Spatial Autoregressive* (SAR), pengaruh ketergantungan *error* spasial dapat dimodelkan dengan *Spatial Error Model* (SEM), dan pengaruh ketergantungan lag dan *error* dapat dimodelkan dengan *Spatial Autoregressive Moving Average* (SARMA). Model SAR merupakan satu model spasial ekonometrik yang paling banyak digunakan dan memiliki hasil yang paling baik dibandingkan dengan metode spasial lainnya. Penelitian yang dilakukan oleh Khikmah dan Novitasari (2019), menyatakan bahwa model SAR merupakan model yang paling baik pada penerapan model Indeks Pembangunan Manusia (IPM) di Jawa Tengah pada tahun 2017.

Salah satu metode yang digunakan pada pendugaan parameter SAR adalah dengan metode Bayes. Metode Bayes memberikan dugaan dengan ketepatan lebih tinggi dibandingkan dengan metode klasik seperti metode kuadrat terkecil atau metode maksimum *likelihood* (Gill, 2002). Metode Bayes umumnya dilakukan pada sampel kecil dengan informasi terbatas sehingga metode Bayes memberikan hasil yang lebih baik dibandingkan dengan metode maksimum likelihood. Aturan bayes adalah memadukan secara formal distribusi prior dan fungsi *likelihood* menjadi distribusi posterior. Distribusi posterior pada estimasi Bayes adalah distribusi yang sulit diperoleh sehingga pada banyak penerapannya adalah cukup dengan memperoleh sebaran posterior untuk parameter pada model karena inferensia bersama tidak diperlukan atau yang disebut dengan sebaran posterior marginal (Bivand, *et al*., 2014b).

Metode pendugaan parameter Bayes dapat dilakukan secara analitik, simulasi dan numerik. Pendugaan parameter Bayes yang biasa digunakan adalah *Markov Chain Monte Carlo* (MCMC) yaitu dengan cara simulasi. Pendugaan parameter Bayes dengan cara numerik adalah dengan metode *Integrated Nested Laplace Approximation* (INLA). INLA merupakan metode pendugaan parameter Bayes dengan cara pendekatan *laplace*. Penelitian Rue, *et al* (2009), mendeskripsikan INLA untuk mendapatkan penduga posterior marjinal dari parameter model. Menurut Bivand, *et al* (2014b), pendugaan parameter Bayes menggunakan INLA memberikan waktu komputasi yang lebih cepat dibandingkan dengan metode MCMC dan memungkinkan untuk menggunakan data yang lebih besar.

Indeks Pembangunan Manusia (IPM) merupakan indikator capaian pembangunan kualitas hidup masyarakat yang disusun berdasarkan tiga dimensi dasar, yaitu umur panjang dan hidup sehat, pengetahuan, dan standar hidup layak (BPS, 2020). IPM tidak hanya dipengaruhi oleh variabel bebas saja, namun terdapat efek spasial di dalamnya karena terdapat kemiripan antar wilayah yang berdekatan secara geografis yang menyebabkan keterkaitan hubungan antar wilayah. Pada tahun 2020 IPM di Provinsi Lampung mengalami keterlambatan pertumbuhan yaitu sebesar 69,69 atau tumbuh 0,17 persen (meningkat 0,12 poin) dibandingkan capaian tahun sebelumnya.

Melihat adanya keterlambatan pertumbuhan IPM di Provinsi Lampung tahun 2020, peneliti tertarik menganalisis dan melakukan pemodelan IPM untuk mengetahui faktor-faktor yang mempengaruhinya. Penelitian ini akan mengkaji pendugaan parameter parameter SAR dengan metode Bayes menggunakan INLA dan melakukan pemodelan untuk mengetahui faktor yang paling signifikan pada model, dimana faktor yang di duga mempengaruhi adalah pengeluaran per kapita (ribu/orang/tahun), persentase penduduk miskin, rata-rata lama sekolah, jumlah tenaga kesehatan, dan angka partisipasi sekolah usia 16-18 tahun dengan matriks pembobot spasial jarak K-NN yang paling optimum.

1.2 Tujuan Penelitian

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengkaji pendugaan parameter *Spatial Autoregressive* (SAR) dengan metode bayes menggunakan *Integrated Nested Laplace Approximation* (INLA) dengan prior berdistribusi Normal Invers Gamma.
2. Mendeskripsikan IPM di Provinsi Lampung tahun 2020 berdasarkan faktor-faktor yang mempengaruhinya.
3. Mengetahui faktor-faktor yang berpengaruh signifikan terhadap IPM di Provinsi Lampung tahun 2020 dengan model terbaik SAR menggunakan INLA berdasarkan matriks pembobot jarak K-NN yang paling optimum.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memberikan wawasan mengenai model *Spatial Autoregressive* (SAR) menggunakan *Integrated Nested Laplace Approximation* (INLA).
2. Mengetahui faktor-faktor yang berpengaruh signifikan terhadap Indeks Pembangunan Manusia di Provinsi Lampung tahun 2020.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Analisis Spasial

Analisis yang berkaitan dengan region atau kewilayahan sering disebut dengan spasial. Berdasarkan hukum Tobler dalam Anselin (1988), menyatakan bahwa segala sesuatu saling berhubungan satu dengan yang lainnya, tetapi sesuatu yang dekat lebih mempunyai pengaruh daripada sesuatu yang jauh. Hukum tersebut merupakan dasar pengkajian permasalahan berdasarkan pengaruh lokasi atau spasial. Menurut Anselin (1988), data spasial memiliki pengaruh atau efek spasial yang terjadi antar wilayah yaitu *spatial dependence* yang terjadi akibat dependesi dalam data dan *spatial heterogeneity* yang terjadi akibat adanya perbedaan antara satu wilayah dengan wilayah lain.

Pada analisis spasial, kemiripan sifat dari lokasi dinyatakan dalam matriks pembobot spasial untuk menggambarkan hubungan antara suatu wilayah dengan wilayah yang lain. Matriks pembobot spasial dapat diperoleh berdasarkan informasi ketersinggungan antar wilayah dan jarak dari ketetanggaan (*neighborhood*) atau jarak antara satu region dengan region yang lain.

Anselin (1988), mengembangkan metode analisis spasial. Pengembangan itu berdasarkan adanya pengaruh tempat atau spasial pada data yang dianalisis yang disebut dengan regresi spasial. Regresi spasial merupakan metode yang memungkinkan untuk menghitung ketergantungan antar pengamatan, yang sering muncul Ketika pengamatan dikumpulkan dari titik-titik yang ada didalam ruang (LeSage and Pace, 2009).

Menurut Anselin (1988), bentuk umum model regresi spasial adalah sebagai berikut

$$y = \rho W y + X\beta + u \tag{2.1}$$

$$u = \lambda W u + \varepsilon$$

$$\varepsilon \sim (N(0, \sigma^2 I_n)$$

dengan,

y : vektor variabel respon yang berukuran (nx1)

X : matriks variabel prediktor yang berukuran n x (p+1)

β : parameter koefisien regresi yang berukuran (p+1)x1

ρ : parameter koefisien lag dari variabel respon,

λ : parameter koefisien spasial lag pada *error*

W: matriks pembobot yang berukuran (n x n)

u : vektor error dengan ukuran (nx1)

ε : vektor error dengan ukuran (nx1)

Model yang bisa diperoleh dari model umum pada persamaan (2.1) yaitu :

1. Apabila nilai $\rho = 0$ dan $\lambda = 0$, maka persamaannya menjadi :

$$y = X\beta + \varepsilon \tag{2.2}$$

Persamaan (2.2) disebut model regresi klasik atau model regresi *Ordinary Least Square* (OLS) yaitu model regresi yang tidak mempunyai efek spasial.

2. Apabila nilai $\rho \neq 0$ dan $\lambda = 0$, maka persamaannya menjadi :

$$y = \rho W y + X\beta + u \tag{2.3}$$

Persamaan (2.3) disebut sebagai regresi *Spatial Lag Model* (SLM) dan menurut LeSage(1999), istilah lain model ini adalah *Spatial Autoregressive Models* (SAR).

3. Apabila nilai $\rho = 0$ dan $\lambda \neq 0$, maka persamaannya menjadi :

$$y = X\beta + u \tag{2.4}$$

$$u = \lambda W u + \varepsilon$$

Persamaan (2.4) disebut sebagai regresi *Spatial Error Model* (SEM)

4. Apabila nilai $\rho \neq 0$ dan $\lambda \neq 0$, maka persamaannya menjadi :

$$y = \rho W y + X\beta + u \tag{2.5}$$
$$u = \lambda W u + \varepsilon$$

Persamaan (2.5) disebut sebagai regresi *Spatial Autoregreesive Moving Average* (SARMA).

2.2 Spatial Autoregressive (SAR)

Spatial Autoregresive (SAR) adalah model regresi spasial yang terdapat pengaruh spasial pada variabel terikatnya. Model *Spatial Autoregresive* (SAR) adalah model yang mengkombinasikan model regresi linear dengan lag spasial pada variabel respon dengan menggunakan data cross section (Anselin, 1988). Koefisien lag spasial (ρ) menunjukkan tingkat korelasi pengaruh suatu wilayah terhadap wilayah lain disekitarnya. Model SAR adalah sebagai berikut:

$$y = \rho W y + X\beta + \varepsilon \tag{2.6}$$
$$\varepsilon \sim (N(0, \sigma^2 I)$$

dengan,

y: vektor peubah respon ukuran nx1

ρ : parameter koefisien spasial lag

W: matriks pembobot spasial berukuran nxn

X: matriks peubah penjelas berukuran n x(p+1)

β: parameter koefisien regresi yang berukuran (p+1)x1

ε : vektor galat berukuran nx1

2.3 Matriks Pembobot Spasial

Matriks pembobot spasial merupakan matriks yang menggambarkan hubungan antara suatu wilayah dengan wilayah yang lain. Matriks pembobot spasial (W) dapat diperoleh berdasarkan informasi ketersinggungan antar wilayah dan jarak dari ketetanggaan (*neighborhood*) atau dalam kata lain yaitu jarak antara satu region dengan region yang lain. Menurut LeSage (1998), matriks pembobot spasial berukuran $n \times n$ yang bersifat simetris dimana n adalah banyaknya wilayah, dengan diagonal utama yang senantiasa bernilai nol. Matriks pembobot spasial (W) adalah matriks biner berukuran nxn yang entrinya adalah 0 atau 1. Diberi nilai sama dengan 1 jika daerah i dan j bertetangga dan 0 sebaliknya.

$$W_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika i dan j bertetangga} \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

Berikut pembobot spasial dalam bentuk matriks:

$$\mathrm{W} = \begin{bmatrix} 0 & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & 0 & \dots & m_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

2.3.1 Matriks Pembobot Berdasarkan Persinggungan Lokasi

Ada beberapa metode untuk mendefinisikan hubungan persinggungan (*contiguity*) antar wilayah tersebut. Menurut LeSage (1999), metode itu dapat dijabarkan sebagai berikut :

1. *Linear Contiguity* (Persinggungan tepi); mendefinisikan W_{ij}= 1 untuk region yang berada di tepi (*edge*) kiri maupun kanan region yang menjadi perhatian, W_{ij} = 0 untuk region lainnya.
2. *Rook Contiguity* (Persinggungan sisi); mendefinisikan W_{ij}= 1 untuk region yang bersisian (*common side*) dengan region yang menjadi perhatian, W_{ij}= 0 untuk region lainnya.
3. *Bhisop Contiguity* (Persinggungan sudut); mendefinisikan W_{ij} = 1 untuk region yang titik sudutnya (*common vertex*) bertemu dengan sudut region yang menjadi perhatian, W_{ij} = 0 untuk region lainnya.
4. *Double Linear Contiguity* (Persinggungan dua tepi); mendefinisikan W_{ij}= 1 untuk dua entity yang berada di sisi (*edge*) kiri dan kanan region yang menjadi perhatian, W_{ij} = 0 untuk region lainnya.

5. *Double Rook Contiguity* (Persinggungan dua sisi); mendefinisikan W_{ij}= 1 untuk dua entity di kiri, kanan, utara dan selatan region yang menjadi perhatian, W_{ij}= 0 untuk region lainnya.
6. *Queen Contiguity* (persinggungan sisi-sudut); mendefinisikan W_{ij} = 1 untuk entity yang bersisian (*common side*) atau titik sudutnya (*common vertex*) bertemu dengan region yang menjadi perhatian, W_{ij}= 0 untuk region lainnya.

2.3.2 Matriks Pembobot Berdasarkan Jarak

Matriks pembobot spasial dengan pendekatan jarak tetangga terdekat atau *nearest neighbor* adalah alternatif untuk membentuk matriks pembobot spasial utuk lokasi yang tidak saling bertetangga. Menurut Anselin (1988), langkah-langkah menentukan matriks pembobot spasial jarak dengan K-NN adalah sebagai berikut:

1. Menghitung jarak pusat antara unit ke $-i$ terhadap seluruh unit lainnya $j \neq i$
2. Memberi peringkat dengan menghitung jarak *Euclidiean* sebagai berikut $d_{ij(1)} \leq d_{ij(2)} \leq \cdots \; d_{ij(n-1)}$
$$d_{ij} = \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2} \tag{2.7}$$
dengan X_1 Y_1 adalah titik koordinat kabupaten/kota ke-1 dan X_2 Y_2 adalah titik koordinat kabupaten/kota ke-2
3. Kemudian untuk setiap $k = 1,2, \dots, n-1$, atur $N_{(k)}(i) = \{j(1), j(2), \dots, j(k)\}$ yang berisi k unit terdekat terhadap i
4. Setiap k pada matriks pembobot W memiliki elemen w_{ij} bernilai 1 jika daerah i berdekatan dengan daerah j, sedangkan elemen diagonal utama akan selalu bernilai nol.
$$w_{ij} = \begin{cases} 1, & j \epsilon N_{(k)}(i) \\ 0, & lainnya \end{cases}$$
5. Matriks pembobot distandarisasi baris yaitu setiap elemen baris dibagi dengan jumlah baris sehingga $\sum_{j=1}^{n} w_{ij} = 1$, sehingga
$$w_{ij} = \begin{cases} 1/k, & j \epsilon N_{(k)}(i) \\ 0, & lainnya \end{cases}$$

Penelitian yang dilakukan Jaya, dkk. (2017), nilai K pertama kali ditentukan berdasarkan nilai *Moran's I* yang dipilih berdasarkan nilai yang terbesar. Pembentukan matriks pembobot dengan pendekatan K-NN memiliki tujuan untuk menentukan banyak tetangga yang paling optimal dengan fungsi tujuannya yaitu memilih nilai *Moran's I* pada persamaan (2.9) yang akan memberikan efek spasial yang paling signifikan.

.

2.4 Uji Multikolinearitas

Salah satu syarat yang harus dipenuhi dalam regresi dengan beberapa variabel prediktor adalah tidak adanya korelasi antara satu variabel prediktor dengan variabel prediktor lainnya. Multikolinearitas adalah terjadinya hubungan linear antara variable bebas dalam suatu model regresi linear berganda (Gujarati, 2004). Multikolinearitas adalah suatu kondisi dimana variabel-variabel prediktor berkorelasi tinggi. Salah satu cara mengidentifikasi adanya multikolinearitas yaitu dengan menggunakan *Variance Inflation Factors* (VIF) yang dinyatakan sebagai berikut:

$$VIF = \frac{1}{(1 - R_j^2)} \tag{2.8}$$

R_j^2 adalah koefisien determinasi antara dengan variabel prediktor lainnya. Nilai VIF yang lebih besar dari 10 menunjukkan adanya kolinearitas antar variabel prediktor (Gujarati, 2004).

2.5 Uji Dependensi Spasial

Dependensi spasial terjadi akibat adanya hubungan fungsional antara kejadian pada suatu wilayah pengamatan dengan kejadian pada wilayah pengamatan lainnya (Anselin, 1988). Pengujian dependensi spasial adalah dengan pengujian autokorelasi spasial dan pengujian ketergantungan spasial yang diuji dengan *Moran's I* dan *Langrange Multiplier* (LM).

2.5.1 Uji Autokorelasi Spasial

Autokorelasi spasial merupakan suatu ukuran kemiripan antara variabel dengan dirinya sendiri berdasarkan jarak, waktu, dan wilayah atau disebut juga dengan dependensi spasial. Autokorelasi spasial berarti bahwa suatu hubungan/korelasi antara peubah dengan dirinya sendiri dan korelasi ini merupakan ukuran kemiripan objek dalam suatu ruang. Jika terdapat pola sistematik di dalam penyebaran sebuah variabel, maka terdapat autokorelasi spasial.

Untuk mengukur korelasi antara pengamatan wilayah yang saling berdekatan adalah dengan *Moran's I*. Pengujian yang dilakukan adalah sebagai berikut:
Hipotesis:
H_0: $I = 0$ (tidak terdapat autokorelasi spasial)
H_1: $I \neq 0$ (terdapat autokorelasi spasial)
Taraf signifikan:
$\alpha = 5\%$
Statistik uji:

$$I = \frac{n \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} W_{ij}(y_i - \bar{y})(y_j - \bar{y})}{S_0 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})} \quad (2.9)$$

dimana,

I : nilai indeks moran
n : banyaknya pengamatan
y_i : nilai pada lokasi ke-i
y_j : nilai pada lokasi ke-j
$\bar{y}$: nilai rata-rata pada n pengamatan
W_{ij} : elemen-elemen matriks pembobot spasial

Nilai ekspektasi *Moran's I* adalah sebagai berikut:

$$E(I) = I_0 = -\frac{1}{n-1} \quad (2.10)$$

Nilai varians *Moran's I* adalah sebagai berikut:

$$Var(I) = \frac{n^2 S_1 - nS_2 + 3S_0{}^2}{(n^2-1)S_0{}^2} - [E(I)]^2 \tag{2.11}$$

dengan,

$$S_0 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} W_{ij}$$

$$S_1 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(W_{ij} + W_{ji}\right)^2$$

$$S_2 = \sum_{j=1}^{n}(W_{i0} + W_{0i})^2$$

$$W_{i0} = \sum_{j=1}^{n} W_{ij}$$

$$W_{0i} = \sum_{j=1}^{n} W_{ji}$$

Statistik uji yang digunakan adalah:

$$Z_{hitung} = \frac{I - E(I)}{\sqrt{VAR(I)}} \tag{2.12}$$

Keputusan penolakan:

Tolak H_0 jika nilai $Z_{hitung} > Z_{\alpha/2}$ tabel atau *p value* < α maka terdapat autokorelasi spasial. Jika *I* >I_0 maka data berautokorelasi positif, jika *I* <I_0 maka data berautokorelasi negatif, dan jika nilai *Moran's I* adalah nol maka tidak terdapat autokorelasi spasial.

2.5.2 Uji Ketergantungan Spasial

Uji ketergantungan spasial digunakan untuk mengetahui ada tidaknya pengaruh spasial antar pengamatan yang satu dengan yang lain. Uji ini dilakukan untuk mengetahui model pengaruh spasial dalam data. Uji ketergantungan spasial adalah dengan menggunakan Uji *Lagrange Multiplier*.

Lagrange Multiplier dilakukan untuk memilih model spasial yang tepat, yaitu ketergantungan lag spasial, ketergantungan galat spasial, atau ketergantungan keduanya. Pengujian yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Ketergantungan lag

Hipotesis:

H_0: $\boldsymbol{\rho}$ = 0 (tidak ada ketergantungan spasial dalam lag)

H_1: $\boldsymbol{\rho} \neq 0$ (ada ketergantungan spasial dalam lag)

Taraf signifikan:

α= 5%

Statistik uji:

$$LM_\rho = \frac{[e'WY/(\frac{ee'}{n})]^2}{D} \quad (2.13)$$

dimana,

$$D = \left[\frac{(WX\beta)'(I-X(X'X)^{-1}(WX\beta)}{\sigma^2}\right] + tr(W'W + WW)$$

Kriteria penolakan:

Tolak H_0 jika nilai $LM_\rho > \chi^2_{\alpha(p)}$ tabel, dengan p adalah banyaknya parameter spasial atau tolak H_0 jika *p value* < α. Jika keputusan terpenuhi maka model yang digunakan adalah *Spatial Autoregressive* (SAR).

2. Ketergantungan galat/*error*

Hipotesis:

H_0: λ = 0 (tidak ada ketergantungan spasial dalam galat)

H_1: λ ≠ 0 (ada ketergantungan spasial dalam galat)

Taraf signifikan:

α= 5%

Statistik uji:

$$LM_\lambda = \frac{[e'We/(\frac{ee'}{n})]^2}{tr(W'W+WW)} \quad (2.14)$$

Kriteria penolakan:

Tolak H_0 jika nilai $LM_\lambda > \chi^2_{\alpha(p)}$ tabel, dengan p adalah banyaknya parameter spasial atau tolak H_0 jika *p value* < α. Jika keputusan terpenuhi maka model yang digunakan adalah *Spatial Error Model* (SEM).

2.6 Uji Heterogenitas Spasial

Heterogenitas spasial atau keragaman spasial terjadi akibat adanya perbedaan pengaruh peubah penjelas terhadap respon antar satu wilayah dengan wilayah lainnya (Anselin, 1988). Heterogenitas spasial menunjukkan adanya keragaman antar lokasi. Untuk menguji heterogenitas spasial dapat diuji dengan statistik *Breush-Pagan*. Pengujian yang dilakukan adalah sebagai berikut :

Hipotesis:

H_0: $\alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \cdots = \alpha_n^2 = 0$ (terdapat homogenitas spasial)

H_1: minimal ada satu $\alpha_i \neq 0$ (terdapat heterogenitas spasial)

Taraf siginifikan:

α= 5%

Statistik uji:

$$BP = \left(\frac{1}{2}\right) f'Z(Z'Z)^{-1}Z'f \sim \chi^2_{(p)} \quad (2.15)$$

dengan,

$f_i = \left(\frac{e_i^2}{\sigma^2} - 1\right)$

e_i = *least square residual* untuk observasi ke-i

σ^2 = varians dari e_i

Z = matriks berukuran $n \times (p+1)$ yang berisi vektor yang sudah dinormal standarkan untuk setiap observasi

Kriteria penolakan:

Tolak H_0 jika nilai $BP > \chi^2_{\alpha(p-1)}$ tabel, dengan p adalah banyaknya parameter spasial atau tolak H_0 jika *p value* < α.

2.7 Distribusi Normal

Suatu peubah acak X dikatakan memiliki sebaran Normal dengan nilai tengah μ dan ragam σ^2memiliki fungsi kepekatan peluang dalam bentuk:

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \quad (2.16)$$

Untuk $-\infty < x < \infty$, $-\infty < \mu < \infty$, dan $0 < \sigma < \infty$,
Peubah acak X yang berdistribusi Normal dengan parameter tengah μ dan σ^2 dapat dinyatakan dengan $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Untuk fungsi kepekatan normal ganda (*Multivariate Normal*) adalah generalisasi dari fungsi kepekatan univariate normal dengan $p \geq 2$. Jika p adalah vektor dari variabel acak $X = (X_1, X_2, \dots, X_p)$ maka fungsi kepekatan peluang distribusi *Multivariate Normal* dari p peubah acak dengan nilai tengah $\vec{\mu}$ dan varians-kovarian matriks Σ yang menyebar normal dan saling bebas adalah dalam bentuk:

$$f(\vec{x};\vec{\mu},\Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}} exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})'\Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})\right) \quad (2.17)$$

Untuk $-\infty < \vec{x} < \infty$ dan $-\infty < \vec{\mu} < \infty$

2.8 Distribusi Gamma dan Invers Gamma

peubah acak X dikatakan berdistribusi Gamma dengan parameter $\alpha > 0$ dan $\beta > 0$, bila fungsi kepekatan peluangnya dalam bentuk:

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\frac{x}{\beta}) \quad (2.18)$$

Dengan $\alpha > 0$ dan $\beta > 0$
Peubah acak X yang berdistribusi Gamma dengan parameter α dan β dapat dinyatakan dengan $X \sim GAM(\alpha,\beta)$.

Jika peubah acak X berdistribusi Gamma, $X \sim GAM(\alpha,\beta)$ maka peubah acak Y dengan $Y = \frac{1}{X}$ berdistribusi Invers Gamma dengan fungsi kepekatan peluang dalam bentuk:

$$f(y;\alpha,\beta) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{-(\alpha+1)} \exp(-\frac{\beta}{x}) \quad (2.19)$$

Dengan $\alpha > 0$ dan $\beta > 0$

Peubah acak Y yang berdistribusi Invers Gamma dengan parameter α dan β dapat dinyatakan dengan $Y \sim IG(\alpha, \beta)$

2.9 Distribusi Uniform

Fungsi kepekatan peluang distribusi uniform yaitu:

$$f(x; a, b) = \frac{1}{b-a} \tag{2.20}$$

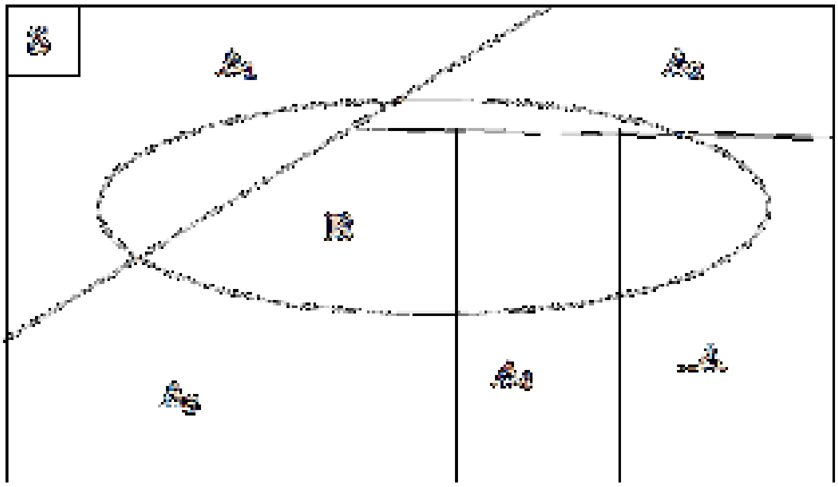
Dengan $a < x < b$

2.10 Metode Bayes

Pendugaan parameter dapat dilakukan dengan dua metode yaitu metode klasik dan metode Bayes. Metode klasik sepenuhnya mengandalkan proses inferensi pada data sampel yang diambil dari populasi, sedangkan metode Bayes disamping memanfaatkan data sampel yang diperoleh dari populasi juga memperhitungkan suatu distribusi awal yang disebut distribusi prior. Pada metode klasik memandang parameter sebagai besaran tetap yang tidak diketahui harganya, dan inferensi didasarkan hanya pada informasi dalam sampel sedangkan metode Bayes sebagai parameter yang bernilai tetap, sedangkan metode Bayes memandang parameter sebagai variabel yang menggambarkan pengetahuan awal tentang parameter sebelum pengamatan dilakukan dan dinyatakan dalam suatu distribusi yang disebut dengan distribusi prior (Bolstad, 2007).

2.10.1 Teorema Bayes

Menurut Soejoeti dan Soebanar (1988), misal S adalah ruang sampel dari suatu eksperimen dan $A_1, A_2, \dots, A_k$ adalah peristiwa-peristiwa didalam S sedemikian sehingga $A_1, A_2, \dots, A_k$ saling asing dan $\bigcup_{i=1}^{k} A_k = S$ dikatakan bahwa $A_1, A_2, \dots, A_k$ membentuk partisi di dalam S.



Gambar 2. 1 Teorema Bayes

Jika k peristiwa $A_1, A_2, \dots, A_k$ membentuk partisi di dalam ruang sampel S, maka terlihat pada Gambar 2.1 bahwa peristiwa-peristiwa $A_1 \cap B, A_2 \cap B, \dots, A_k \cap B$ membentuk partisi dalam B sehingga dapat ditulis $B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B), \dots, \cup (A_k \cap B)$. Karena peristiwa-peristiwa di ruas kanan saling asing maka:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i \cap B) \qquad (2.21)$$

Jika $P(A_i) > 0$ untuk $i = 1,2, \dots, k$ maka $P(A_i \cap B) = P(A_i)P(B|A_i)$ Sehingga didapat $P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)P(B|A_i)$. Misal peristiwa-peristiwa $A_1, A_2, \dots, A_k$ membentuk partisi di dalam ruang sampel S sedemikian sehingga $(A_i) > 0; i = 1,2, \dots, k$ dan misalkan B sembarang peristiwa sedemikian sehingga $P(B) > 0$ maka untuk ; $i = 1,2, \dots, k$

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{\sum_{i=1}^{k} P(A_i \cap B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(A_i)P(B|A_i)} \qquad (2.22)$$

Teorema Bayes memberikan aturan sederhana untuk menghitung probabilitas bersyarat peristiwa A_i jika B terjadi, jika masing-masing probabilitas tak bersyarat A_i dan probabilitas bersyarat B jika diberikan A_i (Bain and Engelhadt, 1992).

2.10.2 Distribusi Prior

Dalam metode Bayes, distribusi prior memiliki peran penting dalam pendugaan parameter θ yang tidak diketahui. Distribusi prior ditulis dengan $\pi(\theta)$. Distribusi prior merupakan distribusi awal yang memberikan informasi mengenai parameter dan harus ditentukan terlebih dahulu sebelum merumuskan distribusi posteriornya. Pada dasarnya, distribusi prior dipilih secara subjektif oleh peneliti terhadap suatu nilai parameter yang diduga.

2.10.3 Distribusi Posterior

Menurut Hogg, *et al.* (2005), fungsi kepekatan peluang bersyarat bagi θ atau yang disebut dengan distribusi posterior secara matematis dinyatakan sebagai berikut:

$$p(\theta|y) = \frac{f(y|\theta)\pi(\theta)}{m(y)} \tag{2.23}$$

Dengan $\pi(\theta)$ merupakan distribusi prior, $f(y|\theta)$ merupakan fungsi likelihood, dan $m(y)$ merupakan fungsi kepekatan peluang marginal dari y.

Fungsi *likelihood* didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \mathrm{L}(\theta) &= f(y_1;\theta)f(y_2;\theta) \dots f(y_n;\theta) \\ &= \prod_{i=1}^{n} f(y_i;\theta) \end{aligned} \tag{2.24}$$

Fungsi kepekatan peluang marginal untuk kontinu didefinisikan sebagai berikut:

$$m(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y|\theta)\pi(\theta)d\theta \tag{2.25}$$

Fungsi kepekatan peluang marginal untuk diskrit didefinisikan sebagai berikut:

$$m(y) = \sum_{\theta} f(y|\theta)\pi(\theta) \tag{2.26}$$

2.10.4 Penduga Bayes

Penduga Bayes untuk parameter θ diperoleh melalui nilai harapan dari posterior dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\hat{\theta} = E(p(\theta|y) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta \ p(\theta|y) d\theta \tag{2.27}$$

2.11 Integrated Nested Laplace Approximation (INLA)

Integrated Nested Laplace Aproximation (INLA) merupakan salah satu metode Bayes secara numerik. Sesuai namanya maka metode ini menggunakan pendekatan Laplace. INLA dikembangkan oleh Rue, *et al.* (2009), yang merupakan suatu metode untuk menghasilkan pendugaan parameter yang lebih akurat dan lebih cepat waktu komputasinya dibandingkan metode *Marcov Chain Monte Carlo* (MCMC). Penduga Bayes merupakan nilai harapan dari posterior.. Di banyak penerapan adalah cukup dengan memperoleh posterior marginal (Bivand, *et al.*, 2014a).

INLA fokus pada penyediaan pendekatan distribusi posterior marginal dari parameter pada model. Untuk mencari sebaran posterior marginal untuk setiap elemen dari vektor parameter adalah sebagai berikut:

$$p(\theta_i|y) = \int p(\theta_i, \psi|y) d\,\psi = \int p(\theta_i|\psi, y) p(\psi|y) d\psi \tag{2.28}$$

Untuk mendapatkan posterior marginal diperlukan *hyperparameter* atau parameter tingkat kedua untuk merepresentasikan parameter. sehingga untuk setiap elemen dari vektor *hyperparameter* $\psi = (\psi_{1,\dots,}\psi_k)$

$$p(\psi_k|y) = \int p(\psi|y) d\psi_{-k} \tag{2.29}$$

Menurut Blangiardo and Cameletti (2015), Langkah-langkah pendekatan Laplace untuk memperoleh sebaran posterior marginal pada INLA adalah sebagai berikut:

1. Menghitung $p(\psi|y)$ melalui sebaran marjinal $p(\psi_k|y)$

$$p(\psi|y) = \frac{p(\theta, \psi|y)}{p(\theta|\psi, y)}$$
$$= \frac{p(y|\theta, \psi) p(\theta, \psi)}{p(y)} \frac{1}{p(\theta|\psi, y)}$$

$$= \frac{p(y|\theta,\psi)p(\theta|\psi)p(\psi)}{p(y)} \frac{1}{p(\theta|\psi,y)}$$

$$\approx \left. \frac{p(y|\theta,\psi)p(\theta|\psi)p(\psi)}{\tilde{p}(\theta|\psi,y)} \right|_{\theta=\theta^*(\psi)} = \tilde{p}(\psi|y)$$

Dimana $\tilde{p}(\theta|\psi, y)$merupakan penduga dari $p(\theta|\psi, y)$

2. Menghitung $p(\theta_i|\psi, y)$ untuk mendapatkan $p(\theta_i|y)$

   Misalkan θ merupakan vektor parameter yang dapat ditulis sebagai $\theta = (\theta_i, \theta_{-i})$ melalui pendekatan Laplace dapat dijabarkan:

$$p(\theta_i, \psi|y) = \frac{p((\theta_i, \theta_{-i})\ |\psi, y)}{p(\theta_{-i}\ |\theta_i, \psi, y)}$$

$$= \frac{p(\theta, \psi|y)}{p(\psi|y)} \frac{1}{p(\theta_{-i}\ |\theta_i, \psi, y)}$$

$$\approx \left. \frac{p(\theta, \psi|y)}{\tilde{p}(\theta_{-i}\ |\theta_i, \psi, y)} \right|_{\theta_{-i}=\theta^*_{-i}(\theta_i,\psi)} = \tilde{p}(\theta_i|\psi, y)$$

$\tilde{p}(\theta_{-i}\ |\theta_i, \psi, y)$ merupakan penduga Laplace dari $p(\theta_{-i}\ |\theta_i, \psi, y)$

Setelah memperoleh $\tilde{p}(\psi|y)$ dan $\tilde{p}(\theta_i|\psi, y)$, maka sebaran marginal posterior dari $p(\theta_i|y)$ dapat diduga melalui:

$$\tilde{p}(\theta_i|y) \approx \int \tilde{p}(\theta_i|\psi, y)\, \tilde{p}(\psi|y) d\psi \qquad (2.30)$$

bentuk integral dari persamaan di atas dapat diselesaikan dengan cara numerik melalui:

$$\tilde{p}(\theta_i|y) \approx \sum_j \tilde{p}\left(\theta_i \middle| \psi^{(j)}, y\right) \tilde{p}\left(\psi^{(j)} \middle| y\right) \Delta_j \qquad (2.31)$$

dengan Δ_j adalah bobot dari setiap nilai vektor $\theta^{(j)}$.

2.12 Pengujian Model INLA

2.12.1 Uji Signifikan Parameter

Uji signifikan parameter pada metode Bayes adalah dengan menggunakan *Credible Interval*. *Credible Interval* suatu parameter yang tidak memuat nol berarti parameter memiliki pengaruh yang signifikan terhadap model. Sebaliknya, *Credible Interval* suatu parameter yang memuat nol berarti parameter tidak memiliki pengaruh yang signifikan terhadap model.

2.12.2 Uji Kecocokan Model

Uji kecocokan model regresi adalah menggunakan koefisien determinasi atau *R-Square*. Nilai *R-Square* memberikan gambaran tentang kesusaian variabel prediktor dalam memprediksi variabel respon. Menurut Sembiring (1995), perhitungan *R-Square* adalah sebagai berikut:

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} \tag{2.32}$$

Jika nilai *R-Square* sama dengan atau mendekati satu maka terdapat kecocokan terhadap model dan jika nilai *R-Square* sama dengan nol maka tidak terdapat kecocokan terhadap model.

2.13 Studi Kasus pada Indeks Pembangunan Manusia

Indeks Pembangunan Manusia (IPM) merupakan Alat ukur yang dapat merefleksikan status pembangunan manusia. Pembangunan manusia berarti perluasan pilihan masyarakat untuk hidup dengan bebas dan bermartabat dan perluasan kapabilitas untuk memenuhi aspirasi. Pembangunan manusia juga berarti perubahan positif pada manusia seutuhnya, fokus pada masyarakat dan kesejahteraannya, dan menjadi tujuan akhir dari segala macam pembangunan.

IPM merupakan indikator capaian pembangunan kualitas hidup masyarakat yang disusun berdasarkan tiga dimensi dasar, yaitu umur panjang dan hidup sehat, pengetahuan, dan standar hidup layak (BPS, 2019). Sehingga IPM dapat menjelaskan bagaimana penduduk dapat mengakses hasil pembangunan dalam memperoleh pendapatan, kesehatan, pendidikan, dan sebagainya.

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2020/2021 di Jurusan Matematika Faktultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Data Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder yang berasal dari *website* dan publikasi Badan Pusat Statistik (BPS) Provinsi Lampung yang diakses melalui web https://lampung.bps.go.id/ yang diakses pada tanggal 12 Desember 2020. Data yang diambil merupakan data Indeks Pembangunan Manusia (IPM) di Provinsi Lampung Tahun 2020. Unit pengamatan pada penelitian ini adalah 15 kabupaten/kota di Provinsi Lampung. Variabel yang digunakan adalah:

Y :Indeks Pembangunan Manusia (IPM)

X_1 : Pengeluaran perkapita

X_2 : Persentase penduduk miskin

X_3 : Rata-rata lama sekolah

X_4 : Jumlah tenaga kesehatan

X_5 : Angka partisipasi sekolah usia 16-18 tahun

3.3 Metode Penelitian

Penelitian ini akan mengkaji pendugaan parameter *Spatial Autoregressive* (SAR) dengan metode Bayes menggunakan *Integrated Nested Laplace Approximation* (INLA) dengan prior berdistribusi Normal-Invers Gamma. Penerapan penelitian ini adalah pemodelan data IPM Provinsi Lampung dengan SAR menggunakan INLA. Langkah analisis yang dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Menduga parameter SAR dengan metode Bayes menggunakan INLA dengan prior berdistribusi Normal-Invers Gamma.
    a. Pendugaan parameter Bayes pada model SAR.
        1. Menentukan fungsi *likelihood* model SAR.
        2. Menentukan prior yang digunakan yaitu berdistribusi Normal-Invers Gamma.
        3. Menentukan distribusi posterior.

    b. Karena distribusi posterior gabungan rumit diselesaikan secara analitik, maka ditentukan sebaran posterior marginal dengan metode INLA secara numerik dengan komputasi.
        1. Menentukan *hyperparameter* pada model SAR yaitu $\psi = (\psi_1, \psi_2)$.
        2. Menentukan prior dari *hyperparameter.*
        3. Menentukan sebaran posterior marginal dengan cara:
            a) Menghitung $p(\psi|y)$ melalui sebaran marjinal $p(\psi_k|y)$
            b) Menghitung $p(\theta_i|\psi, y)$ untuk mendapatkan $p(\theta_i|y)$
            c) Mengkombinasikan Langkah a dan b dengan komputasi untuk mendapatkan sebaran posterior marginal secara numerik:

$$\tilde{p}(\theta_i|y) \approx \sum_j \tilde{p}\left(\theta_i \middle| \psi^{(j)}, y\right)\tilde{p}\left(\psi^{(j)}|y\right)\Delta_j$$

2. Melakukan analisis deskriptif IPM Provinsi Lampung di tahun 2020 dan pemetaan wilayah berdasarkan faktor yang mempengaruhinya dengan aplikasi GeoDa.
3. Melakukan pemodelan SAR menggunakan INLA untuk mengetahui faktor-faktor yang mempengaruhi IPM berdasarkan matriks pembobot jarak *K-NN* yang paling optimum.

a. Membentuk matriks pembobot spasial berdasarkan jarak K-NN yang paling optimum menggunakan nilai *Moran's I* yang terbesar.
b. Melakukan uji multikolinearitas.
c. Melakukan uji dependensi spasial dengan *Moran's I test* dan *Lagrange Multiplier test.*
d. Melakukan uji heterogenitas spasial dengan *Breuch Pagan test.*
e. Melakukan pemodelan SAR menggunakan INLA untuk mengetahui faktor-faktor yang mempengaruhi IPM dengan *package* R-INLA
   1) Model yang digunakan adalah model SAR dengan persamaan:
   $$y = \rho W y + X\beta + \varepsilon$$
   2) Menentukan *hyperparameter* dan prior dari *hyperparameter.*
   3) Pendugaan parameter parameter SAR menggunakan INLA.
   4) Melakukan pengujian parameter yang signifikan terhadap model untuk menentukan faktor yang mempengaruhi IPM dengan melihat *credible interval.*
   5) Melakukan uji kecocokan model dengan *R-Square*.
   6) Melakukan interpretasi model SAR menggunakan INLA yang didapat.

V. KESIMPULAN

Berdasarkan analisis yang telah dilakukan, kesimpulan yang diperoleh adalah sebagai berikut:

1. Pendugaan parameter *Spatial Autoregressive* (SAR) dilakukan dengan menggunakan metode Bayes secara analitik menggunakan prior berdistribusi normal-invers gamma. Hasil yang diperoleh, nilai harapan dari posterior pada model SAR memiliki integral yang rumit sehingga pendugaan parameter tidak *closed form.* Maka dilakukan pendugaan parameter SAR dengan metode Bayes secara numerik menggunakan *Integrated Nested Laplace Approximation* (INLA) dengan komputasi.
2. Pada tahun 2020 Indeks Pembangunan Manusia (IPM) di Provinsi Lampung memiliki nilai rata-rata sebesar 68,66. IPM tingkat tinggi berada di Kota Bandar Lampung, Kota Metro, Pringsewu, dan Lampung Tengah. Nilai IPM dipengaruhi berdasarkan beberapa faktor. Untuk pengeluaran perkapita tertinggi berada di Kota Bandar Lampung, Kota Metro dan Kabupaten Lampung Tengah. Kabupaten dengan persentase penduduk miskin tertinggi adalah Pesisir Barat. Rata-rata lama sekolah di Provinsi Lampung hampir sama pada setiap kabupaten/kota dengan rata-rata tertinggi berada di Kota Bandar Lampung dan Kota Metro. Jumlah tenaga kesehatan di Provinsi Lampung berbeda-beda di setiap wilayah dengan terendah sebanyak 690 dan tertinggi 2.297. Untuk angka partisipasi sekolah usia 16-18 tahun memiliki rata-rata 71,74.

3. Hasil pemodelan SAR menggunakan INLA dengan menggunakan matriks pembobot jarak K-NN yang paling optimum adalah K-NN 2 diperoleh model sebagai berikut:

$$\widehat{y_j} = 0{,}140234 \sum_{i=1, j \neq i}^{n} W_{ij} y_j + 32{,}13102 + 0{,}00139023 X_{1i} + 1{,}6997141 X_{3i} + \varepsilon$$

Sehingga diperoleh faktor-faktor yang mempengaruhi IPM di Provinsi Lampung tahun 2020 adalah pengeluaran perkapita dan rata-rata lama sekolah.

DAFTAR PUSTAKA

Anselin, L. 1988. *Spatial Econometrics: Methods and Models*. Kluwer Academic Publisher, Dordrecth.

Badan Pusat Statistik. 2020. Data dan Informasi Kemiskinan Kabupaten/Kota Tahun 2020. Badan Pusat Statistik, Jakarta.

Badan Pusat Statistik. 2019. Indeks Pembangunan Manusia Tahun 2019. Badan Pusat Statistik, Jakarta.

Badan Pusat Statistik. 2020. Indeks Pembangunan Manusia. URL: https://lampung.bps.go.id/subject/26/indeks-pembangunan-manusia.html#subjekViewTab3. Diakses pada tanggal 12 Desember 2020.

Bain, L.J. and Engelhadt, M. 1992. *Introduction to Probability and Mathematical Statististics*. Duxbury Press, New York.

Bivand,R.,Rubio,V.G.,and Rue, H. 2014(a). Spatial Data Analysis with R-INLA with Some Extensions. *Journal of Spatial Statistics*. **63**:1-28.

Bivand,R.,Rubio,V.G., and Rue, H. 2014(b). Approximate bayesian inference for spatial econometrics models. Journal of *Spatial Statistics*. **9**:146-165.

Blangiardo, M. and Cameletti, M. 2015. *Spatial and Spatio-temporal Bayesian Models with R-INLA*. John Wiley & Sons, Chichester.

Bolstad, W.M. 2007. *Introduction to Bayesian Statistical Second Edition*. John Wiley and Sons, USA

Gill, J. 2002. *Bayesian Methods: A Social and Behavioral Sciences Approach*. Chapman & Hall, BocaRaton.

Gujarati, D.N. 2004. *Dasar – Dasar Ekonometrika.* Ed. Ke-2 Erlangga, Jakarta.

Hogg, R.V., Mckean J.W., and Craig, A.T. 2005. *Introduction to Mathematical Statistics Sixth Edition*. Pearson Education Inc, USA.

Jaya, I.G.N.M., Tantular, B., Zulhanif, dan Sunengsih, N. 2017. Metode Bayesian Dalam Penaksiran Model Spasial Autoregressive (SAR). *Jurnal Euclid*. **4**(2):689-798.

Jaya, I.G.N.M., Tantular, B., dan Zulhanif, 2017. Optimalisasi Matrik Bobot Spasial Berdasarkan K-Nearest Neighbor Dalam Spasial Lag Model. Hlm. 104-111. Prosiding Konferensi Nasional Penelitian Matematika dan Pembelajarannya II Universitas Muhammadiyah, Surakarta.

Khikmah,L. dan Novitasari, D. 2019. Penerapan Model Regresi Spasial pada Indeks Pembangunan Manusia (IPM) di Jawa Tengah. Jurnal Statistika. **19**(2):123-134.

Kutner, M.H., Nachtsheim, C.J., and Neter, J. 2004. *Applied Linear Regression Models. 4th*. Edition. McGraw-Hill, New York.

Lanjouw, P. 2001. *Poverty Education and Health in Indonsia : Who Benefitss From Public Spending*. Word Banking Working Paper No. 2739, Washington DC.

LeSage, JP. 1998. *Spatial Econometrics*. Department of Economics University of Toledo, Toledo.

LeSage, JP. 1999. *The Theory and Practice of Spatial Econometrics*. Department of Economics University of Toledo, Toledo.

LeSage,J.P. and Pace, R.K. 2009. *Introduction to Spatial Econometrics*. Taylor and Francis Group, New York.

Maulina, R.F, Djuraidah, A., dan Kurnia, A. 2019. Pemodelan Kemiskinan di Jawa Menggunakan Bayesian Spasial Probit Pendekatan Integrated Neste Laplace Approximation. *Media Statistika*. **12**(2): 140-151.

Rue, H., Martino, S., and Chopin, N. 2009. Approximate Bayesian Inference for Latent Gaussian Model by Using Integrated Nested Laplace Approximations. *Journal of Royal Statistical Society Series B*. **71**: 319–392.

Sarimah, Djuraidah, A., dan Wigena, A.H., 2019. Pemodelan *Autoregressive* Spasial Menggunakan *Bayesian Model Averaging* untuk Data PDRB Jawa. *Indonesian Journal of Statistics and its Applications*. **3**(2): 287-294.

Sembiring, R.K. 1995. *Analisis Regresi*. Penerbit ITB, Bandung.

Soejoeti, Z. dan Soebanar. 1988. *Inferensi Bayesian*. Karunika Universitas Terbuka, Jakarta.