NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN PADA ALJABAR MAX-PLUS

(Studi Kasus: Aplikasi Petri Net dan Aljabar Max-Plus pada Proses Pengajuan Kredit Nasabah Bank Perkreditan Rakyat Lambang Ganda Serang)

(Skripsi)

Oleh

MEGAWATI OCTAVIA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU DAN PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2022

ABSTRAK

Nilai Eigen dan Vektor Eigen pada Aljabar Max-Plus

(Studi Kasus: Aplikasi Petri Net dan Aljabar Max-Plus pada Proses Pengajuan Kredit Nasabah Bank Perkreditan Rakyat Lambang Ganda Serang)

Oleh

MEGAWATI OCTAVIA

Antrian merupakan suatu kondisi yang terjadi karena adanya keterlambatan dalam pelayanan. Untuk mengatasi permasalahan dalam antrian salah satunya dapat digunakan Petri Net dan Aljabar Max-Plus. Pada penelitian ini, dianalisis tentang hubungan nilai eigen dan vektor eigen pada Aljabar Max-Plus dari suatu matriks dan diaplikasikan model Petri Net dan Aljabar Max-Plus dari proses pengajuan kredit nasabah Bank Perkreditan Rakyat Lambang Ganda Serang. Hasil penelitian ini menunjukkan matriks pada $\mathbb{R}_{\max}$ dapat direpresentasikan dalam bentuk graf yaitu graf *precedence*. Graf *precedence* merupakan graf terhubung kuat jika matriks bersifat tak tereduksi (*irreducible*). Model Petri Net pada proses pengajuan kredit nasabah bank terdiri atas 12 tempat dan 8 transisi, 5 operator, 22 busur. Dengan menggunakan model Aljabar Max-Plus diperoleh nasabah bank yang melengkapi berkas persyaratan lebih cepat selesai dengan membutuhkan waktu 140 menit atau 2 jam 20 menit, sedangkan nasabah bank yang belum melengkapi berkas persyaratan membutuhkan waktu 190 menit atau 3 jam 10 menit.

Studi kasus pada proses pengajuan kredit nasabah Bank Perkreditan Rakyat Lambang Ganda Serang didapat matriks *backward incidence*. Dengan menggunakan *dummy* pada matriks *backward incidence*, diperoleh nilai eigen dan vektor eigen. Graf *precedence* dari matriks *backward incidence* merupakan graf terhubung kuat karena matriksnya bersifat *irreducible*.

Kata kunci: Petri Net, Aljabar Max-Plus, Graf *Precedence*, Nilai Eigen, Vektor Eigen.

ABSTRACT

Eigen Value and Eigen Vector in Max-Plus Algebra

(Case Study: Petri Net and Max-Plus Algebra Application on Process Credit Application for Credit Bank Customer Lambang Ganda Serang))

By

MEGAWATI OCTAVIA

Queue is a condition that occurs due to delays in service. To overcome the problems in the queue, one of them can be used Petri Net and Max-Plus Algebra. In this study, the relation between eigen values and eigen vector in Max-Plus Algebra from a matrix and application of Petri Net and Max-Plus Algebra model from the credit application process for Credit Bank customer Lambang Ganda Serang. The results of this research matrix on $\mathbb{R}_{\max}$ can be represented in the form of a graph, namely the precedence graph. A precedence graph is a strongly connected graph if the matrix is irreducible. In addition, the Petri Net model of the bank customer credit application process is modelled with 12 places and 8 transitions, 5 operators, 22 arcs. By using the Max-Plus Algebra model, it is obtained that bank customers who complete the requirement are document completed faster by taking 140 minutes or 2 hours 20 minutes, meanwhile bank customers who have not completed the required documents will take 190 minutes or 3 hours 10 minutes.

A case study on the process of applying for customer credit at the Bank Lambang Ganda Serang showed backward incidence matrix. By using dummy on the backward incidence matrix, the eigen value and eigen vector are obtained. The precedence graph of the backward incidence is strongly connected graph because the matrix is irreducible.

Keywords: Petri Net, Max-Plus Algebra, Precedence Graph, Eigen Value, Eigen Vector.

NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN
PADA ALJABAR MAX-PLUS
(Studi Kasus: Aplikasi Petri Net dan Aljabar Max-Plus pada Proses Pengajuan Kredit Nasabah Bank Perkreditan Rakyat Lambang Ganda Serang)

Oleh

MEGAWATI OCTAVIA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU DAN PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2022

Judul Skripsi : **NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN PADA ALJABAR MAX-PLUS (Studi Kasus: Aplikasi Petri Net dan AljabarMax-Plus pada Proses Pengajuan Kredit Nasabah Bank Perkreditan Rakyat Lambang Ganda Serang)**

Nama Mahasiswa : *Megawati Octavia*

Nomor Pokok Mahasiswa : 1857031004

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.
NIP 19840627 200604 2 001

Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.
NIP 19800206 200312 1 003

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.** .....

Sekretaris : **Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.** .....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Dr. Asmiati M.Si.** .....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, S.Si., M.T.
NIP 19740705 200003 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **11 April 2022**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: Megawati Octavia
Nomor Pokok Mahasiswa	: 1857031004
Jurusan	: Matematika
Judul Skripsi	: **NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN PADA ALJABAR MAX-PLUS (Studi Kasus: Aplikasi Petri Net dan Aljabar Max-Plus pada Proses Pengajuan Kredit Nasabah Bank Perkreditan Rakyat Lambang Ganda Serang)**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, April 2022

Yang Menyatakan,

Megawati Octavia

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan pada tanggal 23 Oktober 1999 di Kota Serang, Banten. Terlahir dari keluarga pasangan Bapak Lisbet Hutabarat dan Ibu Nursia Pandiangan yang merupakan anak pertama dari empat bersaudara.

Penulis menempuh pendidikan di TK Mardi Yuana Serang pada tahun 2005 – 2006. Pendidikan Sekolah Dasar di SD Mardi Yuana Serang pada tahun 2006 – 2012. Pendidikan Sekolah Menengah Pertama di SMPN 2 Kota Serang pada tahun 2012 – 2015. Pendidikan Sekolah Menengah Atas di SMAN 1 Kota Serang pada tahun 2015 – 2018. Kemudian penulis diterima sebagai mahasiswi jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam pada tahun 2018 melalui jalur SMMPTN BARAT.

Sebagai bentuk penerapan illmu yang didapat, pada semester VI penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Bank Perkreditan Rakyat Lambang Ganda Serang pada tanggal 01 Februari 2021 – 02 Maret 2021. Kemudian, pada semester VII penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Sawarna Kabupaten Banten pada tanggal 01 Agustus 2021 – 10 September 2021.

KATA INSPIRASI

"Bersukacitalah dalam pengharapan, sabarlah dalam kesesakan

dan bertekunlah dalam doa"

(Roma 12 : 12)

"Kamu tidak harus menjadi hebat untuk memulai, tetapi

kamu harus mulai untuk menjadi hebat"

(Zig Ziglar)

"Jika kamu ingin hidup bahagia, terikatlah pada tujuan, bukan orang atau benda"

(Albert Einstein)

"Rasa cinta menumbuhkan perjuangan, rasa sayang menumbuhkan rasa semangat, tetapi rasa bersyukur menumbuhkan kasih"

(Tigor Andarestu Panggabean)

PERSEMBAHAN

Tuhan Yesus Kristus

Puji dan syukur kepada Tuhan Yesus Kristus atas limpahan kasih dan sayangMu telah memberikan ku kekuatan dan kesabaran juga telah memberikanku ilmu pengetahuan. Atas karunia serta kemudahan yang Engkau berikan akhirnya skripsi ini dapat terselesaikan. Semoga keberhasilan ini mengantarkanku ke pintu masa depan dalam meraih cita – citaku.

Papa dan Mama

Terima kasih untuk semua pengorbanan, doa juga dukungan yang tidak pernah henti.

Adik – adikku Tercinta

Terima kasih Rachel, Elsya dan Sarah yang selalu memotivasi untuk mengerjakan skripsi. Semoga dengan karya ini membuat adik – adik lebih semangat dalam menjalani pendidikan.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terima kasih telah memberikan bimbingan, arahan, masukan, dukungan, serta ilmu yang berharga.

SANWACANA

Puji dan syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yesus Kristus atas segala kasih, berkat, dan karunia-Nya yang melimpah sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi dengan judul "**Nilai Eigen dan Vektor Eigen pada Aljabar Max-Plus (Studi Kasus: Aplikasi Petri Net dan Aljabar Max-Plus pada Proses Pengajuan Kredit Nasabah Bank Perkreditan Rakyat Lambang Ganda Serang)**". Skripsi ini merupakan salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika di Universitas Lampung.

Dalam penyusunan skripsi ini, penulis menyadari bahwa skripsi ini tidak akan terealisasi dengan baik tanpa adanya dukungan, bantuan, bimbingan serta arahan dari berbagai pihak. Pada kesempatan ini, penulis ingin mengucapkan terima kasih sebesar-besarnya kepada:

1. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc. selaku dosen pembimbing pertama yang telah senantiasa memberikan bimbingan, dukungan, motivasi, saran dan telah meluangkan waktu untuk mendengarkan keluh kesah.
2. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc. selaku dosen pembimbing kedua yang telah memberikan dukungan, bimbingan serta saran yang membantu penulis menyelesaikan skripsi ini.
3. Ibu Dr. Asmiati, M.Si. selaku dosen penguji yang telah memberikan evaluasi serta saran kepada penulis.
4. Bapak Drs. Eri Setiawan, M.Si. selaku dosen Pembimbing Akademik (PA) atas arahan dan bimbingannya selama masa perkuliahan.

5. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Universitas Lampung.
6. Seluruh civitas akademik, dosen, dan staf Jurusan Matematika Fakuktas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Papa, Mama, Rachel, Elsya, Sarah yang selalu memberikan doa dan dukungan kepada penulis.
8. Martha, Nanda, Nurfadilah, Dalfa, Bunga, Alifia, Vinny yang selalu mendukung dan tempat berbagi cerita selama masa perkuliahan.
9. Seluruh teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2018.

Bandar Lampung, April 2022

Penulis,

Megawati Octavia

DAFTAR ISI

Halaman

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah 1

1.2 Tujuan Penelitian 4

1.3 Manfaat Penelitian 4

II. TINJUAN PUSTAKA

2.1 Antrian..... 5

2.2 Konsep Dasar Graf 6

2.3 Petri Net 11

2.4 Konsep Dasar Aljabar Max-Plus..... 19

2.5 Aljabar Max-Plus 28

2.5.1 Operasi Dasar Matriks pada Aljabar Max-Plus 30

2.6 Model Aljabar Max-Plus dari Petri Net dengan Waku 34

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian 36

3.2 Metode Penelitian..... 36

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Kaitan Aljabar Max-Plus pada Nilai Eigen dan Vektor Eigen 40

4.1.1 Operasi Matriks pada Aljabar Max-Plus 41

4.1.2 Hubungan Aljabar Max-Plus dengan Teori Graf 46

4.2 Nilai Eigen dan Vektor Eigen Aljabar Max-Plus..... 53

4.3 Petri Net dan Aljabar Max-Plus Studi Kasus Proses Pengajuan Kredit Nasabah Bank Perkreditan Rakyat Lambang Ganda Serang 67

4.3.1 Alur Pelayanan Proses Pengajuan Kredit..... 67

4.3.2 Waktu Proses Pelayanan Pengajuan Kredit 74

4.3.3 Model Matematika dalam Bentuk Representasi Matrika..... 75

4.3.4 Model Aljabar Max-Plus Pelayanan Pengajuan Kredit Nasabah Bank Pekreditan Rakyat Lambang Ganda Serang..... 79

4.3.5 Nilai Eigen dan Vektor Eigen pada Proses Pengajuan Kredit Nasabah Bank Perkreditan Rakyat Lambang Ganda Serang..... 90

V. KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan 97

5.2 Saran..... 98

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN

DAFTAR TABEL

Halaman

Tabel 2.1. Operasi biner pada himpunan S yang tidak komutatif 20

Tabel 2.2. Operasi biner pada himpunan S yang komutatif.....20

Tabel 4.1. Pengecekan bobot maksimum dari semua lintasan $\mathcal{G}(A)$ pada Contoh 4.1.2.2. 50

Tabel 4.2. Lamanya waktu proses pelayanan pengajuan kredit.....74

DAFTAR GAMBAR

Halaman

Gambar 2.1. Contoh Graf 6

Gambar 2.2. Graf Berarah Berbobot 8

Gambar 2.3. Graf Berarah dengan Lintasannya 9

Gambar 2.4. Graf Berarah Berbobot dengan Sirkuit 10

Gambar 2.5. Graf Berarah Berbobot Tanpa Sirkuit 10

Gambar 2.6. Transisi, Tempat (*Place*), Busur (*Arc*) 11

Gambar 2.7. Petri Net Sederhana *Pure* 12

Gambar 2.8. Contoh Transisi Tidak Aktif 14

Gambar 2.9. Contoh Transisi Aktif 15

Gambar 2.10. Petri Net dengan Penanda Awal t_1 Aktif 15

Gambar 2.11. Petri Net Dalam Keadaan t_1 *Fire* dan t_2 Aktif 15

Gambar 2.12. Petri Net Dalam Keadaan t_2 *Fire* dan t_3 Aktif 16

Gambar 2.13. Petri Net Dalam Keadaan t_3 *Fire* dan Tidak Ada Transisi Aktif 16

Gambar 2.14. Contoh Sebelum Transisi t_1 Di*fire* 18

Gambar 2.15. Petri Net dengan Waktu 34

Gambar 3.1. Diagram Alir Mengetahui Hubungan Aljabar Max-Plus dengan Nilai Eigen dan Vektor Eigen 37

Gambar 3.2. Diagram Alir Untuk Mengaplikasikan Petri Net dan Aljabar Max-Plus pada Proses Pengajuan Kredit Nasabah Bank Perkreditan Rakyat Lambang Ganda Serang 39

Gambar 4.1. Graf *Precedence* Matriks A pada Contoh 4.1.2.2 49

Gambar 4.2. Sirkuit Kritis dari Matriks A Contoh 4.1.2.2 52

Gambar 4.3. Graf *Precedence* Matriks A pada Contoh 4.2.2 59

Gambar 4.4. Sirkuit Kritis Pada Contoh 4.2.2 59

Gambar 4.5. Graf *Precedence* Matriks A Pada Contoh 4.2.3 63

Gambar 4.6. Sirkuit Kritis Pada Contoh 4.2.3 63

Gambar 4.7. Diagram Alir Proses Pelayanan Pengajuan Kredit 69

Gambar 4.8. Halaman Depan WOPED Versi 3.2.0 70

Gambar 4.9. Model Petri Net Proses Pelayanan Pengajuan Kredit 71

Gambar 4.10. Graf *Precedence* dari Matriks *Backward Incidence* 92

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Ilmu matematika selalu berhubungan dalam teknologi dan ilmu pengetahuan. Permasalahan sering terjadi dalam teknologi dan ilmu pengetahuan, oleh karena itu peranan ilmu matematika sangat memberikan solusi yang dapat dipergunakan. Salah satu contoh permasalahan yaitu dalam setiap kegiatan baik kegiatan di rumah sakit, pusat perbelanjaan, SPBU, Bank, dan sebagainya terjadi situasi dimana seseorang diharuskan menunggu untuk mendapatkan proses jasa pelayanan. Proses jasa pelayanan merupakan tahapan yang berhubungan dengan suatu kedatangan seseorang pada suatu fasilitas pelayanan, kemudian menunggu jalannya proses fasilitas pelayanan tersebut pada akhirnya meninggalkan fasilitas tersebut. Biasanya pelayanan identik dengan antrian. Pada umumnya, banyak orang yang mengeluhkan mengenai antrian.

Antrian merupakan suatu kondisi yang terjadi karena adanya keterlambatan dalam pelayanan. Antrian biasanya disebabkan oleh banyaknya pelanggan yang ingin dilayani namun terkendala dengan pelayanan yang biasanya tersedia hanya sedikit. Kejadian tersebut terjadi karena terjadi ketidaktahuan mengenai kedatangan pelanggan dan waktu pelayanan. Antrian menyebabkan waktu pelayanan bertambah, dengan adanya antrian yang menumpuk sedangkan jumlah pelayanan yang terbatas maka menyebabkan waktu pelayanan bertambah.

Aljabar Max-Plus merupakan salah satu teknik analisis pengkajian sistem kejadian diskrit yang mempunyai banyak aplikasi pada teori sistem dan Petri Net. Petri Net merupakan suatu metode untuk memodelkan, menganalisis dan sebagai kontrol suatu sistem kejadian diskrit. Pengkajian dengan menggunakan Aljabar Max-Plus dapat digunakan untuk menentukan dan menganalisis berbagai sistem.

Aljabar Max-Plus yaitu himpunan $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ dengan $\mathbb{R}$ merupakan himpunan semua bilangan *real* dengan operasi biner $\oplus$ dan $\otimes$. Operasi $\oplus$ dibaca o-*plus* sedangkan operasi $\otimes$ dibaca o-*times* dan penulisan $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ ditulis sebagai $(\mathbb{R}_{\max})$. Untuk $\mathbb{R}$ himpunan bilangan *real* kita mengenal matriks *real* beserta operasi-operasi pada matriks *real*. Begitu juga pada Aljabar Max-Plus terdapat matriks yang entri-entrinya di $\mathbb{R}_{\max}$ beserta operasi matriks di $\mathbb{R}_{\max}$.

Nilai eigen dan vektor eigen merupakan salah satu topik pada aljabar yang dimiliki matriks bujur sangkar. Matriks bujur sangkar merupakan suatu matriks yang memiliki jumlah baris dan kolom yang sama. Seperti pada matriks *real* terdapat juga matriks bujur sangkar pada matriks dalam Aljabar Max-Plus. Pada Aljabar Max-Plus suatu matriks bujur sangkar A dapat direpresentasikan dalam bentuk graf yang dinamakan graf *precedence* dan dinotasikan dengan $\mathcal{G}(A)$.

Petri Net merupakan suatu metode untuk memodelkan, menganalisis dan sebagai kontrol suatu sistem kejadian diskrit. Suatu kejadian (*event*) akan terjadi apabila beberapa keadaan sudah terpenuhi. Kejadian dan keadaan masing-masing dinyatakan dengan transisi dan *place*. Transisi merupakan kejadian yang menyebabkan perubahan kondisi keadaan (*state*). *Place* berguna sebagai *input* atau *output* suatu transisi. Pada penelitian sebelumnya telah dibahas model Petri Net dan Aljabar Max-Plus yaitu penelitian mengenai Aplikasi Petri Net Pada Sistem Pembayaran Tagihan Listrik PT.PLN (Persero) Rayon Ambon Timur (Freya, 2012), Penjadwalan Pelayanan di PLN Dengan Menggunakan Petri Net dan Aljabar Max-Plus (Widayanyi, 2012), Membuat Model Layanan Mesin ATM Dengan Menggunakan Petri Net (Rahakbauw, 2013), Sistem Pelayanan Penerbitan Surat Izin Mengemudi (SIM) Dengan Menggunakan Petri Net (Nur,

2017), Model Aljabar Max-Plus dan Petri Net Pada Sistem Pelayanan Pendaftaran Sistem Pelayanan Pendaftaran Ujian Akhir Semester (Nurmalita, 2018).

Dengan menggunakan Petri Net dan Aljabar Max-Plus maka dapat memaksimalkan pelayanan dan mengetahui estimasi waktu yang dibutuhkan pelayanan sehingga antrian akan berkurang dan pelayanan akan lebih efektif.

Oleh karena itu, peneliti bermaksud meneliti dan menganalisis nilai eigen dan vektor eigen pada Aljabar Max-Plus serta mengaplikasikan proses pelayanan pengajuan kredit menggunakan model Petri Net dan Aljabar Max-Plus dengan tujuan untuk membuat model Petri Net dari antrian di BPR Lambang Ganda Serang yang dikaitkan waktu dan mempresentasikannya ke dalam bentuk matriks.

Bank Perkreditan Rakyat (BPR) Lambang Ganda Serang merupakan suatu bank yang memiliki proses jasa pelayanan yaitu mengajukan kredit, menyetor pembayaran dan tabungan. Namun yang akan dibahas penelitian ini hanya ketika nasabah mengajukan kredit.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. mengetahui konsep nilai eigen dan vektor eigen pada Aljabar Max-Plus;
2. menentukan cara menghitung nilai eigen dan vektor eigen pada matriks dalam Aljabar Max-Plus;
3. membuktikan sifat-sifat nilai eigen dan vektor eigen dari Aljabar Max-Plus;
4. mendapatkan alur Petri Net dari proses pelayanan pengajuan kredit di BPR Lambang Ganda Serang;
5. menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks *backward incidence* pada proses pelayanan pengajuan kredit di BPR Lambang Ganda Serang;

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah:

1. mengetahui pemodelan Petri Net dari pelayanan proses nasabah yang mengajukan kredit di PT BPR Lambang Ganda Serang;
2. memberikan kontribusi di bidang matematika terutama bidang teori antrian;
3. mengetahui konsep nilai eigen dan vektor eigen pada Aljabar Max-Plus beserta sifat-sifatnya;
4. memberikan pengetahuan model alur pelayanan bank menggunakan Petri Net dengan Aljabar Max-Plus dan simulasi alur pelayanan bank menggunakan *software* WOPED.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bagian ini akan dibahas beberapa pustaka dan dasar teori yang akan dikaji untuk digunakan dalam pembahasan selanjutnya, diantaranya yaitu Sistem Antrian, Konsep Dasar Graf, Petri Net, Konsep Dasar Aljabar Max-Plus, Aljabar Max-Plus, Model Aljabar Max-Plus dari Petri Net dengan Waktu.

2.1 Antrian

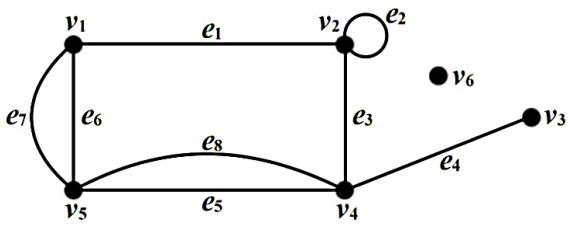
Secara umum pengertian antrian adalah suatu kegiatan menunggu guna untuk mendapatkan suatu pelayanan. Simulasi yang digunakan untuk membantu memperhatikan suatu sistem beroperasi. Apabila dikaitkan dengan di bank, antrian merupakan suatu kegiatan pelayanan yang dilakukan dari nasabah tiba di bank sampai keluar dari bank.

Teori antrian pertama kali dikemukakan oleh A. K. Erlang, seorang ahli matematika Denmark pada tahun 1913 dalam buku yang berjudul "*Solution of Some Problem in the Theory of Probability of Significance in Automatic Telephone Exchange*". Teori antrian (*queueing theory*) merupakan teori modul yang menerapkan studi matematika dari baris-baris penungguan, yakni suatu baris dari pelanggan yang memerlukan layanan dari suatu sistem yang tersedia. Tujuan penggunaan teori antrian adalah untuk merancang fasilitas pelayanan dalam mengatasi permintaan pelayanan yang berfluktuasi secara *random* dan menjaga keseimbangan antara waktu pelayanan dan waktu yang diperlukan selama

mengantri. Proses antrian (*queueing process*) merupakan suatu proses yang berhubungan dengan kedatangan pelanggan ke suatu antrian pada fasilitas pelayanan, kemudian menunggu dalam antrian hingga pelayan memilih pelanggan sesuai dengan pelayanan masing-masing, pada akhirnya pelanggan meninggalkan sistem antrian setelah selesai pelayanan. Pelayanan di suatu bank, baik bank umum dan bank konvensional juga memerlukan antrian dalam melayani nasabahnya agar tidak terjadi ketidakseimbangan antara yang dilayani dengan pelayannya. Khususnya di bank konvensional yaitu Bank Perkreditan Rakyat (BPR) antrian digunakan untuk nasabah yang akan mengajukan kredit.

2.2 Konsep Dasar Graf

Graf merupakan struktur diskrit yang terdiri himpunan-himpunan objek yang disebut titik (*vertex*) dan himpunan sisi (*edge*) yang menghubungkan titik-titik tersebut. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut.



Gambar 2.1. Contoh Graf

Gambar 2.1 merupakan graf $\mathcal{G}$ dengan himpunan titik $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$. Dua titik pada graf $\mathcal{G}$ dikatakan bertetangga (*adjacent*) jika keduanya terhubung dengan suatu sisi. Suatu sisi dikatakan menempel (*incident*) dengan suatu titik v, jika titik v merupakan salah satu titik ujung dari sisi tersebut. Pada Gambar 2.1, titik v_4 bertetangga dengan titik v_2 dan v_3. Sisi e_3 menempel pada titik v_2 dan v_4.

Secara umum, graf dapat dikelompokkan menjadi dua yaitu graf sederhana dan graf tidak sederhana. Graf sederhana merupakan graf yang tidak memuat gelang dan sisi ganda, sedangkan graf tidak sederhana merupakan graf yang memuat gelang dan atau sisi ganda. Gelang merupakan suatu sisi apabila ujung pada sisinya berawal dan berakhir pada titik yang sama. Sisi ganda merupakan sisi yang memiliki dua titik ujung yang sama. Pada Gambar 2.1, terdapat gelang pada titik v_2 yaitu e_2. Sisi ganda terletak pada e_5 dan e_8.

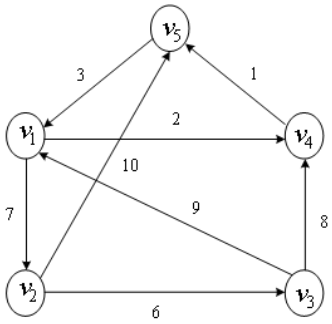
Titik terpencil adalah titik yang tidak mempunyai sisi yang bersisian dengannya. Pada Gambar 2.1, titik terpencil terletak pada v_6. Graf kosong merupakan graf yang hanya memiliki himpunan titik tanpa adanya sisi. Pada Gambar 2.1, graf kosong terletak pada v_6. Jalan (*walk*) adalah barisan berhingga titik – titik dan sisi sedemikian sehingga setiap sisi menempel pada titik sebelumnya dan sesudahnya. Pada jalan dapat terjadi pengulangan titik atau sisi. Lintasan (*path*) adalah jalan yang memiliki dan melewati titik yang berbeda. Contoh lintasan pada Gambar 2.1 adalah $v_1 - e_6 - v_5 - e_5 - v_4 - e_3 - v_2 - e_1$. Panjang lintasan adalah banyak sisi yang terdapat pada lintasan. Graf pada Gambar 2.1 dikatakan graf terhubung jika terdapat lintasan yang menghubungkan setiap dua titik yang berbeda, dan jika tidak terdapat lintasan yang menghubungkan dua titik yang berbeda maka graf tersebut disebut graf tak terhubung.

Suatu graf berarah $\mathcal{G}$ adalah suatu pasangan (V, E) dengan V adalah himpunan titik dan E adalah himpunan sisi. Suatu graf $\mathcal{G}$ dikatakan terhubung jika terdapat lintasan yang diantara setiap dua titik berbeda di graf $\mathcal{G}$. Graf $\mathcal{G} = (V, E)$ dikatakan terhubung kuat jika setiap $i, j \in V$ terdapat suatu lintasan dari i ke j, dengan $i \neq j$. Setiap titik $(j, i) \in E$ pada $\mathcal{G}$ dengan nilai *real* disebut bobot yang dinotasikan dengan $w(j, i)$. Graf $\mathcal{G}$ dengan setiap sisinya memiliki bobot disebut graf bobot. Graf berarah berbobot didefinisikan dengan graf $\mathcal{G}(V, E)$ dengan setiap busur $(j, i) \in E$ memiliki bobot. Misalkan $\rho = (i_0, i_1, \dots, i_p)$ adalah lintasan pada graf berarah berbobot dari titik i_0 ke titik i_p dengan panjang ρ, bobot lintasan ρ pada graf dinotasikan dengan $|\rho|_w$ adalah penjumlahan dari bobot busur-busur pada lintasan tersebut. Secara matematis dinotasikan dengan $|\rho|_w =$

$w(i_0, i_1) + w(i_1, i_2) + \cdots + w(i_{p-1}, i_p)$. Bobot rata-rata dinotasikan dengan $|\overline{\rho}|_l$ dari lintasan ρ adalah bobot dari $|\rho|_w$ dibagi dengan panjang lintasan $|\rho|_l$. Graf bipartit merupakan salah satu jenis dari graf sederhana. Suatu graf $\mathcal{G}$ dikatakan graf bipartit apabila $V(\mathcal{G})$ merupakan gabungan dari dua himpunan tak kosong V_1 dan V_2 sedemikian sehingga setiap sisi pada $\mathcal{G}$ menghubungkan suatu titik di V_1 ke suatu titik di V_2.

Setelah dijelaskan konsep tentang lintasan, selanjutnya akan diberikan contoh cara menentukan suatu lintasan dan cara menghitung panjang lintasan dan bobot lintasan.

Contoh 2.2.1 Diberikan graf berikut.

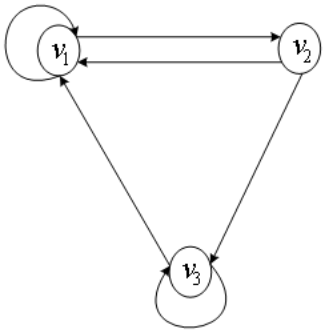


Gambar 2.2. Graf Berarah Berbobot

Graf pada Gambar 2.2 merupakan graf berarah berbobot. Contoh lintasan pada graf tersebut adalah ρ_1 dan ρ_2. Lintasan ρ_1 dilewati oleh titik v_1, titik v_2 dan titik v_5 atau dinotasikan dengan $\rho_1: v_1 \to v_2 \to v_5$; $\rho_2: v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_4 \to v_5$. Lintasan ρ_1 mempunyai busur sebanyak 2. Lintasan ρ_2 mempunyai busur sebanyak 4. Oleh karena itu panjang lintasan $|\rho_1|_l = 2$, $|\rho_2|_l = 4$. Selanjutnya akan ditentukan bobot tiap lintasan. Bobot ρ_1 atau dinotasikan dengan $|\rho_1|_w$. $|\rho_1|_w = w(2,1) + w(5,2) = 7 + 10 = 17$ dan $|\rho_2|_w = w(2,1) + w(3,2) + w(4,3) + w(5,4) = 7 + 6 + 8 + 1 = 22$.

Selanjutnya akan dibahas mengenai sirkuit. Sirkuit adalah suatu lintasan yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama atau disebut juga lintasan tertutup. Sirkuit elementer adalah sirkuit yang setiap titiknya muncul tidak lebih dari sekali, kecuali titik awal yang muncul tepat dua kali. Cara menghitung panjang, bobot dan bobot rata-rata suatu sirkuit sama dengan cara menghitung panjang, bobot dan bobot rata-rata pada suatu lintasan. Berikut ini akan diberikan contoh graf yang mempunyai sirkuit.

Contoh 2.2.2 Diberikan graf berikut.

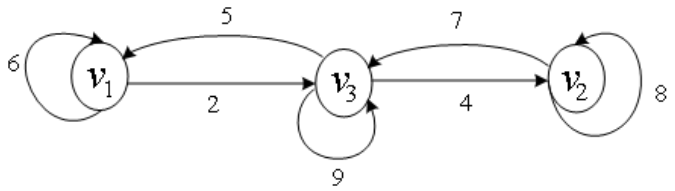


Gambar 2.3. Graf Berarah dengan Lintasannya

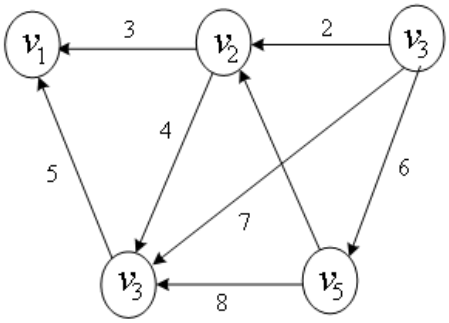
Graf pada Gambar 2.3 memiliki 3 lintasan yaitu ρ_1, ρ_2, ρ_3. Lintasan ρ_1 dilewati oleh titik 1, titik 2 dan titik 3 atau dinotasikan dengan $\rho_1: v_2 \to v_1 \to v_1 \to v_2 \to v_3$; $\rho_2: v_3 \to v_1 \to v_1 \to v_2 \to v_3$; $\rho_3: v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_1$. Lintasan ρ_1 bukan sirkuit. Lintasan ρ_2 merupakan sirkuit karena titik awal dan titik akhir busur berada pada titik yang sama, yaitu titik v_3. Lintasan ρ_3 merupakan sirkuit elementer karena masing-masing titik hanya muncul satu kali, kecuali titik v_1 yang menjadi titik awal yang muncul sebanyak dua kali.

Selanjutnya akan dibahas mengenai suatu graf berdasarkan lintasan pada titik-titiknya.

Suatu graf berarah disebut terhubung kuat jika setiap $i, j \in V$ terdapat suatu lintasan dari i ke j, dengan $i \neq j$. Suatu graf berarah disebut tak terhubung kuat jika tidak terdapat lintasan dari i ke j, dengan $i \neq j$. Berikut ini akan diberikan contoh graf terhubung kuat dan graf tak terhubung kuat.



Gambar 2.4. Graf Berarah Berbobot Dengan Sirkuit



Gambar 2.5. Graf Berarah Berbobot Tanpa Sirkuit

Pada Gambar 2.4 diberikan graf berarah berbobot. Graf tersebut memiliki lima sirkuit yang direpresentasikan oleh $v_1 \to v_1; v_1 \to v_3 \to v_1;\ v_2 \to v_3 \to v_2; v_2 \to v_2;\ v_3 \to v_3$. Akibatnya, pada graf tersebut untuk setiap titik yang berbeda dapat dibentuk sebuah lintasan. Oleh karena itu, graf pada Gambar 2.4 disebut graf berarah berbobot yang terhubung kuat. Sedangkan pada Gambar 2.5 diberikan juga graf berarah berbobot, namun tidak memuat satupun sirkuit. Akibatnya, untuk setiap titik yang berbeda tidak dapat dibentuk suatu lintasan. Oleh karena itu, graf pada Gambar 2.5 disebut graf berarah berbobot tak terhubung kuat.

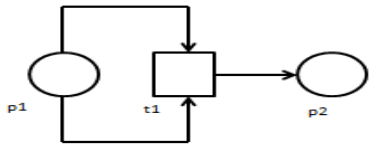
2.3 Petri Net

Petri Net dikenalkan oleh Carl Adam Petri pada tahun 1962. Petri Net berkembang sebagai suatu metode untuk memodelkan, menganalisis dan sebagai kontrol suatu sistem kejadian diskrit. Suatu kejadian (*event*) akan terjadi apabila beberapa keadaan sudah terpenuhi. Kejadian dan keadaan masing-masing dinyatakan dengan transisi dan tempat (*place*). Transisi merupakan kejadian yang menyebabkan perubahan kondisi keadaan (*state*). Tempat berguna sebagai masukan atau keluaran suatu transisi. Tempat sebagai masukan menyatakan keadaan yang harus dipenuhi agar transisi dapat terjadi. Setelah transisi terjadi maka keadaan akan berubah. Tempat yang menyatakan keadaan tersebut adalah keluaran dari transisi. Karakteristik Petri Net sebagai graf merupakan graf bipartit. $\mathcal{G}(V, E)$ merupakan graf bipartit jika $V(\mathcal{G})$ dapat dipartisi menjadi dua himpunan bagian $V_1(\mathcal{G})$ dan $V_2(\mathcal{G})$, sehingga setiap sisi pada graf $\mathcal{G}$ menghubungkan sebuah titik $V_1(\mathcal{G})$ ke $V_2(\mathcal{G})$. Graf bipartit memiliki keadaan khusus yaitu suatu sisi hanya dapat menghubungkan dua titik yang memiliki tipe berbeda. Oleh karena itu, hanya bisa terdapat busur dari suatu tempat ke transisi, dari transisi ke tempat, namun tidak dari tempat ke tempat atau dari transisi ke transisi. Untuk mendapatkan hasil Petri Net, bisa menggunakan beberapa *software* diantaranya WOPED, PIPE, dan lainnya. Pada penelitian ini akan digunakan *software* WOPED.

Graf Petri Net merupakan graf bipartit berbobot. Graf Petri Net kemudian disebut dengan nama Petri Net. Petri Net terdiri dari dua macam titik yaitu lingkaran dan kotak. Lingkaran menyatakan tempat, sedangkan kotak menyatakan transisi. Pada Petri Net terdapat busur, busur disimbolkan dengan panah yang menghubungkan tempat dan transisi (Cassandras, 1993).

Gambar 2.6. Transisi, Tempat (*Place*), Busur (*Arc*)

Petri Net dikatakan *pure* jika tidak mempunyai tempat yang menjadi masukan sekaligus keluaran untuk suatu transisi (Subiono, 2015). Contoh gambar Petri Net sederhana dikatakan *pure* karena tidak ada tempat yang menjadi masukan sekaligus keluaran untuk suatu transisi.



Gambar 2.7. Petri Net sederhana *pure*

Pada suatu Petri Net diperlukan mekanisme yang dapat digunakan untuk mengindikasi mengenai kondisi yang telah terpenuhi. Mekanisme tersebut yaitu token atau tanda. Token atau tanda merupakan sesuatu yang terletak di tempat untuk menyatakan terpenuhi tidaknya suatu kondisi. Token digambar dengan (●).

Berikut ini diberikan definisi Petri Net.

Definisi 2.3 Petri Net terdiri dari 4-*tuple* diantaranya yaitu :

1. P merupakan himpunan berhingga tempat (*place*), $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$,
2. T merupakan himpunan berhingga transisi, $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$,
3. A merupakan himpunan busur (*arc*), $A \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$,
4. w merupakan fungsi bobot, $w : A \rightarrow N$ dengan nilai N yaitu 1,2,3, dan seterusnya.

(Adzkiya, 2008)

Petri Net digambarkan sebagai graf berarah, yaitu suatu graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah. Titik dari Petri Net berupa tempat yang diambil dari himpunan tempat P atau transisi yang diambil dari himpunan transisi T. Pada Petri Net diperbolehkan menggunakan beberapa busur untuk menghubungkan dua titik atau memberikan bobot ke setiap busur yang menyatakan jumlah busur. Struktur ini dikenal dengan struktur *multigraph.*

Representasi Petri Net secara grafik diberi notasi $I\ (t_j)$ dan $O\ (t_j)$ dan yang masing-masing menyatakan $I\ (t_j)$ tempat sebagai masukan dan $O\ (t_j)$ tempat sebagai keluaran untuk transisi. Persamaan secara matematis ditulis sebagai berikut:

$$\mathrm{I}\ (t_j) = \{p_i : (p_i, t_j) \in A\}$$

$$\mathrm{O}\ (t_j) = \{p_i : (t_j, p_i) \in A\}$$

Representasi Petri Net secara grafik diberi notasi $I\ (p_i)$ dan $O\ (t_i)$. dan yang masing-masing menyatakan $I\ (t_j)$ transisi masukan dan $O\ (t_j)$ transisi keluaran untuk tempat. Persamaan secara matematis ditulis sebagai berikut

$$\mathrm{I}\ (p_i) = \{t_j : (t_j, p_i) \in A\}$$

$$\mathrm{O}\ (t_i) = \{t_j : (p_i, t_j) \in A\}$$

Busur yang menghubungkan tempat p_i ke transisi t_j ditulis dengan simbol $p_i \in I\ (t_j)$. Busur yang menghubungkan tempat ke transisi t_j adalah h, ditulis w $(p_i, t_j) = h$. Oleh karena itu, terdapat h busur dari *place* p_i ke transisi t_j atau sebuah busur dengan bobot h.

Transisi pada Petri Net menyatakan kejadian pada sistem kejadian diskrit dan tempat pada Petri Net merepresentasikan kondisi agar kejadian dapat terjadi. Token adalah sesuatu yang diletakkan di tempat yang menyatakan terpenuhi atau tidaknya suatu kondisi. Secara grafik, token digambarkan dengan dot dan diletakkan di dalam tempat. Jika jumlah token lebih dari 5 maka dituliskan dengan angka.

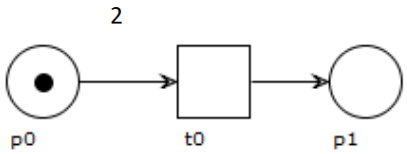
Penanda x pada Petri Net adalah fungsi $x : P \rightarrow \{1,2,...\}$. Penanda dinyatakan dengan vektor yang berisi bilangan bulat positif yang menyatakan jumlah token yaitu $[x = x(p_1), x(p_2), \dots, x(p_n)]^T$. Jumlah elemen x sama dengan banyak tempat Petri Net. Elemen ke-i pada vektor ini merupakan jumlah token pada tempat $p_i, x\ (p_i) \in N = \{0,1,2, \dots\}$. Jumlah token pada tempat adalah bilangan

bulat positif. Petri Net bertanda adalah 5-*tuple* yaitu (P, T, A, w, x_0). (P, T, A, w) adalah Petri Net dan x_0 adalah penanda awal (Adzikya, 2008).

Petri Net dengan waktu (*timed petri net*) dikarakterisasi oleh P, T, A, w, x_0 dan T. P adalah himpunan tempat, T adalah himpunan transisi, A adalah himpunan busur, w adalah bobot masing – masing busur, x_0 adalah keadaan awal token pada setiap tempat dan T adalah vektor yang elemen – elemennya menunjukkan waktu yang diperlukan token berada dalam tempat sebelum transisi aktif. Keadaan (*state*) pada Petri Net disebut penanda Petri Net (Winarni, 2009).

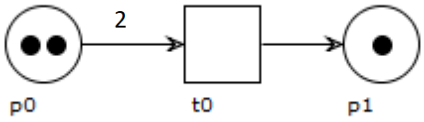
Keadaan (*state*) Petri Net bertanda adalah $X = [x(p_1), x(p_2), \dots, x(p_n)]^T$. Ruang keadaan X pada Petri Net bertanda dengan n-tempat didefinisikan oleh semua vektor berdimensi n dengan elemen – elemennya adalah bilangan bulat postif, sehingga $X = \{0, 1, 2, \dots\}^n$. Jika semua keadaan yang diperlukan sudah terpenuhi maka transisi dapat terjadi. Dalam hal ini keadaan merupakan tempat masukan dari transisi. Bobot busur dari tempat masukan ke transisi menunjukkan jumlah token minimum di tempat agar transisi aktif. Jika semua tempat masukan mempunyai token lebih dari atau sama dengan jumlah token minimum yang dibutuhkan maka transisi aktif.

Transisi $t_j \in T$ pada Petri Net bertanda aktif jika $x(p_i) \geq w(p_i, t_j), \forall p_i \in I(t_j)$.



Gambar 2.8. Contoh transisi tidak aktif

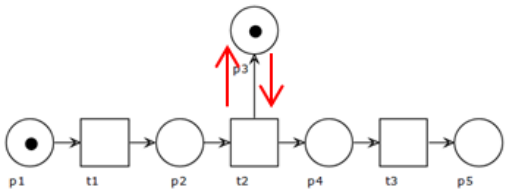
Pada Gambar 2.8, transisi tersebut merupakan transisi tidak aktif karena terlihat dari bentuk Petri Net $I(t_0) = \{p_0\}, x(p_0) = 1$ dan $w(p_0, t_0) = 2$. Untuk transisi t_0 tidak aktif karena $1 = x(p_0) < w(p_{0,}t_0) = 2$. Transisi t_0 akan aktif apabila jumlah token pada tempat p_0 lebih dari atau sama dengan 2.



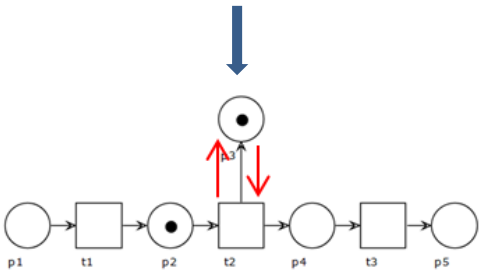
Gambar 2.9. Contoh transisi aktif

Pada Gambar 2.9, transisi tersebut merupakan transisi aktif karena terlihat dari bentuk Petri Net $I(t_0) = \{p_0\}, x(p_0) = 2$ dan $w(p_0, t_0) = 2$. Oleh karena itu, dapat disimpulkan apabila terdapat tempat p_i dan transisi t_j, agar suatu transisi t_j dalam keadaan aktif maka jumlah token pada tempat p_i harus memenuhi paling sedikit sebesar bobot busur yang menghubungkan tempat p_i ke transisi t_j.

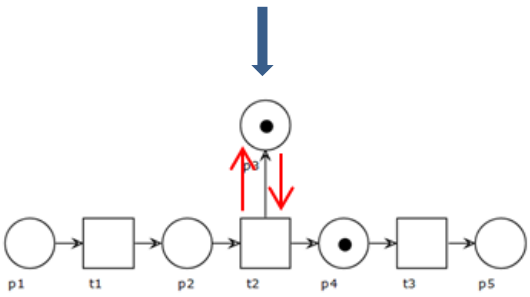
Mekanisme perpindahan dalam memenuhi suatu kondisi dalam Petri Net ditentukan oleh perpindahan token melewati transisi, tempat dan keseluruhan diagram Petri Net. Saat transisi keadaan sudah menjadi aktif maka dalam istilah Petri Net transisi tersebut dapat melakukan *fire* atau disebut dengan istilah *firing*. Berikut contoh penerapan *firing* dalam Petri Net.



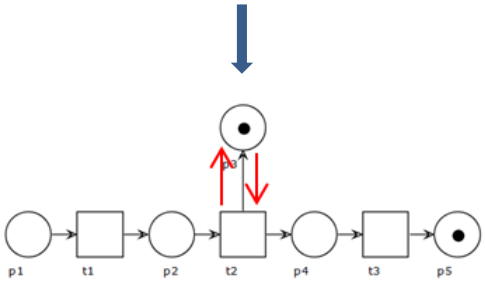
Gambar 2.10. Petri Net dengan penanda awal t_1 aktif



Gambar 2.11. Petri Net dalam keadaan t_1 *fire* dan t_2 aktif



Gambar 2.12. Petri Net dalam keadaan t_2 *fire* dan t_3 aktif



Gambar 2.13. Petri Net dalam keadaan t_3 *fire* dan tidak ada transisi aktif

Alur dari Gambar 2.10 sampai dengan Gambar 2.13 sebagai berikut. Pada Gambar 2.10 terlihat t_1 aktif, namun t_2 tidak aktif karena salah satu masukan tempatnya yaitu p_2 tidak mengandung token. Pada Gambar 2.11, saat t_1 aktif maka terdapat perpindahan token dari tempat p_1 ke tempat p_2. Lalu sekarang terlihat t_2 aktif karena pada kedua tempat masukannya yaitu p_2 dan p_3 terdapat token. Pada Gambar 2.12, saat t_2 aktif maka token pada p_2 dan p_3 akan dipindahkan dan letak token baru akan ada di p_3 dan p_4. Namun pada p_3 token tidak mengalami perubahan karena p_3 dan t_2 membentuk gelang yang artinya p merupakan masukan tempat dan keluaran tempat dari t. Selanjutnya pada Gambar 2.13, transisi t_3 dalam aktif, sehingga mengakibatkan token berpindah dari t_4 ke t_5. Pada akhirnya, terlihat pada diagram Petri Net sudah tidak ada lagi transisi yang dapat diaktifkan sehingga dinamika Petri Net berakhir.

Untuk memudahkan mengerjakan implementasi suatu Petri Net bisa dengan cara merepresentasikan Petri Net dalam notasi matriks. Terdapat dua jenis matriks yang terdapat dalam pengerjaan matriks Petri Net yaitu *backward incidence* dan *forward incidence*. Kedua jenis matriks tersebut masing-masing berkuran $n \times m$ dengan n merupakan jumlah tempat dan m merupakan jumlah transisi, juga elemen matriks ini berisi bilangan bulat positif. Elemen pada matriks *backward*

incidence merupakan bobot busur yang menghubungkan tempat ke transisi sedangkan elemen pada matriks *forward incidence* merupakan bobot busur yang menghubungkan transisi ke tempat. Apabila tidak ada busur yang menghubungkan tempat ke transisi maka bobot busur diisi angka nol.

Matriks *backward incidence* dan matriks *forward incidence* yang merepresentasikan Petri Net adalah matriks berukuran $n \times m$ dengan elemen baris ke-i dan kolom ke-j (Subiono, 2015).

$A_b\ (i,j) = w(p_i, t_j), A_b$ merupakan matriks *backward incidence*

$A_f\ (i,j) = w(t_j, p_i), A_f$ merupakan matriks *forward incidence*

Matriks *backward incidence* bisa digunakan untuk menentukan transisi yang aktif. Jika (p_i) bukan merupakan masukan tempat dari transisi (t_j) yaitu $p_i, \notin I(t_j)$ maka bobot busur dari tempat (p_i) ke transisi (t_j) bernilai nol, karena tidak ada busur yang menghubungkan, ditulis $w(t_j, p_i\ ) = 0$. Oleh karena itu, dapat ditulis dalam notasi vektor sebagai berikut

$$\begin{aligned} m([p_1, \dots\ , p_n]^{\ T}) &\geq w([p_1, \dots\ , p_n]^{\ T}, t_j) \\ &= A_b(:, j) \\ &= A_b e_j. \end{aligned}$$

$A_b(:, j)$ menunjukkan kolom ke-j dari matriks A_b. $e_j$merupakan kolom ke-j matriks identitas berorder m. Transisi aktif dapat dilakukan dengan mencari kolom dari matriks *backward incidence* yang kurang dari atau sama dengan vektor keadaan, dapat ditulis menjadi

$$m \geq A_b e_j.$$

Penanda (m) pada Petri Net, $w([p_1, \dots, p_n]^T, t_j)$ merupakan kolom ke- j matriks *backward incidence* yang bernotasi $A_b(:, j)$, sedangkan $w(t_j, [p_1, \dots, p_n]^T)$ untuk menyatakan kolom ke- j matriks *forward incidence* yang bernotasi $A_f(:, j)$. Dari A_f dan A_b diperoleh

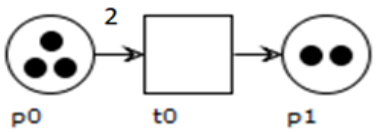
$$\begin{aligned} m'([p_1, \dots, p_n]^T) &= m([p_1, \dots, p_n]^T) - A_b(:, j) + A_f(:, j) \\ &= m([p_1, \dots, p_n]^T) - A_b e_j + A_f e_j \\ &= m([p_1, \dots, p_n]^T) + e_j(-A_b + A_f) \\ &= m([p_1, \dots, p_n]^T) + e_j A \\ &= m([p_1, \dots, p_n]^T) + A e_j, \end{aligned}$$

dengan e_j merupakan kolom ke- j dari matriks berorde m dan $A = A_f - A_b$. Matriks A merupakan matriks *combined incidence* atau matriks *incidence*. Elemen dari matriks A yaitu selisih bobot busur masukan tempat dan busur dari keluaran tempat, dapat ditulis menjadi $A(i, j) = w(t_j, p_i) - w(p_i, t_j)$.

$$m' = m + A_u,$$

dengan u menyatakan vektor kolom yang mempunyai elemen sebanyak m yaitu diperoleh dari kolom matriks identitas (Subiono, 2015).

Contoh 2.3 Berikut diberikan gambar transisi t_1 di*fire*



Gambar 2.14. Contoh sebelum transisi t_1 di*fire*

Diberikan contoh diagram Petri Net, jika terdapat 2 tempat dan 1 transisi maka $i = 2$ dan $= 1$, untuk menentukan transisi yang aktif setelah transisi di*fire* bisa menggunakan penyelesaian sebagai berikut:

Dari Gambar 2.14 didapat keadaan awal Petri Net adalah $m_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Selanjutnya, untuk menghitung matriks *incidence* menggunakan cara

$$A_b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, A_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A = A_f - A_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan persamaan $m' = m + A_u$ diperoleh $m_1 = m_0 + A_u$

$$m_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$m_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

2.4 Konsep Dasar Aljabar Max-Plus

Aljabar max-plus merupakan himpunan $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ dengan $\mathbb{R}$ himpunan semua bilangan *real* yang dilengkapi dengan operasi max dan plus, dinotasikan dengan lambang $\oplus$ dan $\otimes$. Selanjutnya, $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \oplus, \otimes)$ dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{\max}$ dan $-\infty$ dinotasikan dengan ε. Elemen ε merupakan elemen netral terhadap operasi $\oplus$ dan 0 merupakan elemen identitas terhadap operasi $\otimes$. Pada aljabar max-plus terdapat beberapa konsep mendasar yang harus dipahami yaitu mengenai operasi biner, grup, grup komutatif, semigrup, semigrup komutatif, monoid, monoid komutatif, ring, semiring, dan semiring komutatif.

Definisi 2.4.1 Suatu operasi biner $*$ pada suatu himpunan tak kosong S adalah fungsi yang memetakan dari $S \times S$ ke S. Untuk setiap $(a, b) \in S \times S$, $*((a, b))$ dinotasikan sebagai $a * b$ di S. Operasi $*$ pada S bersifat tertutup (Fraleigh, 2003).

Contoh 2.4.1 Operasi penjumlahan pada himpunan $\mathbb{Z}$ merupakan operasi biner.

Definisi 2.4.2 Operasi biner $*$ pada himpunan S dikatakan komutatif, jika dan hanya jika $a * b = b * a$, untuk setiap $a, b \in S$. Operasi biner $*$ pada himpunan S dikatakan assosiatif jika dan hanya jika $(a * b) * c = a * (b * c)$, untuk setiap $a, b, c \in S$ (Fraleigh, 2003).

Contoh 2.4.2 Operasi + merupakan operasi biner pada $\mathbb{Z}$. Himpunan $2\mathbb{Z}$ tertutup terhadap + karena hasil penjumlahan dua bilangan genap merupakan bilangan genap.

Contoh 2.4.3 Diberikan himpunan S. Operasi biner $*$ diberikan dalam tabel berikut.

Tabel 2.1. Operasi biner pada himpunan S yang tidak komutatif

$*$	a	b	c
a	a	c	b
b	a	c	b
c	a	c	b

Karena $a * b = c$, sedangkan $b * a = a$, maka operasi biner $*$ pada S tidak bersifat komutatif.

Contoh 2.4.4 Diberikan himpunan S. Operasi biner $*$ diberikan dalam tabel berikut

Tabel 2.2. Operasi biner pada himpunan S yang tidak assosiatif

$*$	a	b	c
a	d	a	b
b	a	c	b
c	b	d	a

Karena $(b * c) * a = a$, sedangkan $b * (c * a) = c$, maka operasi biner $*$ pada S tidak bersifat assosiatif.

Berikut ini akan dipaparkan definisi grup terhadap suatu operasi biner dan beberapa contohnya.

Definisi 2.4.3 Suatu grup $(G\ *)$ adalah himpunan G, tertutup atas operasi biner $*$, sedemikian sehingga memenuhi aksioma – aksioma berikut.

1. Operasi biner $*$ bersifat assosiatif yaitu untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$.
2. Terdapat suatu elemen identitas $e \in G$, sehingga untuk setiap $e \in G$ berlaku $e * x = x * e = x$.
3. Untuk setiap $a \in G$, terdapat elemen $a^{-1} \in G$ sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

(Fraleigh, 2003)

Contoh 2.4.5 Diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dengan operasi $+$ merupakan operasi penjumlahan di $\mathbb{Z}$. Akan dibuktikan $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan suatu grup.

1. Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$ berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$.
   Oleh karena itu, terdapat $\mathbb{Z}$ dengan operasi $+$ bersifat assosiatif.
2. Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$, terdapat elemen identitas yaitu $0 \in \mathbb{Z}$ sehingga $a + 0 = 0 + a = a$.
3. Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ terdapat invers dari a yaitu $(-a) \in \mathbb{Z}$ sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Berdasarkan Definisi 2.4.3, terbukti bahwa $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan suatu grup.

Definisi 2.4.4 Grup G dikatakan komutatif atau grup Abel jika $a * b = b * a$ untuk setiap $a, b \in G$ (Fraleigh, 2003).

Contoh 2.4.6 Diberikan $\mathbb{Z}$ himpunan bilangan bulat dengan operasi biner $x * y = x + y - 1$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z},*)$ merupakan grup Abel.

1. $x * (y * z) = (x * y) * z$. Diberikan sebarang $x, y, z \in \mathbb{Z}$ berlaku:

$$x * (y * z) = x * (\ y + z - 1)$$

$$= x + (y + z - 1) - 1$$
$$= (x + y - 1) + z - 1$$
$$= (x * y) + z - 1$$
$$= (x * y) * z$$

Jadi, operasi $*$ memenuhi aksioma bersifat assosiatif.

2. Terdapat $e = 1 \in \mathbb{Z}$, sehingga untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$ berlaku:

$$x * 1 = x + 1 - 1 = x$$

dan

$$1 * x = 1 + x - 1 = x.$$

Jadi, setiap elemen $\mathbb{Z}$ mempunyai elemen identitas terhadap operasi $*$ yaitu 1.

3. $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e = 1$ untuk $x \in \mathbb{Z}$. Diberikan sebarang $x \in \mathbb{Z}$, terdapat $2 - x = \mathbb{Z}$ sehingga

Perhatikan bahwa

$$x * (2 - x) = x + (2 - x) - 1$$
$$= 1$$
$$(2 - x) * x = (2 - x) + x - 1$$
$$= 1$$

Jadi, invers dari x terhadap operasi biner $*$ adalah $2 - x \in \mathbb{Z}$, sehingga terbukti setiap elemen di $\mathbb{Z}$ mempunyai invers terhadap operasi $*$.

4. $x * y = y * x$. Diberikan sebarang $x, y \in \mathbb{Z}$ berlaku:

$$x * y = x + y - 1$$
$$= y + x - 1$$
$$= y * x$$

Jadi, operasi $*$ bersifat komutatif.

Berdasarkan Definisi 2.4.4, terbukti bahwa $(\mathbb{Z},*)$ merupakan grup komutatif atau grup Abel.

Definisi 2.4.5 Semigrup merupakan suatu himpunan tak kosong H dengan operasi biner $*$ yang memenuhi kedua aksioma berikut.

1. H bersifat tertutup terhadap operasi $*$, yaitu untuk setiap $a, b \in H$ berlaku $a * b \in H$.

2. Operasi $*$ bersifat assosiatif, untuk setiap $a, b, c \in H$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$.

(Fraleigh, 2003)

Contoh 2.4.7 Diberikan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$, didefinisikan operasi biner $a * b = a + b + ab$. Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{N},*)$ merupakan suatu semigrup.

1. Diberikan sebarang $a, b \in \mathbb{N}$. Karena $a, b \in \mathbb{N}$ dan $ab \in \mathbb{N}$

$$a * b = a + b + ab \in \mathbb{N}$$

   Jadi, $\mathbb{N}$ bersifat tertutup terhadap operasi $*$.

2. Diberikan sebarang $a, b, c \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}(a * b) * c &= (a + b + ab) * c \\ &= (a + b + ab) + c + (a + b + ab)c \\ &= a + b + ab + c + ac + bc + abc \\ a * (b * c) &= a * (b + c + bc) \\ &= a + (b + c + bc) + a(b + c + bc) \\ &= a + b + c + bc + ab + ac + abc\end{aligned}$$

   Jadi, $*$ bersifat assosiatif yaitu untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{N}$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$.

Berdasarkan Definisi 2.4.5, terbukti bahwa $(\mathbb{N},*)$ merupakan suatu semigrup.

Definisi 2.4.6 Jika operasi biner pada semigrup $(S,*)$ tersebut bersifat komutatif, maka semigrup $(S,*)$ disebut juga semigrup komutatif (Fraleigh, 2003).

Contoh 2.4.8 $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan semigrup komutatif.

Definisi 2.4.7 Suatu semigrup $(G, +)$ dikatakan monoid terhadap penjumlahan jika memenuhi syarat – syarat sebagai berikut:

1. $(G, +)$ tertutup terhadap penjumlahan;
2. assosiatif terhadap penjumlahan;
3. mempunyai unsur identitas $e = 0$ terhadap penjumlahan.

(Fraleigh, 2003)

Definisi 2.4.8 Suatu semigrup $(G,\cdot)$ dikatakan monoid terhadap perkalian jika memenuhi syarat-syarat sebagai berikut :

1. $(G,\cdot)$ tertutup terhadap perkalian;
2. assosiatif terhadap perkalian;
3. mempunyai elemen identitas $e = 1$ terhadap perkalian.

(Fraleigh, 2003)

Contoh 2.4.9 Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1,0,1,2, \dots\}$ merupakan operasi biner terhadap perkalian. Akan dibuktikan $(\mathbb{Z},*)$ merupakan monoid.

1. Diberikan sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$

$$a * b \in \mathbb{Z} = ab \in \mathbb{Z}$$

   Jadi, $\mathbb{Z}$ bersifat tertutup terhadap operasi perkalian.

2. Diberikan sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= a * (bc) \\ &= a(bc) \\ &= (ab)c \\ &= (a * b) * c \end{aligned}$$

   Jadi, $*$ bersifat assosiatif terhadap operasi perkalian.

3. Akan ditunjukkan $\mathbb{Z}$ memiliki elemen identitas terhadap operasi $*$ yaitu $e = 1$. Diberikan sebarang $a * \mathbb{Z}$

$$a * 1 = a.1 = a \text{ dan } 1 * a = 1.a = a$$

   Jadi, $e = 1$ adalah elemen identitas terhadap operasi perkalian.

Berdasarkan Definisi 2.4.8, terbukti bahwa $(\mathbb{Z},*)$ merupakan monoid.

Definisi 2.4.9 Suatu ring adalah suatu himpunan tak kosong dengan dua operasi biner yang dinotasikan dengan operasi penjumlahan dan operasi perkalian yang memenuhi aksioma – aksioma berikut:

1. untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku $a + (b + c) = (a + b) + c$;
2. terdapat elemen identitas penjumlahan yaitu $0 \in R$ sehingga untuk setiap $a \in R$ berlaku $a + 0 = 0 + a = a$;
3. untuk setiap $a \in R$ terdapat $-a \in R$ sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$;

4. untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $a + b = b + a$;

   Aksioma 1 sampai 4 merupakan aksioma grup Abel.

5. untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;
6. untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku $a \cdot (b + c) = ab + ac$ atau disebut distributif kiri, juga berlaku $(a + b) \cdot c = ac + bc$ atau disebut distributif kanan.

(Fraleigh, 2003)

Contoh 2.4.10 Misalkan F merupakan himpunan semua fungsi bernilai *real* yaitu $F = \{f | f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$. Jika operasi penjumlahan dan perkalian pada F didefinisikan sebagai berikut:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Akan ditunjukkan $(F, +, \cdot)$ merupakan ring.

1. Diberikan sebarang $f, g, h \in F$, $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\big(f + (g + h)\big)(x) &= f(x) + (g + h)(x)\\ &= f(x) + \big(g(x) + h(x)\big)\\ &= \big(f(x) + g(x)\big) + h(x)\\ &= \big((f + g)(x)\big) + h(x)\\ &= \big((f + g) + h\big)(x)\end{aligned}$$

   Jadi, $f + (g + h) = (f + g) + h$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$.

2. Misalkan $\theta \in F$, dengan $\theta(x) = 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$,

   Karena $(f + \theta)(x) = f(x) + \theta(x) = f(x) + 0 = f(x)$ dan

   $(\theta + f)(x) = \theta(x) + f(x) = 0 + f(x) = f(x)$, θ merupakan elemen identitas terhadap operasi $+$ di F.

3. Diberikan sebarang $f \in F$ terdapat $-f \in F$,

   sehingga $\big(f + (-f)\big)(x) = f(x) - f(x) = 0 = \theta(x)$ dan

   $\big((-f) + f\big)(x) = -f(x) + f(x) = 0 = \theta(x)$

   Jadi, $-f$ adalah invers dari f terhadap operasi penjumlahan di F.

4. Diberikan sebarang $f, g \in F$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x)\\ &= g(x) + f(x)\end{aligned}$$

$$= (g + f)(x)$$

Jadi, operasi penjumlahan bersifat komutatif di F.

Dari 1 sampai 4, terbukti $(F, +)$ merupakan grup Abel.

5. Diberikan sebarang $f, g, h \in F$ dan $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\big(f(gh)\big)(x) &= f(x)\big(gh(x)\big)\\ &= f(x)\big(g(x)h(x)\big)\\ &= \big(f(x)g(x)\big)h(x)\\ &= (fg)(x)h(x)\\ &= (fgh)(x)\end{aligned}$$

Jadi, $f(gh) = fg(h)$, untuk setiap $f, g, h \in F$.

6. Diberikan sebarang $f, g, h \in F$

$$\begin{aligned}\big(f(g + h)\big)(x) &= f(x)(g + h)(x)\\ &= f(x)\big(g(x) + h(x)\big)\\ &= f(x)g(x) + f(x)h(x)\\ &= fg(x) + fh(x)\\ &= (fg + fh)(x)\end{aligned}$$

Jadi, $f(g + h) = fg + fh$, untuk $f, g, h \in F$.

Berdasarkan Definisi 2.4.9, dari pembuktian 1 sampai 6 terbukti bahwa $(F, +, \cdot)$ merupakan ring.

Definisi 2.4.10 Suatu semiring $(S, +, \cdot)$ merupakan suatu himpunan tak kosong S yang disertai dengan dua operasi biner $+$ dan $\cdot$ yang memenuhi aksioma berikut.

1. $(S, +)$ merupakan semigrup komutatif dengan elemen netral 0, yaitu untuk setiap $x, y, z \in S$ memenuhi

$$x + \mathrm{y} = y + x$$
$$(x + y) + z = x + (y + z)$$
$$x + 0 = 0 + x = x$$

2. $(S, \cdot)$ merupakan semigrup dengan elemen satuan 1, yaitu untuk setiap $x, y, z \in S$ memenuhi

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

3. Elemen netral 0 terhadap operasi $\cdot$ yaitu untuk setiap $x \in S$ memenuhi

$$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$$

4. Operasi $\cdot$ bersifat distributif terhadap $+$, yaitu untuk setiap $x, y, z \in S$ memenuhi

$$(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$$
$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

(Fraleigh, 2003)

Definisi 2.4.11 Semiring komutatif didefinisikan sebagai suatu himpunan tak kosong S dengan operasi penjumlahan dan perkalian. Jika $(S,\cdot)$ bersifat komutatif sehingga untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $a \cdot b = b \cdot a$ (Fraleigh, 2003).

Contoh 2.4.11 Diberikan $\mathbb{R}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian. Dinotasikan dengan $(\mathbb{R}, +,\cdot)$. Akan dibuktikan $(\mathbb{R}, +,\cdot)$ merupakan semiring dan semiring komutatif.

1. $(\mathbb{R}, +)$ merupakan semigrup komutatif dengan elemen netral 0

$$0 + a = a + 0 = a$$

2. $(\mathbb{R},\cdot)$ merupakan semigrup dengan elemen satuan 1

$$1 \cdot a = a \cdot 0 = a$$

3. Elemen netral 0 terhadap operasi $\cdot$ untuk setiap $a \in \mathbb{R}$ memenuhi

$$0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$$

4. Operasi $\cdot$ distributif terhadap $+$ yaitu untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{R}$ memenuhi

$$(a + b) \cdot c = ac + bc \text{ dan } a \cdot (b + c) = ab + bc$$

Dari 1 sampai 4 terbukti bahwa $(\mathbb{R}, +,\cdot)$ merupakan semiring.

5. Untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$ berlaku $a \cdot b = b \cdot a$.

Berdasarkan Definisi 2.4.10 dan Definisi 2.4.11, terbukti bahwa $(\mathbb{R}, +,\cdot)$ merupakan semiring komutatif.

2.5 Aljabar Max-Plus

Pada bagian ini akan membahas definisi keterkaitan aljabar max-plus terhadap aksioma semiring komutatif. Berikut ini diberikan definisi mengenai aljabar max-plus.

Definisi 2.5.1 Aljabar max-plus yaitu himpunan $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ dengan $\mathbb{R}$ merupakan himpunan semua bilangan *real* dan $\varepsilon = -\infty$ dan $e = 0$. Pada R_ε didefinisikan operasi untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}_\varepsilon$

$$a \oplus b = \max\{a, b\} \text{ dan } a \otimes b = a + b$$

Operasi $\oplus$ dibaca o-*plus*, operasi $\otimes$ dibaca o-*times* dan penulisan $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ ditulis sebagai $\mathbb{R}_{\max}$. Didefinisikan juga bahwa $\max(a, \varepsilon) = \max(\varepsilon, a) = a$ dan $a + \varepsilon = \varepsilon + a = \varepsilon$ sehingga untuk setiap $a \in \mathbb{R}_\varepsilon$ dapat dituliskan

$$a \oplus \varepsilon = \varepsilon + a = a \text{ dan } a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$$

(Bacelli dkk., 2001)

Contoh 2.5.1 Contoh penggunaan operasi biner dalam aljabar max-plus.

a. $1 \oplus 7 = \max\ (1,7) = 7$
b. $1 \otimes 7 = 1 + 7 = 8$
c. $4 \oplus e = \max\ (4,0) = 4$
d. $4 \otimes e = 4 + 0 = 4$
e. $\varepsilon \oplus 3 = \max\ (-\infty, 3) = 3$
f. $\varepsilon \otimes 3 = (-\infty) + 3 = -\infty = \varepsilon$

Definisi 2.5.2 Aljabar max-plus didefinisikan yaitu $(\mathbb{R}_{\max}, \oplus, \otimes)$ merupakan semiring komutatif dengan elemen netral ε dan elemen satuan $e = 0$, karena setiap $x, y, z \in \mathbb{R}_{\max}$, memenuhi aksioma – aksioma berikut.

1. Langkah pertama akan dibuktikan $(\mathbb{R}_{\max}, \oplus, \otimes)$ merupakan semiring.
   a. Pembuktian pertama, akan dibuktikan $(\mathbb{R}_{\max}, \oplus)$ merupakan monoid komutatif.

      Untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}_{\max}$ memenuhi:

      i. Bersifat komutatif pada operasi $\oplus$ di $\mathbb{R}_{\max}$, yaitu:

         $x \oplus y = \max(x, y) = y \oplus x.$

      ii. Operasi $\oplus$ bersifat assosiatif pada di $\mathbb{R}_{\max}$, yaitu:

         $(x \oplus y) \oplus z = \max(\max(x, y), z) = \max(x, y, z)$

$$= \max(x, \max(y, z)) = x \oplus (y \oplus z).$$

iii. Terdapat elemen netral $\varepsilon = -\infty \in \mathbb{R}_{\max}$ sedemikian sehingga $x \oplus \varepsilon = \max(x, -\infty) = \max(-\infty, x) = x$. ($\varepsilon$ merupakan elemen netral pada ($\mathbb{R}_{\max}$,$\oplus$)).

Berdasarkan Definisi 2.4.5 mengenai aksioma semigrup dan Definisi 2.4.7 mengenai aksioma monoid dengan operasi yang bersifat komutatif, terbukti ($\mathbb{R}_{\max}$,$\oplus$) merupakan monoid komutatif dengan elemen netral $\varepsilon = -\infty$.

b. Pembuktian kedua, akan dibuktikan ($\mathbb{R}_{\max}$,$\otimes$) merupakan semigrup. Untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}_{\max}$ memenuhi:

i. Operasi $\otimes$ bersifat assosiatif pada di $\mathbb{R}_{\max}$, yaitu:
$(x \otimes y) \otimes z = (x + y) + z = x + (y + z) = x \otimes (y \otimes z)$.

ii. Terdapat elemen identitas $e = 0 \in \mathbb{R}_{\max}$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in \mathbb{R}_{\max}$ berlaku:
$x \otimes e = x + 0 = 0 + x = e \otimes x = x$.

Berdasarkan Definisi 2.4.7 mengenai aksioma monoid, ($\mathbb{R}_{\max}$,$\otimes$) terbukti merupakan monoid.

c. Pembuktian ketiga, akan dibuktikan operasi $\otimes$ bersifat distributif terhadap operasi $\oplus$. Untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}_{\max}$ memenuhi :

i. Bersifat distributif kanan, yaitu $(x \oplus y) \otimes z = \max(x, y) + z = \max(x + z, y + z) = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)$.

ii. Bersifat distributif kiri, yaitu $x \otimes (y \oplus z) = \mathrm{x} + \max(\mathrm{y}, z) = \max(x + y, x + z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$.

Berdasarkan Definisi 2.4.11, terbukti bahwa ($\mathbb{R}_{\max}$,$\oplus$,$\otimes$) merupakan semiring.

2. Langkah kedua akan dibuktikan ($\mathbb{R}_{\max}$,$\oplus$,$\otimes$) merupakan semiring komutatif.

a. Pembuktian pertama, akan dibuktikan ($\mathbb{R}_{\max}$,$\oplus$,$\otimes$) merupakan semiring. Telah diberi pembuktian pada bagian (1) bahwa ($\mathbb{R}_{\max}$,$\oplus$,$\otimes$) merupakan semiring.

b. Pembuktian kedua, akan dibuktikan ($\mathbb{R}_{\max}$,$\otimes$) bersifat komutatif.

Diberikan sebarang $x, y \in \mathbb{R}_{\max}$ sedemikian sehingga $x \otimes y = x + y = y + x = y \otimes x$. Oleh karena itu, terbukti $x, y \in \mathbb{R}_{\max}$ pada operasi $\otimes$ bersifat komutatif.

(Subiono, 2015)

Berdasarkan Definisi 2.4.10 mengenai semiring dan Definisi 2.4.11 mengenai semiring komutatif. Pada pembuktian (1) dan (2) terbukti bahwa $(\mathbb{R}_{\max}, \oplus, \otimes)$ merupakan semiring komutatif.

2.5.1 Operasi Dasar Matriks Pada Aljabar Max-Plus

Diberikan himpunan dari matriks berukuran $n \times m$ atas $\mathbb{R}_{\max}$ dalam aljabar max-plus dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{\max}^{n \times m}$. Untuk $n, m \in \mathrm{N}$ dengan $n, m \neq 0$ didefinisikan $n = \{1,2, \dots, n\}$ dan $m = \{1,2, \dots, m\}$. Elemen $A \in \mathbb{R}_{\max}$ baris ke-i kolom ke-j dinotasikan oleh $a_{i,j}$ untuk $i \in n$ dan $j \in m$. Matriks A ditulis sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix}.$$

Terkadang elemen $a_{i,j}$ dinotasikan sebagai $[A]_{i,j}$ dengan $i \in n$ dan $j \in m$.

Definisi 2.5.1.1 Penjumlahan matriks $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times m}$ dinotasikan $A \oplus B$ didefinisikan oleh $[A \oplus B]_{i,j} = a_{i,j} \oplus a_{i,j} = \max\{a_{i,j}, b_{i,j}\}$ untuk $i \in n$ dan $j \in m$ (Subiono, 2015).

Contoh 2.5.1.1 Diberikan matriks $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times m}$ dengan matriks $A = \begin{bmatrix} e & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ dan matriks $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 6 & \varepsilon \end{bmatrix}$.

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} e \oplus 4 & 1 \oplus -1 \\ 2 \oplus 6 & 5 \oplus \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} \max\{e, 4\} & \max\{1, -1\} \\ \max\{2,6\} & \max\{5, \varepsilon\} \end{bmatrix}$$

$$[A \oplus B]_{1,1} = e \oplus 4 = \max\{0,4\} = 4$$

$$[A \oplus B]_{1,2} = 1 \oplus -1 = \max\{1, -1\} = 1$$

$$[A \oplus B]_{2,1} = 2 \oplus 6 = \max\{2,6\} = 6$$

$$[A \oplus B]_{2,2} = 5 \oplus \varepsilon = \max\{5, -\infty\} = 5$$

Dengan menggunakan notasi matriks didapat

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

Definisi 2.5.1.2 Untuk $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times m}$ berlaku sifat komutatif $A \oplus B = B \oplus A$, sebab $[A \oplus B]_{i,j} = \max\{a_{i,j}, b_{i,j}\} = \max\{b_{i,j}, a_{i,j}\} = [B \oplus A]_{i,j}$ untuk $i \in n$ dan $j \in m$ (Subiono, 2015).

Contoh 2.5.1.2 Diberikan matriks $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times m}$ dengan matriks $A = \begin{bmatrix} e & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ dan matriks $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 6 & \varepsilon \end{bmatrix}$. Akan dibuktikan $A \oplus B = B \oplus A$. Seperti Contoh 2.13 telah diperoleh

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B \oplus A = \begin{bmatrix} 4 \oplus e & -1 \oplus 1 \\ 6 \oplus 2 & \varepsilon \oplus 5 \end{bmatrix}$$

$$B \oplus A = \begin{bmatrix} \max\{4, e\} & \max\{-1,1\} \\ \max\{6,2\} & \max\{\varepsilon, 5\} \end{bmatrix}$$

$$[B \oplus A]_{1,1} = 4 \oplus e = \max\{4,0\} = 4$$

$$[B \oplus A]_{1,2} = -1 \oplus 1 = \max\{-1,1\} = 1$$

$$[B \oplus A]_{2,1} = 6 \oplus 2 = \max\{6,2\} = 6$$

$$[B \oplus A]_{2,2} = \varepsilon \oplus 5 = \max\{-\infty, 5\} = 5$$

Dengan menggunakan notasi matriks didapat

$$B \oplus A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} = A \oplus B.$$

Berdasarkan Definisi 2.5.1.2 terbukti bahwa $A \oplus B = B \oplus A$.

Definisi 2.5.1.3 Untuk $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times m}$ dan skalar $\alpha \in \mathbb{R}_{\max}$ perkalian $\alpha \otimes A$ didefinisikan sebagai $[\alpha \otimes A]_{i,j} = \alpha \otimes a_{i,j}$ untuk $i \in n$ dan $j \in m$ (Subiono, 2015).

Contoh 2.5.1.3 Diberikan matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times m}$ dan $\alpha \in \mathbb{R}_{\max}$ dengan $A = \begin{bmatrix} e & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ dan $\alpha = 5$.

$$\alpha \otimes A = \begin{bmatrix} 5 \otimes e & 5 \otimes 1 \\ 5 \otimes 2 & 5 \otimes 5 \end{bmatrix}$$

$$\alpha \otimes A = \begin{bmatrix} 5+0 & 5+1 \\ 5+2 & 5+5 \end{bmatrix}$$

$$[\alpha \otimes A]_{1,1} = 5 \otimes e = 5 + 0 = 5$$

$$[\alpha \otimes A]_{1,2} = 5 \otimes 1 = 5 + 1 = 6$$

$$[\alpha \otimes A]_{2,1} = 5 \otimes 2 = 5 + 2 = 7$$

$$[\alpha \otimes A]_{2,2} = 5 \otimes 5 = 5 + 5 = 10$$

Dengan menggunakan notasi matriks didapat

$$\alpha \otimes A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}.$$

Definisi 2.5.1.4 Untuk matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times p}$ dan $B \in \mathbb{R}_{\max}^{p\times m}$, perkalian matriks $A \otimes B$ didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned} [A \otimes B]_{i,j} &= \bigoplus_{k=1}^{p} a_{i,k} \otimes b_{k,j} \\ &= \max_{k\in p}\{a_{i,k} + b_{k,j}\}, \end{aligned}$$

Untuk $i \in n$, $k \in p$ dan $j \in m$. Perkalian matriks ini serupa dalam perkalian matriks aljabar biasa, simbol $\oplus$ diganti dengan max sedangkan $\otimes$ diganti dengan $+$ (Subiono, 2015).

Contoh 2.5.1.4 Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} e & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ dan matriks $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 6 & \varepsilon \end{bmatrix}$. Akan ditemukan hasil dari $A \otimes B$.

$[A \otimes B]_{1,1} = e \otimes 4 \oplus 1 \otimes 6 = \max\{0+4,\ 1+6\} = \max\{4,7\} = 7$

$[A \otimes B]_{1,2} = e \otimes -1 \oplus 1 \otimes \varepsilon = \max\{0+(-1),\ 1+(-\infty) = \max\{-1,-\infty\} = -1$

$[A \otimes B]_{2,1} = 2 \otimes 4 \oplus 5 \otimes 6 = \max\{2+4,\ 5+6\} = \max\{6,11\} = 11$

$[A \otimes B]_{2,2} = 2 \otimes -1 \oplus 5 \otimes \varepsilon = \max\{2+(-1),\ 5+(-\infty) = \max\{1,-\infty\} = 1$

Dengan menggunakan notasi matriks didapat

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}.$$

Contoh 2.5.1.5 Diberikan matriks $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 6 & \varepsilon \end{bmatrix}$ dan matriks $A = \begin{bmatrix} e & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$. Akan ditemukan hasil dari $B \otimes A$.

$[B \otimes A]_{1,1} = 4 \otimes e \oplus -1 \otimes 5 = \max\ \{0 + 4, -1 + 5\} = \max\{4,4\} = 4$

$[B \otimes A]_{1,2} = 4 \otimes 1 \oplus -1 \otimes 5 = \max\ \{4 + 1, -1 + 5\} \quad = \max\{5,4\} = 5$

$[B \otimes A]_{2,1} = 6 \otimes e \oplus \varepsilon \otimes 2 = \max\ \{6 + 0,\ (-\infty) + 6\} = \max\{6, -\infty\} = 6$

$[B \otimes A]_{2,2} = 6 \otimes 1 \oplus \varepsilon \otimes 5 = \max\ \{6 + 1,\ (-\infty) + 5 = \max\{7, -\infty\}\ = 7$

Dengan menggunakan notasi matriks didapat

$$B \otimes A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan Contoh 2.5.1.4 dan Contoh 2.5.1.5 didapatkan hasil perkalian

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 11 & 1 \end{bmatrix} \neq B \otimes A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Didapat kesimpulan bahwa operasi $\otimes$ matriks tidak selalu bersifat komutatif.

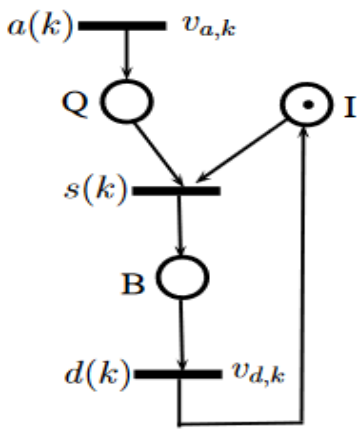
Definisi 2.5.1.5 Untuk sebarang matriks A, B, dan C dengan ukuran yang bersesuaian dan operasi matriks terdefinisi terdapat beberapa sifat yang berlaku yaitu:

1. $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$;
2. $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$;
3. $A \otimes (B \oplus C) = (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$;
4. $(A \oplus B) \otimes C = (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$;
5. $A \oplus A = A$.

(Subiono, 2015)

2.6 Model Aljabar Max-Plus dari Petri Net dengan Waktu

Model aljabar max-plus dari Petri Net dengan waktu untuk sistem antrian sederhana. Berikut gambar Petri Net dari sistem antrian sederhana yang dikaitkan dengan waktu (Subiono, 2015).



Gambar 2.15. Petri Net dengan waktu

Pada Gambar 2.15, bila $a(k)$ menyatakan waktu kedatangan pelanggan saat yang ke-k, $v_{a,k}$ menyatakan lamanya kedatangan pelanggan saat yang ke-k, $s(k)$ menyatakan waktu pelayanan dimulai saat yang ke-k, $d(k)$ menyatakan waktu pelanggan meninggalkan pelayanan saat yang ke-k dan $v_{d,k}$ menyatakan lamanya pelanggan meninggalkan pelayanan saat yang ke-k, sehingga didapat persamaan

$$
\begin{aligned}
a(k) &= v_{a,k} + a(k-1) && k = 1,2,\ldots \\
s(k) &= \max\{a(k), d(k-1)\} && k = 1,2,\ldots \\
d(k) &= v_{d,k} + s(k) && k = 1,2,\ldots \\
&= v_{d,k} + \max\{a(k), d(k-1)\} \\
&= \max\{(v_{d,k} + v_{a,k}) + a(k-1), v_{d,k} + d(k-1)\}
\end{aligned}
$$

Dengan menggunakan notasi aljabar max-plus didapat persamaan matriks

$$\begin{bmatrix} a(k) \\ d(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{a,k} & c \\ v_{d,k} \otimes v_{a,k} & v_{d,k} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a(k-1) \\ d(k-1) \end{bmatrix}, \qquad (2.6.)$$

dengan c yang dipilih supaya $(v_{a,k} \otimes a(k-1)) \oplus (c \otimes d(k-1)) = v_{a,k} \oplus a(k-1)$, untuk $k = 1,2,3, \ldots$ dan keadaan awal $a(0) = d(0) = 0$.

Persamaan 2.6. merupakan bentuk aljabar max-plus dari sistem model antrian dengan satu server. Keadaan $a(k)$ dan $d(k)$ bergantung dengan nilai dari $v_{a,k}$ dan $v_{d,k}$ untuk $k = 1,2,3, \ldots$ dengan $v_{a,k}$ dan $v_{d,k}$ merupakan bilangan real positif.

III. METODOLOGI PENELITIAN

Bagian ini akan membahas mengenai metodologi penelitian yang digunakan untuk menentukan model petri net yang dapat dibentuk dengan matriks *incidence* berguna untuk menentukan keadaan selanjutnya, lalu akan ditentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks *incidence*, kemudian akan dianalisis dengan perhitungan estimasi waktu proses pengajuan kredit.

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini adalah dilakukan pada semester ganjil tahun akademik 2021/2022, bertempat di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

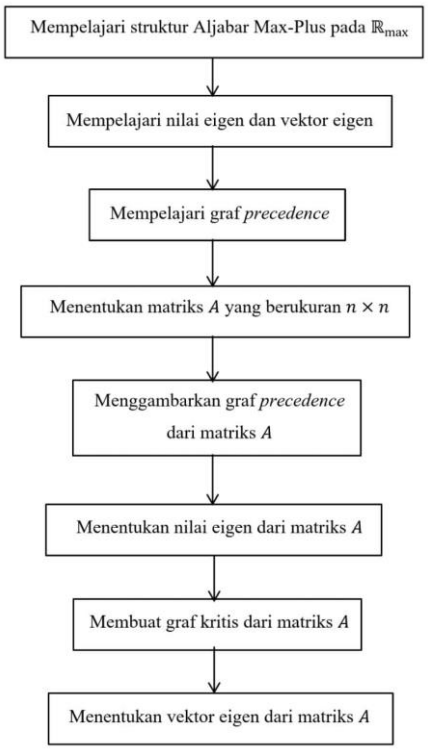
Bagian ini akan membahas tahapan-tahapan penelitian yang akan dilakukan. Dalam penelitian ini, dilakukan teknik pengumpulan data menggunakan teknik observasi dan wawancara langsung sehingga didapat alur proses pengajuan kredit. Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian adalah sebagai berikut:

1. Hubungan Aljabar Max-Plus dengan Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Adapun langkah-langkah untuk mengetahui hubungan Aljabar Max-Plus dengan Nilai Eigen dan Vektor Eigen sebagai berikut.

a. mempelajari struktur Aljabar Max-Plus;
b. mempelajari nilai eigen dan vektor eigen;
c. mempelajari graf *precedence*;
d. membuat matriks yang berukuran $n \times n$;
e. menggambarkan graf *precedence* dari matriks A;
f. menentukan nilai eigen dari matriks A;
g. membuat sirkuit kritis atau graf kritis dari matriks A;
h. menentukan vektor eigen dari matriks A.

Dalam diagram berikut diberikan tahapan penelitian untuk memahami konsep nilai eigen dan vektor eigen pada Aljabar Max-Plus sebagai berikut:



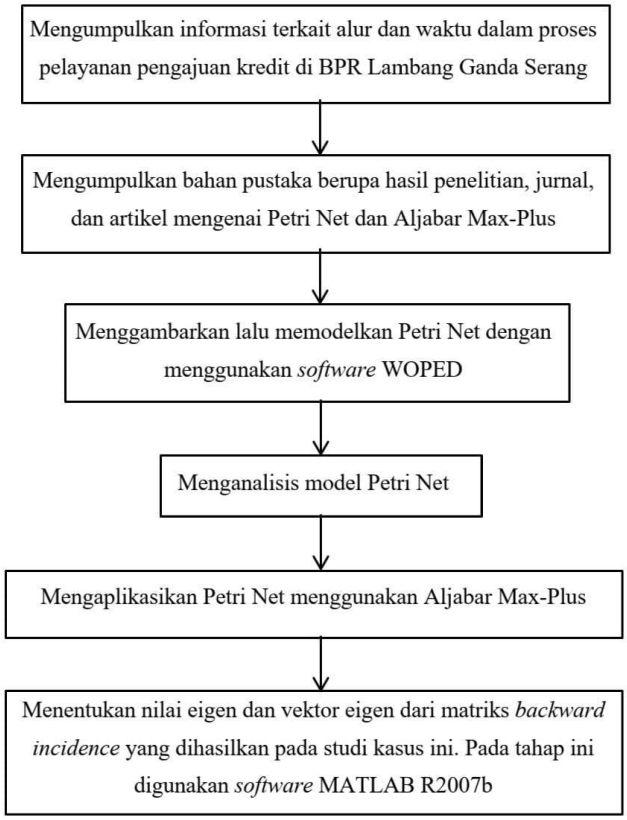
Gambar 3.1. Diagram tahapan penelitian untuk memahami konsep nilai eigen dan vektor eigen pada Aljabar Max-Plus

2. Aplikasi Petri Net dan Aljabar Max-Plus pada Proses Pengajuan Kredit Nasabah Bank Perkreditan Rakyat Lambang Ganda Serang

Adapun langkah-langkah untuk mengaplikasikan Petri Net dan Aljabar Max-Plus pada Proses Pengajuan Kredit Nasabah Bank Perkreditan Rakyat Lambang Ganda Serang sebagai berikut:

a. mengumpulkan informasi terkait alur dan waktu dalam proses pelayanan pengajuan kredit di BPR Lambang Ganda Serang;
b. mengumpulkan bahan pustaka berupa hasil penelitian, jurnal, dan artikel mengenai Petri Net dan Aljabar Max-Plus;
c. menggambarkan lalu memodelkan Petri Net dengan menggunakan *software* WOPED;
d. menganalisis model Petri Net;
e. mengaplikasikan Petri Net menggunakan Aljabar Max-Plus;
f. menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks *backward incidence* yang dihasilkan pada studi kasus ini. Pada tahap ini digunakan *software* MATLAB R2007.

Dalam diagram tahapan untuk mengaplikasikan Petri Net dan Aljabar Max-Plus pada Proses Pengajuan Kredit Nasabah Bank Perkreditan Rakyat Lambang Ganda Serang sebagai berikut.



Gambar 3.2. Diagram tahapan untuk mengaplikasikan Petri Net dan Aljabar Max-Plus pada Proses Pengajuan Kredit Nasabah Bank Perkreditan Rakyat Lambang Ganda Serang.

V. KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan maka diperoleh suatu matriks $\mathbb{R}_{\max}$ bersifat tidak tereduksi (*irreducible*) apabila pada matriks $\mathbb{R}_{\max}$ dapat direpresentasikan ke dalam bentuk graf *precedence* yang dinotasikan dengan simbol $\mathcal{G}(A)$.

Skalar $\lambda \in \mathbb{R}_{\max}$ disebut nilai eigen max-plus A jika terdapat suatu vektor $v \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ dengan $\vec{v}_{n\times 1} \neq \varepsilon$ sehingga $A \otimes \vec{v} = \lambda_{\max} \otimes \vec{v}$. Vektor $\vec{v}$ disebut vektor eigen max-plus matriks A yang bersesuaian dengan λ.

Suatu metode untuk memodelkan, menganalisis dan sebagai kontrol suatu sistem kejadian diskrit disebut Petri Net. Proses pengajuan kredit nasabah Bank Perkreditan Rakyat Lambang Ganda Serang yang dianalisis menggunakan Petri Net menghasilkan 12 tempat, 8 transisi, 5 operator dan 22 busur. Untuk memudahkan mengerjakan implementasi dari analisis Petri Net tersebut dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks. Tempat merupakan baris dari matriks, sedangkan transisi merupakan kolom dari matriks. Matriks yang dapat dibentuk yaitu matriks *backward incidence* dan matriks *forward incidence*. Matriks *backward incidence* dapat digunakan untuk menentukan transisi yang aktif.

Dari hasil analisis dengan menggunakan Aljabar Max-Plus, diperoleh satu kali proses pengajuan kredit nasabah di Bank Perkreditan Rakyat Lambang Ganda Serang dari nasabah datang sampai nasabah mendapatkan kredit bahwa nasabah bank yang melengkapi berkas persyaratan lebih cepat selesai dengan membutuhkan waktu 140 menit atau 2 jam 20 menit. Sedangkan nasabah bank yang belum melengkapi berkas persyaratan membutuhkan waktu 190 menit atau 3 jam 10 menit.

Pada penelitian ini dengan studi kasus proses pengajuan kredit nasabah Bank Perkreditan Rakyat Lambang Ganda Serang, khususnya pada matriks *backward incidence* diperoleh nilai eigen 1, matriks tersebut bersifat *irreducible*.

5.2 Saran

Penelitian ini dapat dilanjutkan dengan menambahkan nasabah bank untuk menentukan waktu selanjutnya, karena pada penelitian ini hanya difokuskan pada satu orang nasabah bank.

DAFTAR PUSTAKA

Adzkiya, D. 2008. *Membangun Petri Net Lampu Lalu Lintas Dan Simulasinya.* Tesis Magister Matematika. Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

Bacelli, F.C.G., Oldser, G.J., and Quadrat, J.P. 2001. *Synchronization and Linearity: An Algebra for Discrete Even System*. Wiley-Interscience, New York.

Cassandras, C.G. 1993. *Discret Event System : Modeling and Perfomance Analysis*. Aksen Assosiates Incorporated Publishers, Boston.

Farlow, K.G. 2009. *Max Plus Algebra*. Virginia Polyechnic Institute and State University.

Gross, D., and Harris, C.M. 1998. *Fundamental of Queuing Theory.* 3rd Edition. John Wiley, Canada.

Fraleigh, J.B. 2003. *A First Course in Algebra*. 7th Edition. Person Education, USA.

Harju, T. 2012. *Graph Theory*. Finland. Departement of Mathematics University of Turku.

Kakiay, T.J. 2004. *Dasar Teori Antrian untuk Kehidupan Nyata.* Andi, Yogyakarta.

Munir, R. 2005. *Matematika Diskrit*. Informatika Bandung, Bandung.

Mustofani, D. 2012. *Model Antrian Nasabah Bank dengan Menggunakan Aljabar Petri Net.* Insitut Teknologi Surabaya.

Rudhito, M.A. 2016. *Aljabar Max-Plus dan Penerapannya*. Ed. Ke-8. Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.

Samuel, W. 2008. *Matematika Diskrit*. Graha Ilmu, Yogyakarta.

Siang, J. 2002. *Matematika Diskrit*. Graha Ilmu, Yogyakarta.

Schutter De Bart, Boom De Van, Xu Jia, & Farahari. S. S. 2020. *Analysis and control of max-plus linear discrete-event systems: An introduction*. Discrete Event Dynamic System. **30**:25-54.

Subiono. 2015, *Aljabar Min-Max Plus dan Terapannya*, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

Thomas, F., and Martin, S. 2014. *WoPeD – An Educational Tool for Workflow Nets.* Cooperative State University (DHBW) Karlsruhe, Germany.

Wang, J. 2007. *Petri Nets for Dynamic Event-Driven System Modeling.* Monmounth University.

Wattimena F. N. 2012. Aplikasi Petri Net Sistem Pembayaran Tagihan Listrik PT. PLN (Persero) Rayon Ambon Timur. *Jurnal Barekeng*. Ambon: FMIPA UNPATTI. **6**(1): 23-30.

Winarni. 2009. Penjadwalan Jalur Bus dalam Kota dengan Aljabar Max-Plus. Tesis Magister. ITS, Surabaya.