PENERAPAN KONSEP HIMPUNAN KESAT (*ROUGH SET*) PADA STRUKTUR GRUP

Skripsi

Oleh

ANANTO ADI NUGRAHA

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2021

ABSTRACT

THE IMPLEMENTATION OF ROUGH SET ON A GROUP STRUCTURE

By

Ananto Adi Nugraha

Given a non-empty set U and an equivalence relation R on U. The pair (U, R) is called an approximation space. The equivalence relation R on U produces disjoint partitions called equivalence classes. If given subset $X \subseteq U$, then it can be obtained lower approximation and upper approximation of X. If the lower approximation and the upper approximation of X are not the same, then X is called a rough set. On the rough set X, the binary operation is defined so that X is a rough group. In this research, several characteristics of the rough group are discussed. Next, given an example of the construction of the commutative and non-commutative rough group. In addition, the centralizer and center of the rough group are determined.

Key Word: *Lower Approximation, Upper Approximation, Rough Set, Rough Group, Centralizer, and Center*

ABSTRAK

PENERAPAN KONSEP HIMPUNAN KESAT (*ROUGH SET*) PADA STRUKTUR GRUP

Oleh

Ananto Adi Nugraha

Diberikan himpunan tak kosong U dan relasi ekuivalensi R pada U. Pasangan (U, R) disebut ruang aproksimasi. Relasi ekuivalensi pada himpunan U menghasilkan partisi-partisi yang saling lepas yang disebut kelas ekuivalensi. Jika diberikan himpunan bagian $X \subseteq U$, maka dapat diperoleh aproksimasi bawah dan aproksimasi atas dari X. Jika aproksimasi bawah dan aproksimasi atas dari X tidak sama, maka X merupakan himpunan kesat. Pada himpunan kesat X, didefinisikan operasi biner sehingga X merupakan grup kesat. Pada penelitian ini, dibahas beberapa sifat grup kesat. Selanjutnya, diberikan contoh konstruksi grup kesat komutatif dan grup kesat non-komutatif. Selain itu, ditentukan *centralizer* dan *center* dari suatu grup kesat.

Kata Kunci: *Aproksimasi Bawah, Aproksimasi Atas, Himpunan Kesat, Grup Kesat, Centralizer, dan Center*

PENERAPAN KONSEP HIMPUNAN KESAT (*ROUGH SET*) PADA STRUKTUR GRUP

ANANTO ADI NUGRAHA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat Untuk Mencapai Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2021

Judul Skripsi	:	**PENERAPAN KONSEP HIMPUNAN KESAT (*ROUGH SET*) PADA STRUKTUR GRUP**
Nama Mahasiswa	:	***Ananto Adi Nugraha***
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**1717031081**
Jurusan	:	**Matematika**
Fakultas	:	**Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.	**Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.**
NIP. 19840627 200604 2 001	NIP. 19720227 199802 1 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	: **Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.**	....
Sekretaris	: **Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	: **Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, M.T.
NIP 19740705 200003 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **16 Juli 2021**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : **Ananto Adi Nugraha**

Nomor Pokok Mahasiswa : **1717031081**

Jurusan : **Matematika**

Judul Skripsi : **Penerapan Konsep Himpunan Kesat (*Rough Set*) pada Struktur Grup**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, Agustus 2021

Yang Menyatakan,

METERAI TEMPEL 10000 6BE15AJX387353118

Ananto Adi Nugraha

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Ananto Adi Nugraha yang lahir di Kota Metro pada tanggal 8 September 1999. Penulis merupakan anak ketiga dari tiga bersaudara yang terlahir dari pasangan Suroso dan Kartika Wati.

Penulis menempuh awal pendidikan di TK PGRI Metro pada tahun 2004 sampai tahun 2005. Kemudian, penulis melanjutkan pendidikan di SD Negeri 2 Metro Timur pada tahun 2005 sampai tahun 2011. Selanjutnya, penulis melanjutkan pendidikan di SMP Negeri 2 Metro pada tahun 2011 sampai tahun 2014. Penulis menempuh pendidikan di SMA Negeri 1 Metro pada tahun 2014 sampai tahun 2017. Pada tahun 2017, penulis melanjutkan pendidikan di perguruan tinggi dan terdaftar sebagai mahasiswa S1 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung (Unila) melalui jalur Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN).

Pada awal tahun 2020, sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat, penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) selama 40 hari di Desa Sumber Agung, Kecamatan Suoh, Kabupaten Lampung Barat. Kemudian pada pertengahan tahun 2020, penulis melakukan Kerja Praktik (KP) di Badan Pusat Statistik (BPS) Kota Metro.

KATA INSPIRASI

"Maka sesungguhnya bersama kesulitan itu ada kemudahan"

(Q.S. Al-Insyirah: 5)

"Setiap fase yang kamu jalani harus bisa mendatangkan pelajaran untuk naik ke fase berikutnya"

(Merry Riana)

"Tidak masalah seberapa lambat kau berjalan asalkan kau tidak berhenti"

(Confucius)

"Untuk menjadi yang terbaik, kau harus bisa mengatasi yang terburuk"

(Wilson Kanadi)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirobbil'alamin,

Puji dan syukur dihaturkan kepada Allah Subhanahu Wata'ala karena atas limpahan nikmat dan karunia-Nya, Shalawat serta salam selalu tercurah kepada baginda Nabi Muhammad Shallallahu 'Alaihi Wasallam yang telah memberikan kabar gembira kepada umat manusia.

Kupersembahkan karya yang sederhana ini kepada:

Keluarga Tercinta

Terima kasih kepada Ayah, Ibu, dan kedua kakakku atas semua doa dan dukungan yang senantiasa diberikan kepadaku.

Sahabat-sahabatku

Terima kasih kepada sahabat-sahabatku atas semua doa, dukungan, kebahagiaan, canda dan tawa yang telah menyertai dalam setiap langkahku.

Almamater Tercinta Universitas Lampung

SANWACANA

Puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul "Penerapan Konsep Himpunan Kesat (*Rough Set*) pada Struktur Grup" dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, motivasi, serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing I yang selalu bersedia memberikan arahan, bimbingan, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan dan dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc. selaku Penguji yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis sehingga dapat menjadi lebih baik lagi.

4. Bapak Subian Saidi, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing Akademik yang senantiasa memberikan bimbingan maupun motivasi kepada penulis selama melaksanakan proses perkuliahan.
5. Ibu Prof. Dr. Wamiliana, M.A., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Univeristas Lampung.
6. Bapak Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, M.T. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
8. Orang tua dan kakak-kakak tercinta serta seluruh keluarga besar yang selalu memotivasi dan mendukung penulis dalam memberikan yang terbaik, selalu mendo’akan untuk kesuksesan penulis.
9. Sahabat-sahabat dari LAMBETIKA C yang telah memberikan dukungan, pelajaran hidup dan kenangan indah kepada penulis.
10. Teman-teman satu bimbingan yang telah memberikan semangat maupun saran kepada penulis.
11. Seluruh pegawai Badan Pusat Statistik (BPS) Kota Metro yang telah memberikan ilmu dan pengalaman kerja kepada penulis.
12. Teman-teman Kuliah Kerja Nyata (KKN) dan masyarakat Desa Sumber Agung yang telah memberikan pengalaman baik kepada penulis.
13. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2017.
14. Teman-teman maupun dari pihak lain yang membantu dalam pengerjaan skripsi.
15. Almamater tercinta Universitas Lampung.

Semoga skripsi ini dapat memberikan banyak manfaat bagi kita semua. Penulis juga menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung,   Agustus 2021

Penulis,

Ananto Adi Nugraha

DAFTAR ISI

DAFTAR ISI .... **xiii**

DAFTAR TABEL .... **xv**

DAFTAR GAMBAR .... **xvi**

I. PENDAHULUAN **1**
1.1 Latar Belakang dan Masalah 1
1.2 Tujuan Penelitian 3
1.3 Manfaat Penelitian 3

II. TINJAUAN PUSTAKA **4**
2.1 Himpunan 4
2.2 Grup 9
2.3 Grup Simetri 11
2.4 Subgrup 16
2.5 Relasi 20
2.6 Relasi Ekuivalensi 21
2.7 Kelas Ekuivalensi (*Equivalence Class*) 23
2.8 Ruang Aproksimasi (*Approximation Space*) 23
2.9 Aproksimasi Atas dan Aproksimasi Bawah (*Lower Approximation and Upper Approximation*) 24
2.10 Himpunan Kesat (*Rough Set*) 25
2.11 Grup Kesat (*Rough Group*) 26

III. METODOLOGI PENELITIAN **28**
3.1 Waktu dan Tempat Penelitian 28
3.2 Metode Penelitian 28

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN **30**
4.1 Sifat-Sifat Grup Kesat (*Rough Group*) 30
4.2 Konstruksi Grup Kesat 38
4.2.1 Konstruksi Grup Kesat yang Bersifat Komutatif 38
4.2.2 Konstruksi Grup Kesat yang Bersifat Non-Komutatif 41
4.3 Konstruksi Subgrup dari Grup Kesat 44
4.3.1 Konstruksi Subgrup dari Grup Kesat yang Bersifat Komutatif 45

4.3.2 *Centralizer* dan *Center* dari Grup Kesat yang Bersifat Komutatif.. 47
4.3.3 Konstruksi Subgrup dari Grup Kesat yang Bersifat Non-Komutatif 48
4.3.4 *Centralizer* dan *Center* dari Grup Kesat yang Bersifat Non-Komutatif 50

V. KESIMPULAN DAN SARAN.. 52
5.1 Kesimpulan... 52
5.2 Saran.. 53

DAFTAR PUSTAKA.. 54

DAFTAR TABEL

Tabel 2.2.1. Tabel Cayley dari Grup A 11

Tabel 2.3.1. Tabel Cayley dari Grup S_3 16

Tabel 2.4.1. Tabel Cayley operasi penjumlahan dari elemen di $\mathbb{Z}_6$ dan elemen di A 19

Tabel 4.1.1. Tabel Cayley perkalian permutasi pada X 33

Tabel 4.2.1. Tabel *Cayley* penjumlahan modulo 100 pada X.............................. 40

Tabel 4.2.2. Tabel invers dari anggota himpunan X 41

Tabel 4.2.3. Tabel *Cayley* perkalian permutasi pada Y.. 43

Tabel 4.2.4. Tabel invers dari anggota himpunan Y 44

Tabel 4.3.1. Tabel *Cayley* penjumlahan modulo 100 pada A.............................. 46

Tabel 4.3.2. Tabel invers dari anggota himpunan A 46

Tabel 4.3.3. Tabel *Cayley* perkalian permutasi pada B 49

Tabel 4.3.4. Tabel invers dari anggota himpunan B 49

Tabel 4.3.5. *Centralizer* dari himpunan bagian Y 50

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.3.1. Contoh suatu fungsi.. 12

Gambar 2.3.2. Contoh fungsi surjektif.. 13

Gambar 3.2.1. Diagram metode penelitian 29

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Teori himpunan kesat (*rough set theory*) merupakan teknik matematika yang pertama kali diperkenalkan oleh Zdzislaw Pawlak pada tahun 1982. Teknik ini digunakan dalam menangani masalah yang bersifat ketidakjelasan (*vagueness*) dan ketidakpastian (*uncertainty*). Berbagai penelitian juga telah banyak dilakukan mengenai teori himpunan kesat serta kemungkinan penerapan dari teori tersebut, seperti penelitian yang dilakukan oleh Jerzy W. Grzymala-Busse pada tahun 2005 yang membahas mengenai teori himpunan kesat dengan penerapannya pada *data mining*. Selain itu, penelitian yang dilakukan oleh Miao, dkk., pada tahun 2005 yang mempelajari tentang grup kesat, subgrup kesat, dan sifat-sifatnya, serta berbagai penelitian lainnya.

Konsep dasar dari teori himpunan kesat yang dikemukakan oleh Pawlak adalah mengenai relasi ekuivalensi, yang merupakan relasi yang bersifat refleksif, simetris, dan transitif. Relasi ekuivalensi menghasilkan partisi-partisi yang saling lepas yang disebut dengan kelas-kelas ekuivalensi. Pasangan (X, R), dengan X adalah himpunan tak kosong dan R adalah relasi ekuivalensi pada X disebut ruang aproksimasi. Diberikan himpunan $A \subseteq X$, aproksimasi bawah (*lower* *approximation*) dari A pada ruang aproksimasi (X, R), dinotasikan dengan $\underline{A}$, adalah gabungan dari kelas ekuivalensi yang terdapat dalam A. Aproksimasi atas (*upper approximation*) dari A pada ruang aproksimasi (X, R), dinotasikan dengan $\overline{A}$, adalah gabungan dari kelas ekuivalensi yang irisannya dengan himpunan A bukan merupakan himpunan kosong. Himpunan $\mathcal{A}$ yang merupakan pasangan berurutan dari aproksimasi bawah dan aproksimasi atas dari A yang ditulis $\mathcal{A} = (\underline{A}, \overline{A})$ merupakan himpunan kesat jika $\underline{A} \neq \overline{A}$.

Dalam hal penerapan dari teori himpunan kesat, banyak penelitian yang membahas mengenai penerapan dari teori tersebut di berbagai cabang ilmu baik dalam bidang *data mining* maupun pada struktur aljabar. Pada penelitian ini akan dibahas penerapan dari himpunan kesat dalam mengkonstruksi struktur grup dari suatu ruang aproksimasi. Grup merupakan pasangan berurutan $\langle A, * \rangle$, dengan A merupakan himpunan tak-kosong dan " $*$ " operasi biner pada himpunan A tersebut yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Dalam konsep grup, jika $B \subseteq A$ dan $\langle B, * \rangle$ juga merupakan suatu grup maka $\langle B, * \rangle$ merupakan subgrup $\langle A, * \rangle$. Dalam penelitian ini akan dibahas juga mengenai *centralizer* dan *center* dari suatu grup kesat.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah menerapkan teori himpunan kesat (*rough set*) dalam mengkonstruksi struktur grup dari suatu ruang aproksimasi dan menunjukkan *centralizer* dan *center* merupakan subgrup dari grup kesat (*rough group*).

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini yang diharapkan dapat berguna bagi pembaca yaitu sebagai berikut:

1. memberikan pengetahuan mengenai konsep grup kesat serta mengetahui *centralizer* dan *center* subgrup dari grup kesat;
2. menjadikan sarana pembelajaran dan referensi untuk mengembangkan wawasan dalam mempelajari penerapan himpunan kesat dalam mengkonstruksi struktur grup.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini, akan dibahas definisi-definisi yang akan mendukung pembahasan dalam menyelesaikan penelitian ini. Beberapa definisi tersebut dituliskan sebagai berikut.

2.1 Himpunan

Menurut Nuharini dan Wahyuni (2008), himpunan adalah kumpulan benda atau objek yang dapat didefinisikan dengan jelas, sehingga dengan tepat dapat diketahui objek yang termasuk himpunan dan yang tidak termasuk dalam himpunan tersebut. Selain itu, suatu himpunan dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.1.1 Himpunan dapat dipandang sebagai kumpulan benda-benda yang berbeda tetapi dalam satu segi dapat ditanggapi sebagai suatu kesatuan. Objek-objek ini disebut anggota atau elemen himpunan. Himpunan dinotasikan dengan huruf kapital seperti $A, B, C, \ldots$ dan anggota himpunan biasanya dinotasikan dengan huruf kecil seperti $a, b, c, \ldots$ (Wibisono, 2008).

Berikut ini akan diberikan beberapa operasi terhadap himpunan (Setiadji, 2009).

a. Gabungan dari dua himpunan A dan B, ditulis $A \cup B$ adalah

   $A \cup B = \{x \mid x \in A$ atau $x \in B\}$.

b. Irisan dari dua himpunan A dan B, ditulis $A \cap B$ adalah

   $A \cap B = \{x \mid x \in A$ dan $x \in B\}$.

c. Selisih dari dua himpunan A dan B, ditulis $A - B$ adalah

   $A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$.

Beberapa contoh sederhana dari himpunan antara lain: kumpulan bilangan asli genap, kumpulan kota-kota yang ada di Pulau Sumatera, dan lain-lain. Adapun contoh yang bukan himpunan yaitu: kumpulan lukisan yang indah, karena suatu lukisan dikatakan indah oleh seseorang namun belum tentu indah menurut orang lain. Berikut adalah contoh lain dari suatu himpunan.

Contoh 2.1.2

Misal A menyatakan himpunan bilangan prima kurang dari 10. Himpunan A dapat ditulis $A = \{a \mid a < 10, a$ bilangan prima$\}$, sehingga $A = \{2,3,5,7\}$.

Selanjutnya akan diberikan definisi dan contoh mengenai kardinalitas himpunan, himpunan kosong, himpunan semesta, himpunan bagian, dan himpunan kuasa yang akan mendukung dalam penelitian ini.

Berikut definisi dari kardinalitas himpunan.

Definisi 2.1.3 Jumlah elemen di dalam himpunan A disebut kardinalitas dari himpunan A. Kardinalitas dari himpunan A dinotasikan dengan $n(A)$ atau $|A|$ (Wibisono, 2008).

Berikut adalah contoh penentuan kardinalitas dari suatu himpunan.

Contoh 2.1.4

Berdasarkan Contoh 2.1.2, himpunan $A = \{2,3,5,7\}$. Oleh karena itu, $|A| = 4$.

Selanjutnya, diberikan definisi mengenai himpunan kosong (*null set*).

Definisi 2.1.5 Himpunan dengan kardinalitas $= 0$ disebut dengan himpunan kosong. Himpunan kosong dinotasikan dengan $\emptyset$ atau { } (Wibisono, 2008).

Berikut ini diberikan contoh himpunan kosong.

Contoh 2.1.6

Diberikan himpunan B, dengan B merupakan himpunan bilangan ganjil yang habis dibagi dua. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa B merupakan himpunan kosong atau $B = \emptyset$.

Selanjutnya, definisi himpunan semesta (*universal set*) dituliskan sebagai berikut.

Definisi 2.1.7 Dalam setiap membicarakan himpunan, maka semua himpunan yang ditinjau adalah subhimpunan dari sebuah himpunan tertentu yang disebut himpunan semesta. Dengan kata lain himpunan semesta adalah himpunan dari semua objek yang berbeda. Himpunan semesta dinotasikan dengan U (Wibisono, 2008).

Berikut ini diberikan contoh himpunan semesta.

Contoh 2.1.8

Jika U merupakan himpunan seluruh huruf alfabet maka U dituliskan sebagai berikut:

$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$.

Definisi berikut akan membahas mengenai himpunan bagian (*subset*) dari suatu himpunan.

Definisi 2.1.9 Himpunan A dikatakan himpunan bagian B jika dan hanya jika semua elemen-elemen di A adalah anggota himpunan B. Himpunan bagian A dari himpunan B dinotasikan dengan $A \subseteq B$ (Wibisono, 2008).

Berikut ini diberikan contoh himpunan bagian.

Contoh 2.1.10

Misal diberikan himpunan A yang merupakan himpunan huruf vokal sehingga himpunan $A = \{a, i, u, e, o\}$. Berdasarkan Contoh 2.1.8, maka dapat disimpulkan bahwa himpunan A merupakan himpunan bagian dari U atau $A \subseteq U$.

Pada bagian akhir dari himpunan akan dibahas himpunan kuasa (*power set*). Semua himpunan bagian dari suatu himpunan dinamakan dengan himpunan kuasa. Berikut adalah definisi himpunan kuasa.

Definisi 2.1.11 Himpunan kuasa dari himpunan A adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian dari A, termasuk himpunan kosong dan himpunan A itu sendiri. Himpunan kuasa dari suatu himpunan A dinotasikan sebagai $P(A)$. Apabila himpunan A terdiri dari n anggota, maka banyaknya anggota dari himpunan kuasa dari himpunan A adalah 2^n (Munir, 2005).

Berikut ini diberikan contoh himpunan kuasa.

Contoh 2.1.12

Berdasarkan Contoh 2.1.2, himpunan $A = \{2,3,5,7\}$, sehingga diperoleh $|A| = 4$. Oleh karena itu, diperoleh $|P(A)| = 2^4 = 16$. Himpunan kuasa dari himpunan A yaitu:

$P(A) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{7\}, \{2,3\}, \{2,5\}, \{2,7\}, \{3,5\}, \{3,7\}, \{5,7\}, \{2,3,5\}, \{2,3,7\}, \{2,5,7\}, \{3,5,7\}, \{2,3,5,7\}\}$.

2.2 Grup

Sebelum membahas mengenai definisi grup, terlebih dahulu memahami definisi dari operasi biner yang menjadi dasar pembentukan struktur grup. Berikut definisi operasi biner.

Definisi 2.2.1 Operasi $*$ pada himpunan G adalah suatu operasi biner jika operasi $*$ merupakan fungsi $G \times G \to G$. Dengan kata lain, operasi $*$ pada anggota himpunan G adalah operasi biner jika untuk setiap dua anggota a, b di G maka $(a * b)$ juga di G (Grillet, 2007).

Untuk lebih memahami Definisi 2.2.1, berikut ini diberikan contoh operasi biner.

Contoh 2.2.2

Diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dan operasi $+$ adalah operasi biner pada $\mathbb{Z}$. Operasi $+$ dapat dinyatakan sebagai suatu fungsi dari $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$, yaitu untuk setiap $(a, b) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$, maka $(a + b) \in \mathbb{Z}$, karena penjumlahan dari dua bilangan bulat adalah bilangan bulat pula. Dengan kata lain, operasi $+$ tertutup di $\mathbb{Z}$.

Setelah memahami definisi dan contoh mengenai himpunan dan operasi biner yang akan menjadi struktur pembangun suatu grup, berikut diberikan definisi grup.

Definisi 2.2.3 Himpunan tak kosong G dikatakan grup jika dalam G terdapat operasi biner yang dinyatakan dengan "$*$", sedemikian sehingga memenuhi aksioma berikut:

i. untuk setiap $a, b, c \in G$, berlaku $a * (b * c) = (a * b) * c$ (sifat asosiatif);

ii. terdapat suatu elemen $e \in G$ sedemikian sehingga $a * e = e * a = a$ untuk setiap $a \in G$ (e adalah elemen identitas di G);

iii. untuk setiap $a \in G$, terdapat suatu elemen $a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (a^{-1} adalah invers a di G) (Herstein, 1975).

Grup dinotasikan dengan $\langle G, * \rangle$, dengan G merupakan himpunan tak kosong dan $*$ merupakan operasi biner pada G. Untuk memahami Definisi 2.3.1, berikut ini diberikan contoh grup beserta pembuktiannya.

Contoh 2.2.4

Berdasarkan Contoh 2.2.2, diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dan operasi $+$ merupakan operasi biner pada $\mathbb{Z}$. Akan dibuktikan $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ merupakan suatu grup sebagai berikut:

i. untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$, berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$. Jadi, operasi $+$ bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}$;

ii. terdapat elemen identitas yaitu $0 \in \mathbb{Z}$, sehingga $a + 0 = 0 + a = a$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$;

iii. untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ terdapat a^{-1} (invers dari a) yaitu $(-a) \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Karena himpunan $\mathbb{Z}$ dengan operasi $+$ (penjumlahan) memenuhi aksioma-aksioma grup sesuai Definisi 2.3.1, terbukti $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ adalah grup.

Berikut ini diberikan contoh dari penggunaan Tabel Cayley.

Contoh 2.2.5

Misalkan A merupakan suatu grup dengan operasi biner "$*$". Pada himpunan $A = \{e, a\}$ didefinisikan operasi $*$ pada A sehingga $a * a = e$, dengan e adalah elemen identitas, sehingga dapat diperoleh Tabel Cayley berikut.

Tabel 2.2.1. Tabel *Cayley* dari Grup *A*

$*$	e	a
e	e	a
a	a	e

Dari Tabel 2.2.1, e adalah elemen identitas sehingga $e * a = a * e = a$ dan karena himpunan A merupakan suatu grup dengan operasi "$*$", maka elemen a harus mempunyai elemen invers yaitu a^{-1} sedemikian sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$. Oleh karena itu, diperoleh $a^{-1} = a$.

2.3 Grup Simetri

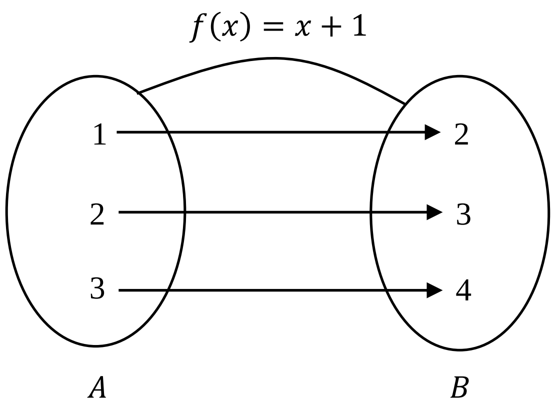
Sebelum diberikan definisi grup simetri, terlebih dahulu diberikan definisi fungsi dan sifat-sifatnya sebagai berikut.

Definisi 2.3.1 Fungsi f adalah suatu aturan padanan yang menghubungkan tiap obyek x dalam suatu himpunan, yang disebut daerah asal, dengan suatu nilai unik $f(x)$ dari himpunan kedua, himpunan yang diperoleh secara demikian disebut daerah hasil fungsi tersebut (Purcell dan Varberg, 1987).

Berikut ini merupakan contoh suatu fungsi.

Contoh 2.3.2

Diberikan fungsi f adalah fungsi dengan aturan $f(x) = x + 1$. Jika daerah asal $A = \{1,2,3\}$, maka daerah hasil $B = \{2,3,4\}$. Perhatikan gambar berikut.



Gambar 2.3.1. Contoh suatu fungsi

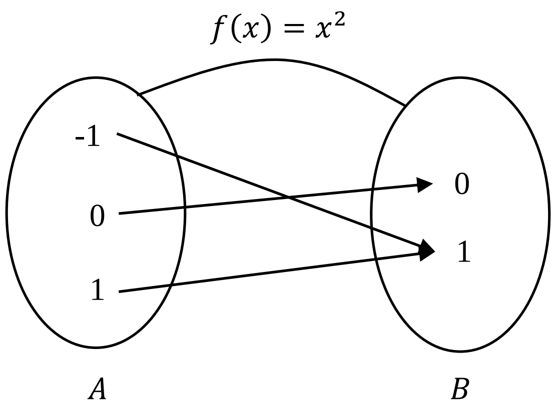
Adapun sifat-sifat dari satu fungsi yaitu fungsi surjektif, fungsi injektif, dan fungsi bijektif. Berikut ini merupakan definisi mengenai fungsi surjektif.

Definisi 2.3.3 Fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut fungsi surjektif, jika untuk setiap $b \in B$ sekurang-kurangnya terdapat satu $a \in A$ sedemikian sehingga $b = f(a)$ (Setiawan, 2008).

Berikut contoh dari fungsi surjektif.

Contoh 2.3.4

Fungsi f dari himpunan $A = \{-1,0,1\}$ ke himpunan $B = \{0,1\}$ yang didefinisikan dengan $f(x) = x^2$ merupakan fungsi surjektif, karena setiap elemen di B merupakaan peta dari sekurang-kurangnya satu elemen di A. Perhatikan gambar berikut.



Gambar 2.3.2. Contoh fungsi surjektif

Berikut ini merupakan definisi mengenai fungsi injektif.

Definisi 2.3.5 Fungsi $f: A \to B$ disebut fungsi injektif (satu-satu), jika untuk setiap $a_1, a_2 \in A$ dan $a_1 \neq a_2$ akan berlaku $f(a_1) \neq f(a_2)$ (Setiawan, 2008).

Berikut contoh dari fungsi injektif.

Contoh 2.3.6

Diberikan fungsi $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan dengan $f(x) = 2x$. Jika untuk setiap $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ yang memenuhi $f(x_1) = f(x_2)$, maka berakibat:

$2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Oleh karena itu, fungsi f merupakan fungsi injektif.

Selanjutnya, berikut merupakan definisi mengenai fungsi bijektif.

Definisi 2.3.7 Fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut suatu fungsi bijektif, jika f merupakan fungsi surjektif dan fungsi injektif (Setiawan, 2008).

Berikut contoh dari fungsi bijektif.

Contoh 2.3.8

Fungsi $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan dengan $f(x) = 2x - 3$ adalah fungsi bijektif karena untuk setiap y peta dari x pasti akan dipenuhi:

$y = 2x - 3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(y + 3)$, yang menunjukkan prapeta dari y di B. Dengan demikian, fungsi f merupakan fungsi surjektif. Selanjutnya, untuk setiap pasang $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, yang memenuhi $f(x_1) = f(x_2)$, akibatnya:

$2x_1 - 3 = 2x_2 - 3 \Leftrightarrow x_1 = x_2$, hal ini menunjukkan fungsi f merupakan fungsi injektif. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa fungsi f merupakan fungsi bijektif.

Setelah dibahas mengenai fungsi dan sifat-sifatnya, berikut diberikan definisi mengenai grup simetri yang akan digunakan pada penelitian ini.

Definisi 2.3.9 Misalkan Ω adalah sebarang himpunan tak-kosong dan S_Ω adalah himpunan yang memuat semua fungsi-fungsi bijektif dari Ω ke Ω atau dapat dikatakan himpunan yang memuat semua permutasi dari Ω. Himpunan S_Ω dengan operasi komposisi " $\circ$ " atau $(S_\Omega, \circ)$ merupakan suatu grup. Operasi komposisi " $\circ$ " merupakan suatu operasi biner pada S_Ω karena jika $\sigma: \Omega \to \Omega$ dan $\tau: \Omega \to \Omega$ adalah fungsi-fungsi bijektif, maka $\sigma \circ \tau$ juga merupakan suatu fungsi bijektif dari Ω ke Ω. Selanjutnya, operasi " $\circ$ " merupakan komposisi fungsi yang bersifat asosiatif. Elemen identitas dari S_Ω merupakan permutasi 1 yang didefinisikan sebagai $1(a) = a$, untuk setiap $a \in \Omega$. Untuk setiap permutasi $\sigma: \Omega \to \Omega$ terdapat fungsi invers $\sigma^{-1}: \Omega \to \Omega$ sehingga $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = 1$. Oleh karena itu, semua aksioma grup terpenuhi di $(S_\Omega, \circ)$. Grup $(S_\Omega, \circ)$ disebut sebagai grup simetri pada himpunan Ω (Dummit dan Foote, 2004).

Berikut contoh dari grup simetri agar lebih memahami Definisi 2.3.1.

Contoh 2.3.10

Misal diberikan himpunan tak-kosong A, dengan $A = \{1,2,3\}$. Apabila himpunan A dikenakan fungsi bijektif dari A ke A, maka dapat dituliskan fungsi bijektif tersebut dalam bentuk *cycle* berikut:

$$\{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\} = S_3$$

Sebagai contoh, *cycle* (12) diberikan dalam bentuk permutasi sebagai berikut:

$$(12) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Apabila S_3 dikenakan operasi komposisi " $\circ$ " pada S_3 maka struktur $(S_3, \circ)$ membentuk grup simetri-3 yang dapat dilihat pada Tabel Cayley berikut.

Tabel 2.3.1. Tabel *Cayley* dari Grup S_3

$\circ$	(1)	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
(1)	(1)	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
(12)	(12)	(1)	(132)	(123)	(23)	(13)
(13)	(13)	(123)	(1)	(132)	(12)	(23)
(23)	(23)	(132)	(123)	(1)	(13)	(12)
(123)	(123)	(13)	(23)	(12)	(132)	(1)
(132)	(132)	(23)	(12)	(13)	(1)	(123)

2.4 Subgrup

Setelah dibahas definisi dan contoh mengenai grup, berikut diberikan definisi dari subgrup.

Definisi 2.4.1 Himpunan bagian tak kosong H dari suatu grup G dikatakan subgrup dari G jika H membentuk grup terhadap operasi yang sama pada grup G (Herstein, 1975).

Untuk lebih memahami Definisi 2.4.1, diberikan contoh subgrup sebagai berikut.

Contoh 2.4.2

Misalkan $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ merupakan grup bilangan bulat dengan operasi penjumlahan. Jika $5\mathbb{Z} = \{5n \mid n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}$, yaitu himpunan semua bilangan bulat kelipatan 5 maka $\langle 5\mathbb{Z}, + \rangle$ merupakan grup. Oleh karena itu, $5\mathbb{Z}$ merupakan subgrup dari $\mathbb{Z}$.

Berikut diberikan definisi mengenai koset kanan dan koset kiri dari subgrup H dari grup G.

Definisi 2.4.3 Misalkan $\langle G, * \rangle$ grup dan H merupakan subgrup dari grup G. Untuk semua $a \in G$, himpunan $Ha = \{h * a \mid h \in H\}$ disebut koset kanan H di G dan himpunan $aH = \{a * h \mid h \in H\}$ disebut koset kiri H di G (Gallian, 2010).

Berikut diberikan contoh dari koset kanan dan koset kiri.

Contoh 2.4.4

Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$ dan pada himpunan tersebut didefinisikan operasi penjumlahan modulo $6\,(+_6)$ sedemikian sehingga $\langle \mathbb{Z}_6, +_6 \rangle$ membentuk grup. Himpunan $H = \{0,3\}$ merupakan subgrup dari grup $\mathbb{Z}_6$.

Koset-koset kanan dari H di $\mathbb{Z}_6$ yaitu sebagai berikut:

$H +_6 0 = H +_6 3 = \{0,3\}$;

$H +_6 1 = H +_6 4 = \{1,4\}$;

$H +_6 2 = H +_6 5 = \{2,5\}$.

Koset-koset kiri dari H di $\mathbb{Z}_6$ yaitu sebagai berikut:

$0 +_6 H = 3 +_6 H = \{0,3\}$;

$1 +_6 H = 4 +_6 H = \{1,4\}$;

$2 +_6 H = 5 +_6 H = \{2,5\}$.

Selanjutnya, berikut ini diberikan definisi mengenai *centralizer* dari suatu grup.

Definisi 2.4.5 Misalkan $\langle G,*\rangle$ grup dengan operasi " $*$ " dan A himpunan bagian tak-kosong dari G, *centralizer* A di G didefinisikan $C_G(A) = \{g \in G \mid g * a * g^{-1} = a,$ untuk semua $a \in A\}$. Karena $g * a * g^{-1} = a$ jika dan hanya jika $g * a = a * g$. Dengan kata lain, $C_G(A)$ adalah himpunan elemen dari G yang komutatif dengan setiap elemen dari A (Dummit dan Foote, 2004).

Centralizer A di G adalah subgrup dari G. Berikut diberikan penjelasannya, Himpunan $C_G(A) \neq \emptyset$ karena $e \in C_G(A)$ sesuai dengan definisi dari identitas yang menetapkan bahwa $e * a = a * e$, untuk setiap $a \in G$ (khususnya untuk setiap $a \in A$). Jadi, e memenuhi definisi untuk keanggotaan di $C_G(A)$. Selanjutnya, asumsikan $x, y \in C_G(A)$, yaitu untuk setiap $a \in A$, $x * a * x^{-1} = a$ dan $y * a * y^{-1} = a$ (catatan bahwa hal ini tidak berarti bahwa $x * y = y * x$). Karena $y * a * y^{-1} = a$, kedua ruas terlebih dahulu dioperasikan dengan y^{-1} pada ruas kiri, dan dengan y pada ruas kanan. Kemudian diperoleh $a = y^{-1} * a * y$, yaitu $y^{-1} \in C_G(A)$ sedemikian sehingga $C_G(A)$ tertutup. Selanjutnya,

$$
\begin{aligned}
(x * y) * a * (x * y)^{-1} &= (x * y) * a * (y^{-1} * x^{-1}) && [\text{sifat invers}] \\
&= x * (y * a * y^{-1}) * x^{-1} && [\text{sifat asosiatif}] \\
&= x * a * x^{-1} && [y \in C_G(A)] \\
&= a. && [x \in C_G(A)]
\end{aligned}
$$

Jadi, $x, y \in C_G(A)$ dan $C_G(A)$ tertutup terhadap suatu operasi tertentu karena $C_G(A) \leq G$.

Berikut diberikan contoh *centralizer* dari suatu grup.

Contoh 2.4.6

Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$ dan pada himpunan tersebut dikenakan operasi penjumlahan modulo 6 "$+_6$" sedemikian sehingga $\langle \mathbb{Z}_6, +_6 \rangle$ merupakan grup. Jika diberikan himpunan $A = \{0,2,4\}$, akan ditentukan $C_{\mathbb{Z}_6}(A)$. Perhatikan tabel berikut.

Tabel 2.4.1. Tabel *Cayley* operasi penjumlahan dari elemen di $\mathbb{Z}_6$ dan elemen di A

$+_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
2	2	3	4	5	0	1
4	4	5	0	1	2	3

Berdasarkan Tabel 2.4.1, elemen-elemen di $\mathbb{Z}_6$ bersifat komutatif dengan semua elemen di A terhadap operasi "$+_6$" sehingga $C_{\mathbb{Z}_6}(A) = \mathbb{Z}_6$.

Selanjutnya, di bawah ini diberikan definisi mengenai *center* dari suatu grup.

Definisi 2.4.7 Misalkan $\langle G, * \rangle$ suatu grup dan A himpunan bagian tak-kosong dari G, *center* dari G didefinisikan $Z(G) = \{g \in G \mid g * x = x * g,$ untuk setiap $x \in G\}$.

Dengan kata lain, *center* dari G merupakan himpunan elemen-elemen yang komutatif dengan semua elemen dari G (Dummit dan Foote, 2004).

Jika diperhatikan kembali Definisi 2.4.3 mengenai *centralizer* A di G yaitu:

$$C_G(A) = \{g \in G \mid g * a = a * g, \text{untuk setiap } a \in A\} \quad (2.1)$$

Pada Persamaan (2.1), bila A diganti dengan G maka menjadi

$$C_G(G) = \{g \in G \mid g * a = a * g, \text{untuk setiap } a \in G\} \quad (2.2)$$

Oleh karena itu, pada Persamaan (2.2) tersebut sama dengan definisi dari $Z(G)$. Jadi, dapat dikatakan bahwa *center* dari G adalah *centralizer* G di G, atau dapat dituliskan $Z(G) = C_G(G)$.

Berikut contoh *center* dari suatu grup.

Contoh 2.4.8

Diberikan $\langle \mathbb{Z}_6, +_6 \rangle$ yang merupakan suatu grup dengan $\mathbb{Z}_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$. Operasi penjumlahan modulo 6 bersifat komutatif di $\mathbb{Z}_6$ karena untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_6$ berlaku $a +_6 b = b +_6 a$, untuk setiap $b \in \mathbb{Z}_6$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa $Z(\mathbb{Z}_6) = \mathbb{Z}_6$.

2.5 Relasi

Secara bahasa, relasi bisa diartikan sebagai hubungan. Namun dalam matematika, relasi adalah aturan yang menghubungkan anggota pada suatu himpunan dengan anggota himpunan lainnya. Relasi juga dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.5.1 Suatu relasi R atas suatu himpunan S adalah suatu himpunan bagian dari $S \times S = \{(a, b) : a, b \in S\}$. Dengan kata lain, suatu relasi R atas suatu himpunan S adalah suatu aturan yang menghubungkan unsur dari himpunan S ke unsur himpunan S itu sendiri (Suwilo, dkk., 1987).

Berikut ini merupakan salah satu contoh dari relasi.

Contoh 2.5.2

Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Relasi R pada himpunan A didefinisikan sebagai berikut:

$R = \{(a, b) \in A \times A \mid a < b\}$, sehingga diperoleh $R = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6), (5,6)\}$.

2.6 Relasi Ekuivalensi

Setelah memahami definisi dan contoh dari relasi, selanjutnya akan dibahas mengenai relasi ekuivalensi. Berikut merupakan definisi dari relasi ekuivalensi.

Definisi 2.6.1 Relasi R pada himpunan A disebut relasi ekuivalensi jika dan hanya jika R mempunyai sifat refleksif, simetris dan transitif.

a. Relasi R pada himpunan A disebut refleksif jika dan hanya jika aRa untuk setiap $a \in A$.
b. Relasi R pada himpunan A disebut simetris jika dan hanya jika aRb berakibat bRa, untuk setiap $a, b \in A$.

c. Relasi R pada himpunan A disebut transitif jika dan hanya jika aRb dan bRc berakibat aRc, untuk setiap $a, b, c \in A$ (Barnier dan Feldman, 1990).

Berdasarkan Definisi 2.6.1, hal yang dilakukan dalam menentukan relasi ekuivalensi adalah memeriksa apakah relasi tersebut memiliki sifat refleksif, simetris, dan transitif. Berikut merupakan contoh relasi ekuivalensi.

Contoh 2.6.2

Diberikan himpunan $A = \{1,2,3,4,5\}$. Pada himpunan A didefinisikan relasi R yaitu aRb dimana $a, b \in A$ jika dan hanya jika $a - b = 2k$, dengan $k \in \mathbb{Z}$. Dengan kata lain, $a - b$ dapat dibagi oleh 2. Berikut akan dibuktikan bahwa R merupakan relasi ekuivalensi pada A.

a. Untuk $a \in A$, berlaku aRa karena $a - a = 0 = 2.0$ dan $0 \in \mathbb{Z}$. Oleh karena itu, relasi R bersifat refleksif.

b. Untuk setiap $a, b \in A$, jika aRb maka $a - b = 2k$ untuk $k \in \mathbb{Z}$. Hal ini berakibat $b - a = -2k = 2(-k)$, dengan $-k \in \mathbb{Z}$. Jadi, bRa. Oleh karena itu, relasi R bersifat simetris.

c. Selanjutnya, jika aRb dan bRc maka $a - b = 2k$ dan $b - c = 2j$ untuk suatu $k, j \in \mathbb{Z}$. Hal ini berakibat $a - c = (a - b) + (b - c) = 2k + 2j = 2(k + j)$, dengan $k + j \in \mathbb{Z}$ maka dapat dikatakan bahwa aRc. Jadi, aRc. Oleh karena itu, relasi R bersifat transitif.

Dengan demikian, relasi R adalah relasi yang bersifat refleksif, simetris, dan transitif. Jadi, R merupakan relasi ekuivalensi.

2.7 Kelas Ekuivalensi (*Equivalence Class*)

Setelah membahas mengenai relasi ekuivalensi, berikut diberikan definisi mengenai kelas ekuivalensi.

Definisi 2.7.1 Misalkan relasi R adalah relasi ekuivalensi pada himpunan A dan $a \in A$. Kelas ekuivalensi dari a pada R adalah $[a]_R = \{x : x \in A \text{ dan } aRx\}$. Dengan kata lain, kelas ekuivalensi a pada R memuat semua elemen dalam himpunan A yang mempunyai relasi dengan a (Barnier dan Feldman, 1990).

Berikut ini merupakan contoh kelas ekuivalensi.

Contoh 2.7.2

Berdasarkan Contoh 2.6.2, relasi R adalah relasi ekuivalensi pada A. Kelas ekuivalensi dalam Contoh 2.6.2 adalah $[1] = \{1,3,5\}$ atau himpunan bilangan bulat ganjil dari himpunan A dan $[2] = \{2,4\}$ atau himpunan bilangan bulat genap dari himpunan A.

2.8 Ruang Aproksimasi (*Approximation Space*)

Setelah memahami definisi dan contoh mengenai himpunan dan relasi ekuivalensi, selanjutnya akan dibahas mengenai definisi dari ruang aproksimasi. Berikut merupakan definisi dari ruang aproksimasi.

Definisi 2.8.1 Misalkan $U \neq \emptyset$ dan R adalah relasi ekuivalensi pada U. Pasangan (U, R) disebut ruang aproksimasi, yang dinotasikan dengan $K = (U, R)$ (Miao, dkk., 2005).

Adapun contoh dari ruang aproksimasi yaitu sebagai berikut.

Contoh 2.8.2

Berdasarkan Contoh 2.6.2, pasangan (A, R) adalah ruang aproksimasi, dengan $A \neq \emptyset$ dan R merupakan relasi ekuivalensi pada A.

2.9 Aproksimasi Atas dan Aproksimasi Bawah (*Lower Approximation and Upper Approximation*)

Sebelum membahas mengenai aproksimasi lebih lanjut, akan dibahas mengenai aproksimasi bawah dan aproksimasi atas terlebih dahulu. Berikut definisi dari aproksimasi atas dan aproksimasi bawah dari suatu himpunan.

Definisi 2.9.1 Misalkan $K = (U, R)$ adalah ruang aproksimasi dan X adalah himpunan bagian dari U. Aproksimasi bawah dan aproksimasi atas didefinisikan sebagai berikut:

$$\underline{X} = \{x \mid [x]_R \subseteq X\} \tag{2.3}$$

$$\overline{X} = \{x \mid [x]_R \cap X \neq \emptyset\} \tag{2.4}$$

$\underline{X}$ disebut aproksimasi bawah dari X dan $\overline{X}$ disebut aproksimasi atas dari X di ruang aproksimasi K (Miao, dkk., 2005).

Berikut ini diberikan contoh aproksimasi bawah dan aproksimasi atas dari suatu himpunan.

Contoh 2.9.2

Diberikan ruang aproksimasi (U, R), dengan himpunan $U = \{x_1, x_2, \dots, x_{10}\}$ dan R adalah relasi ekuivalensi pada U dengan kelas ekuivalensi sebagai berikut:

$E_1 = \{x_1, x_2\}$;

$E_2 = \{x_3, x_4\}$;

$E_3 = \{x_5, x_6, x_7\}$;

$E_4 = \{x_8, x_9\}$;

$E_5 = \{x_{10}\}$.

Jika dipilih $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, maka aproksimasi bawah dan aproksimasi atas dari X adalah sebagai berikut:

$\underline{X} = \{x_1, x_2\} \cup \{x_3, x_4\}$;

$\overline{X} = \{x_1, x_2\} \cup \{x_3, x_4\} \cup \{x_5, x_6, x_7\}$.

2.10 Himpunan Kesat (*Rough Set*)

Himpunan kesat pertama kali dikenalkan oleh Pawlak pada awal tahun 1980-an. Menurut Pawlak (2002), metode himpunan kesat adalah suatu pendekatan matematis baru untuk menganalisa pola data yang bersifat samar atau tak pasti. Setelah memahami Definisi 2.9.1 mengenai aproksimasi bawah dan aproksimasi atas, berikut diberikan definisi mengenai himpunan kesat.

Definisi 2.10.1 Misalkan R adalah relasi ekuivalensi pada himpunan semesta U, pasangan (U, R) adalah ruang aproksimasi. Suatu himpunan bagian $X \subseteq U$, jika $\overline{X} - \underline{X} \neq \emptyset$ maka X disebut himpunan kesat (Pawlak, 1982).

Berikut ini diberikan contoh himpunan kesat.

Contoh 2.10.2

Berdasarkan Contoh 2.9.2, pasangan berurutan aproksimasi bawah dan aproksimasi atas dari X yaitu $(\{x_1, x_2\} \cup \{x_3, x_4\}, \{x_1, x_2\} \cup \{x_3, x_4\} \cup \{x_5, x_6, x_7\})$ merupakan himpunan kesat di dalam ruang aproksimasi (U, R).

2.11 Grup Kesat (*Rough Group*)

Setelah memahami seluruh definisi-definisi dan contoh-contoh yang sudah dituliskan sebelumnya, berikut diberikan definisi dari grup kesat yang akan menjadi topik inti dari penelitian ini.

Definisi 2.11.1 Misalkan $K = (U, R)$ adalah ruang aproksimasi dan $*$ adalah operasi biner pada U. Himpunan $G \subseteq U$ disebut grup kesat jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

i. untuk setiap $x, y \in G, x * y \in \overline{G}$;

ii. untuk setiap $x, y, z \in G$, $(x * y) * z = x * (y * z)$ terpenuhi di $\overline{G}$ (berlaku sifat asosiatif di $\overline{G}$);

iii. terdapat $e \in \overline{G}$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in G, x * e = e * x = x$. Elemen e disebut elemen identitas kesat (*rough identity element*) di G;

iv. untuk setiap $x \in G$, terdapat $y \in G$ sedemikian sehingga $x * y = y * x = e$. Elemen y disebut elemen invers kesat (*rough inverse element*) dari x di G (Miao, dkk., 2005).

Setelah dibahas mengenai definisi dari grup kesat, selanjutnya akan diberikan definisi subgrup kesat (*rough subgroup*).

Definisi 2.11.2 Suatu himpunan bagian tak kosong H dari grup kesat $\langle G,* \rangle$ disebut subgrup kesat dari G jika H merupakan grup kesat dengan operasi biner $*$ yang sama pada G (Miao, dkk., 2005).

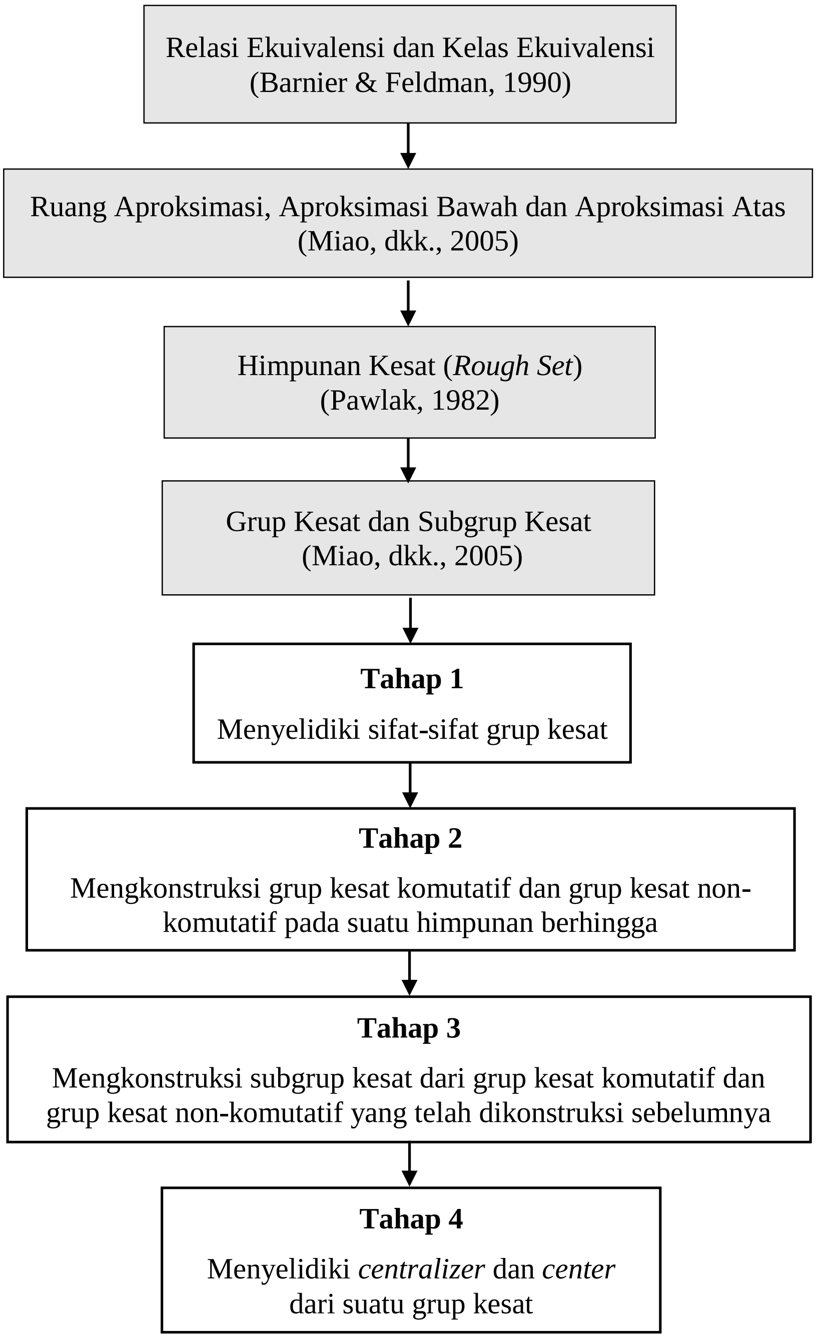
III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester genap tahun ajaran 2020/2021 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang beralamatkan di Jalan Prof. Dr. Ir. Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Pada bagian ini, akan dituliskan langkah-langkah yang akan dilakukan dalam upaya mencapai tujuan dari penelitian ini. Langkah-langkah penelitian tersebut disajikan dalam diagram sebagai berikut:



Gambar 3.2.1. Diagram metode penelitian

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan diperoleh bahwa, jika pada teori grup terdapat A dan B yang merupakan grup maka gabungan dari kedua grup tersebut belum tentu membentuk grup, sedangkan pada grup kesat, jika X_1 dan X_2 merupakan grup kesat maka gabungan kedua grup kesat tersebut yaitu $X_1 \cup X_2$ akan membentuk grup kesat pula pada ruang aproksimasi tertentu dengan syarat $\overline{X_1} = \overline{X_2}$.

Berdasarkan grup kesat yang telah dikonstruksi sebelumnya baik yang bersifat komutatif maupun non-komutatif, *centralizer* subgrup dari grup kesat yang bersifat komutatif adalah grup kesat itu sendiri, begitu pula halnya dengan *center* dari grup kesat yang bersifat komutatif yaitu grup kesat itu sendiri. *Centralizer* subgrup dari grup kesat yang bersifat non-komutatif pasti memuat elemen identitas, begitu pula halnya dengan *center* dari grup kesatnya. *Center* dari masing-masing grup kesat baik yang bersifat komutatif maupun non-komutatif merupakan subgrup kesat dari masing-masing grup kesatnya.

5.2 Saran

Berikut beberapa hal yang disarankan bagi penelitian selanjutnya yaitu:

1. dalam mengkonstruksi grup kesat dapat menggunakan himpunan universal lain selain yang ada di penelitian ini;
2. dalam menentukan *centralizer* dan *center* dapat mengganti objek penelitian pada grup lain seperti grup dihedral dan grup-grup lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Barnier, W., Feldman, N. 1990. *Introduction to Advanced Mathematics*, Prentice-hall International, New Jersey: 116 - 153.

Dummit, D. S. dan Foote, R. M. 2004. *Abstract Algebra Third Edition*. USA: John Wiley & Sons, Inc.

Gallian, J. A. 2010. *Contemporary Abstract Algebra Seventh Edition*. Duluth: University of Minnesota Duluth.

Grillet, P. A. 2007. *Abstract Algebra (2nd edition)*. New York: Springer.

Grzymala-Busse, J. W. 2005. Rough Set Theory with Applications to Data Mining. *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. 221-244.

Herstein, I. N. 1975. *Topics in Algebra*. New York: John Wiley & Sons.

Miao, D., Han, S., Li, D., dan Sun, L. 2005. Rough Group, Rough Subgroup and Their Properties. *Rough Sets, Fuzzy Sets, Data Mining, and Granular Computing*. 104-113.

Munir, Rinaldi. 2005. *Matematika Diskrit*. Bandung: Penerbit Informatika.

Nuharini, Dewi dan Wahyuni, Tri. 2008. *Matematika Konsep dan Aplikasinya*. Jakarta: Pusat Perbukuan Departemen Pendidikan Nasional.

Pawlak, Z. 1982. Rough Set, *International Journal of Computing and Information Sciences*. 11(5), 341-356.

Pawlak, Z. 2002. Primer On Rough Set: *A New Approach To Drawing Conclusion From Data*. Vol. 22:1407.

Setiadji. 2009. *Himpunan Logika Samar serta Aplikasinya*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Setiawan. 2008. *Pembelajaran Fungsi, Persamaan, dan Pertidaksamaan Aljabar*. Yogyakarta: Pusat Pengembangan dan Peberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan Matematika.

Sulandra, I Made. 1996. *Struktur Aljabar I (Edisi Revisi)*. Malang: IKIP Malang.

Suwilo, S., Tulus, dan Lubis, S.R. 1987. *Aljabar Abstrak Suatu Pengantar*. Medan: USU Press.

Wibisono, Samuel. 2008. *Matematika Diskrit (Edisi Kedua)*. Yogyakarta: Graha Ilmu.