`

BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF *SHADOW* SIKLUS

(Skripsi)

Oleh

WENTY OKZARIMA
1717031023

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2021

ABSTRAK

BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF *SHADOW* SIKLUS

Oleh

WENTY OKZARIMA

Graf *shadow* siklus $D_2\ (C_n)$ adalah graf terhubung yang diperoleh dari dua siklus C_n, yaitu C_n^1 dan C_n^2. Siklus C_n^1 sebagai siklus dalam dan C_n^2 sebagai bayangan dari siklus C_n^1 yang terletak disisi luar siklus C_n^1 yang mana setiap v_i^1 pada siklus C_n^1 bertetangga dan terhubung pada titik v_n^2 pada siklus C_n^2. Graf barbel dari graf *shadow* siklus, $B_{D_2(C_n)}$ adalah graf yang terbentuk dari dua graf *shadow* siklus $D_2\ (C_n)$ yang dihubungkan dengan sebuah jembatan. Graf subdivisi dari graf barbel *shadow* siklus adalah graf yang diperoleh dengan cara menyisipkan beberapa titik pada jembatan graf barbelnya. Bilangan kromatik lokasi graf *shadow* siklus $D_2(c_n)$ untuk $n \geq 3$ adalah 6 untuk *n* ganjil, 7 untuk *n* = 6,8 dan 8 untuk *n* genap lainnya. Sedangkan untuk bilangan kromatik lokasi graf barbel *shadow* siklus dan subdivisinya adalah 6 untuk *n* ganjil dan 8 untuk *n* genap.

Kata kunci : Bilangan kromatik lokasi, graf *shadow* siklus, graf barbel, graf subdivisi

ABSTRACT

THE LOCATING CHROMATIC NUMBER OF THE SHADOW CYCLE GRAPHS

By

WENTY OKZARIMA

The Shadow cycle graphs, $D_2(c_n)$ is a conenected graphs that is connected by two cycles of C_n, namely C_n^1 and C_n^2. The C_n^1 is the inner cycle and C_n^2 is the shadow of the cycle C_n^1, where every vertices v_n^1 on the cycle C_n^1 is connected to a adjacent vertices v_n^2 on the cycle C_n^2. The barbell graph containing shadow cycle graphs, denoted by $B_{D_2(C_n)}$ is a graph obtained from two shadow cycle graphs connected by a bridge. Subdivision of barbell shadow cycle graphs is a graph obatained by inserting some vertices on the bridge. The locating chromatic number for the shadow cycles graph $D_2(c_n)$ for $n \geq 3$ is 6 for odd *n*, 7 for *n* = 6,8 and 8 for otherwises. Whereas, the locating chromatic number of barbell and subdivision of the graph is 6 for odd *n* and 8 for even *n*.

Key words : Locating chromatic number, graph shadow cycle graph, barbell graph, subdivision of graph

BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF *SHADOW* SIKLUS

Oleh

WENTY OKZARIMA
1717031023

(Skripsi)

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2021

Judul Skripsi	: **BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF *SHADOW* SIKLUS**
Nama Mahasiswa	: Wenty Okzarima
NPM	: **1717031023**
Jurusan	: **Matematika**
Fakultas	: **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI,

1. Komisi Pembimbing

Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.	**Dr. Lazakaria, S.Si., M.Sc.**
NIP.197604112000122001	NIP.196902131994021001

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP.197403162005011001

MENGESAHKAN

1 Tim Penguji

Ketua : **Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Dr. Lazakaria, S.Si., M.Sc.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, M.T
NIP.19740705 200003 1001

Tanggal Lulus ujian Skripsi : **27 Juli 2021**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan dibawah ini menyatakan bahwa skripsi saya yang berjudul " **Bilangan Kromatik Lokasi Graf *Shadow* Siklus** " adalah hasil pekerjaan saya sendiri, bukan hasil orang lain. Semua hasil tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung. Apabila dikemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 21 Juli 2021

Yang menyatakan,

SEPULUH RIBU RUPIAH 10000 TGL 20 METERAI TEMPEL 7C931AJX336994484

Wenty Okzarima

RIWAYAT HIDUP

Penulis lahir di Bandar Lampung, pada 21 Oktober tahun 1999. Merupakan anak pertama dari dua bersaudara, dari Bapak Suwandi Pisol dan Ibu Agusliawati.

Riwayat pendidikan Sekolah Dasar di SD N 1 Penumangan Baru, Kab. Tulang Bawang Barat lulusan tahun 2011. Sekolah Menengah Pertama di SMP N 1 Tulang Bawang Tengah lulusan tahun 2014, dan Sekolah Menengah Atas di SMA N 1 Tulang Bawang Tengah lulusan tahun 2017.

Penulis melanjutkan jenjang pendidikan di Universitas Lampung jalur SNMPTN dan terdaftar sebagai mahasiswa jurusan Matematika FMIPA. Riwayat organisasi yakni Himatika (2018), Pengajar Muda Unila (2018), Sekretaris bidang Komunitas Teras Peduli (2019).

Sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu kepada masyarakat, Penulis telah menyelesaikan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Wiralaga 2 Kec. Mesuji pada tahun 2020, dan kuliah Praktik (KP) di SAMSAT Tulang Bawang Barat

KATA INSPIRASI

" Jangan kecewa apabila hasil yang diperoleh tidak seperti yang diharapkan, percayalah bahwa semua adalah kesuksesan, bukanlah kegagalan. "

(Thomas Alfa Edison)

" Apapun yang terjadi jangan pernah menyerah, jika menyerah habislah sudah."

(Top Ittipat)

"... Orang yang hebat tidak dihasilkan melalui kemudahan, kesenangan dan kenyamanan. Melainkan Mereka dibentuk melalui kesukaran, tantangan dan airmata..."

(Dahlan Iskan)

" Jika orang lain bisa kenapa Saya tidak, lakukan semampunya dan berikan yang terbaik untuk apapun hasilnya. "

-Wenty Okzarima -

PERSEMBAHAN

Dengan segala kerendahan hati dan rasa syukur, saya persembahkan sebuah karya sederhana ini kepada :

Kedua Orang Tua Tercinta

Terima kasih untuk setiap tetes keringat, setiap untaian kata semangat dan do'a tiada terhingga serta atas segala hal yang telah kalian berikan.

Adik Tersayang

Semoga karya ini dapat membuat Cenoy bangga memiliki Kanjeng seperti saya serta dapat memotivasikan mu dalam dunia perkuliah.

Keluarga Besar " Hilman Hasan"

Terima kasih atas dukungan, motivasi serta do'a yang kalian berikan untuk Ocha.

Bestship dan Pejuang ACC

Terima kasih atas seluruh dukungan yang kalian berikan, semoga hubungan baik kita selalu terjaga tidak hanya di dunia, tetapi juga di akhirat.

Almamater Kebanggan Universitas Lampung

SANWACANA

Puji syukur penulis ucapkan kepada Allah SWT atas segala ridha, rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Skripsi dengan judul “ Bilangan Kromatik Lokasi Graf *Shadow* Siklus “ disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar sarjana Matematika di Universitas Lampung.

Pada kesempatan ini penulis mengucpakan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada :

1. Ibu Dr. Asmiati, S.Si., M.Si. selaku pembimbing I yang telah meluangkan waktu untuk membimbing dan memberikan saran kepada penulis selama proses pembuatan skripsi ini hingga selesai.
2. Bapak Dr. Lazakaria, S.Si., M.Si. selaku pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, serta saran kepada penulis.
3. Ibu Prof. Wamiliana, M.A., Ph.D. selaku dosen Penguji yang telah mengevaluasi dan memberikan saran dalam menyelesaikan skripsi ini .
4. Bapak Amanto, S.Si., M.Si., selaku perwakilan dosen penguji yang telah membantu mengevaluasi, memberikan saran dalam menyelesaikan skripsi ini.
5. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku dan ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.
6. Bapak Agus Sutrisno , S.Si., M.Si Selaku dosen pembimbing Akademik yang selalu memberikan arahan selama perkuliahan .
7. Bapak Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, M.T. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
8. Seluruh civitas akademik, dosen dan staf Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

9. Walid, Walida dan Orin yang selalu memberikan dukungan dan do’a terbaik agar penulis diberikan kelancaran serta kemudahan dalam menyelesaikan skripsi ini.
10. Papi, Makwo, Kanda, Nanggem, Itoh, dan Kak Eran yang selalu memberikan inspirasi dunia perkuliah serta selalu memberikan semangat untuk penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
11. Teman-teman seperjuangan Bestship dan Pejuang ACC; Anggitha Aurelia Lesmana, Dela Kornelia Vianda, Annisa Widya R, Eka Aditya F, Ali Amin, Sartika, Risa, Rinaldi yang selalu memberikan dukungan, pelajaran hidup, waktub luang, dan nasihat selama perkuliahan.
12. Seluruh teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2017.

Penulis menyadari bahwa penyusunan skripsi ini masih banyak kekurangan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat dibutuhkan untuk penyempurnaan skripsi ini.

Bandar Lampung, 21 Juli 2021
Penulis,

Wenty Okzarima

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Gambar **Halaman**

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf mulai diperkenalkan oleh seorang matematikawan berkebangsaan Swiss, bernama Leonhard Euler, berhasil menyelesaikan masalah jembatan Konigsberg di sungai Pregal yang sangat terkenal di Eropa pada tahun 1736. Berawal dari permasalahan jembatan *konigsberg* yang memiliki tujuh jembatan tersebut ingin melewati ketujuh jembatan tepat sekali dan kembali lagi ketempat awal keberangkatan. Euler adalah orang pertama yang berhasil menyelesaikan masalah tersebut dengan memodelkan ke dalam bentuk suatu graf, di mana daratan yang terdapat di sungai Pregal dinyatakan sebagai titik dan tujuh jembatan yang menghubungkan dinyatakan sebagai sisi. Secara umum graf adalah pasangan terurut dari himpunan titik (*vertex*) $v(G) \neq \emptyset$ dan himpunan sisi (*edge*) $E(G)$ yang dapat merupakan himpunan kosong dengan sisi – sisi di $E(G)$ merupakan pasangan tak terurut dititik – titik di $v(G)$ (Deo ,1989).

Gambar 1. Representasi Permasalahan Jembatan Konigsberg

Salah satu materi dalam teori graf adalah bilangan kromatik lokasi yang diperkenalkan oleh Chartrand, dkk., pada tahun 2002. Penentuan bilangan kromatik lokasi didasarkan banyaknya warna minimum yang digunakan pada pewarnaan lokasi dengan kode warna yang berbeda disetiap titik pada graf tersebut. Sehingga, bilangan kromatik lokasi akan sangat bergantung pada kode warna yang digunakan pada suatu graf.

Konsep bilangan kromatik lokasi dari suatu graf adalah kombinasi antara dimensi partisi dan pewarnaan titik dari suatu graf. Misalkan *c* adalah suatu pewarnaan titik pada graf *G* dengan menggunakan warna 1, 2,...,*k* untuk suatu bilangan bulat positif *k.* Jika titik u dan v bertetangga di *G*, maka $c(u) \neq c(v)$. Misalkan C_i adalah himpunan titik yang diberi warna i, yang selanjutnya disebut kelas warna, maka $\Pi = \{ C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ adalah himpunanan yang terdiri dari kelas- kelas warna dari *V(G).* Kode warna (*Color code)* $c_\Pi(v)$ dari *v* adalah *k*-pasang terurut $\big(d(v, c_1), d(v, c_2), \ldots, d(v, c_k)\big)$ dengan $d(v, c_1) = \min\{d(v, x) | \; x \in c_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k,$ jika setiap titik di *G* mempunyai kode warna yang berbeda, maka *c* disebut pewarna lokasi dari *G* .

Konsep pewarnaan lokasi pertama kali dikaji oleh Chartrand, dkk., (2002) dengan menentukan bilangan kromatik lokasi dari beberapa kelas graf, diantaranya untuk graf lintasan P_n dengan $n \geq 3$ diperoleh $\chi_L(P_n) = 3$, pada graf siklus diperoleh dua hasil yaitu untuk n ganjil berlaku $\chi_L(C_n) = 3$ dan untuk n genap $\chi_L(C_n) = 4$. Selanjutnya Asmiati, dkk.,(2011) telah berhasil mendapatkan bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi bintang $S_{k,m}$, dimana $S_{k\,,m}$ adalah amalgamasi dari k buah graf bintang $K_{1,m}$ dan pada tahun 2017, Asmiati, dkk., telah berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi graf Petersen $P_{n,1}$ diperoleh $\chi_L(P_{n,1}) = 4$ untuk *n* ganjil dan $\chi_L(P_{n,1}) = 5$ untuk *n* genap. Selanjutnya Asmiati, dkk.,(2019) telah berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi graf barbel yang memuat graf lengkap dan graf petersen diperumum.

Sejauh penelusuran literatur belum ada kajian tentang bilangan kromatik lokasi pada graf *shadow* siklus. Pada penelitian ini akan didiskusikan tentang bilangan kromatik lokasi pada graf *shadow* siklus, barbel, dan subdivisinya.

1.2 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan bilangan kromatik lokasi graf *shadow* siklus, graf barbel, dan subdivisinya.

1.3 Manfaat Penelitian

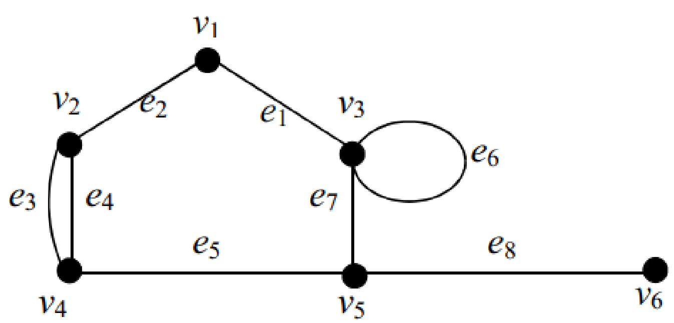
Adapun manfaat dari penelitian ini diantara lain :

1. Memberikan pemahaman mengenai bilangan kromatik lokasi graf *shadow* siklus, graf barbel, dan subdivisinya.
2. Sebagai bahan referensi penelitian lanjutan untuk menentukan bilangan kromatik lokasi graf *shadow* siklus untuk operasi-operasi lainnya.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Graf

Konsep dasar yang digunakan dalam penelitian ini diambil dari Deo (1989). Suatu graf G adalah himpunan terurut $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ menyatakan himpunan titik $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ dari *G* dengan $V(G) \neq \emptyset$ dan *E(G)* menyatakan himpunan sisi $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ yaitu pasangan tak terurut dari *V(G)*. Banyaknya titik $V(G)$ disebut orde dari graf G . Jika titik v_1 dan v_2 dihubungkan oleh sisi *e*, maka titik v_1 dan v_2 dikatakan menempel pada sisi *e* atau sisi *e* menempel pada titik v_1 dan v_2. Selanjutnya titik v_1 dan v_2 dikatakan bertetangga. Suatu titik *v* dinotasikan dengan *N(v)* adalah himpunan titik–titik yang bertetangga dengan *v* .



Gambar 2. Contoh graf dengan 6 titik dan 8 sisi

Pada Gambar 2, graf tersebut merupakan graf (*V* ,*E*) dengan himpunan titik *V(G)* = $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan himpunan sisi *E(G)* = $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$.

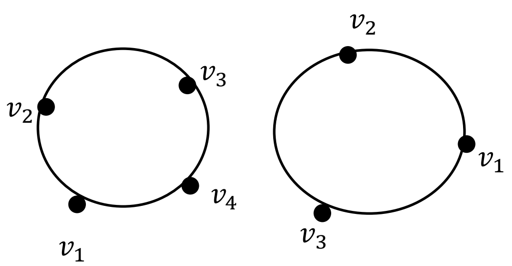
Titik yang bertetangga dengan v_1 adalah titik v_2 dan v_3 sedangkan sisi yang menempel dengan titik v_1 adalah e_1 dan e_2. Derajat (*degree)* dari suatu titik *v* pada graf *G* adalah banyaknya sisi yang menempel pada titik *v* yang dinotasikan dengan *d(v)*, pada Gambar 2 $d(v_1) = 2, d(v_2) = 3, d(v_3) = 3, d(v_4) = 3,\ d(v_5) = 3$. Daun adalah titik yang berderajat satu, pada Gambar 2 yang merupakan daun (*pendant)* adalah v_6. Graf yang semua titiknya berderajat sama disebut graf teratur.

Loop adalah sebuah sisi yang mempunyai titik awal dan akhir yang sama, sedangkan sisi paralel adalah dua sisi atau lebih yang menghubungkan sepasang titik yang sama. Pada Gambar 2, sisi – sisi paralel adalah e_3 dan e_4 sedangkan e_6 merupakan *loop.* Graf yang tidak memuat *loop* dan sisi paralel disebut graf sederhana.

Jalan (*walk*) adalah barisan berhingga titik- titik dan sisi sedemikian sehingga setiap sisi menempel pada titik sebelum dan sesudahnya. Pada jalan boleh terjadi pengulangan titik atau sisi. Lintasan (*Path)* adalah jalan yang semua titik yang yang dilewati berbeda, jika titik awal dan akhirnya sama maka disebut lintasan tertutup. Contoh jalan pada Gambar 2 adalah $v_2 - e_2 - v_1 - e_1 - v_3 - e_6 - v_3 - e_7 - v_5 - e_8 - v_6$ sedangkan contoh lintasan pada Gambar 2 adalah $v_1 - e_2 - v_2 - e_4 - v_4 - v_5 - e_8 - v_6$.

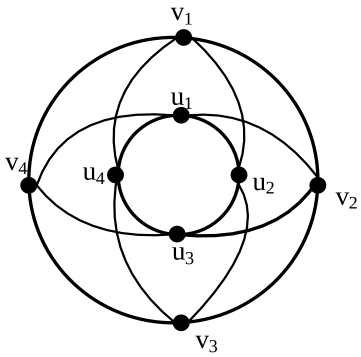
2.2 Graf Siklus dan Graf *Shadow* Siklus

Graf siklus merupakan lintasan tertutup , graf siklus dinotasikan C_n dengan *n* menyatakan orde dari graf.



Gambar 3. Graf siklus dengan orde 3 dan orde 4

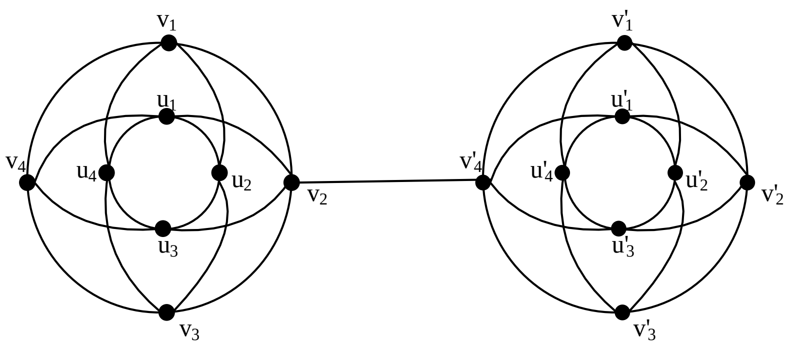
Graf *shadow* siklus $D_2\ (C_n)$ adalah graf terhubung yang dibangun dari dua siklus C_n, yaitu C_n^1 dan C_n^2. Siklus C_n^1 sebagai siklus dalam dan C_n^2 sebagai bayangan dari siklus C_n^1 yang terletak disisi luar siklus C_n^1 yang mana setiap v_i^1 pada siklus C_n^1 bertetangga dan terhubung pada titik v_n^2 pada siklus C_n^2.



Gambar 4. Graf *shadow* siklus $D_2\ (C_4)$

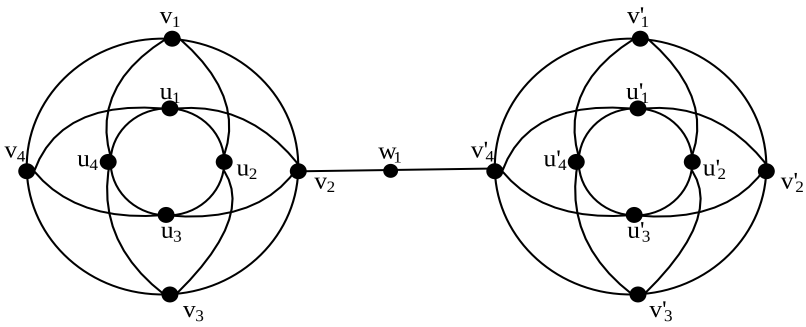
2.3 Graf Barbel, dan Graf Subdivisi dari *Shadow* Siklus

Misalkan *G* dan *H* masing-masing merupakan graf *shadow* siklus. Graf barbel dari graf *shadow* siklus adalah graf yang terbentuk dari dua graf yang dihubungkan dengan sebuah jembatan atau sisi, dinotasikan dengan $B_{D_2(C_n)}$ untuk $n \geq 3$.



Gambar 5. Graf barbel *Shadow* siklus $B_{D_2(C_4)}$

Graf subdivisi dari graf barbel *shadow* siklus dinotasikan dengan $B^{*S}_{D_2(C_n)}$ adalah graf yang diperoleh dari graf barbel *shadow* siklus $B^{*S}_{D_2(C_n)}$ dengan cara menyisipkan beberapa titik pada jembatan graf barbelnya .



Gambar 6. Graf barbel subdivisi $B_{D_2(C_4)}$ yang disubdivisi satu titik

2.4 Bilangan Kromatik Lokasi Graf

Definisi dari bilangan kromatik lokasi menurut Chartrand dkk., pada tahun 2002 yaitu misalkan G = (V, E) adalah graf terhubung dan c suatu pewarnaan sejati di graf G dengan $c(u) \neq c(v)$ untuk titik u dan titik v yang bertetangga di graf G. Misalkan C_i adalah himpunan titik-titik yang diberi warna i, yang selanjutnya disebut kelas warna, maka Π = $\{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ adalah himpunan yang terdiri dari kelas-kelas warna dari $V(G)$. Kode warna C_Π dari v adalah k-pasang terurut ($d(v$, C_1), $d(v$, C_2), … , $d(v$, C_k)) dengan $d(v$, C_i) = min{$d(v$, $x)$ | x ∈C_i} untuk 1 ≤ i ≤ k. Jika setiap titik di G mempunyai kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi dari G. Bilangan kromatik lokasi dari G, dinotasikan dengan χ_L (G) adalah bilangan terkecil k sehingga G mempunyai pewarnaan k lokasi.

Berikut ini diberikan Teorema dasar tentang bilangan kromatik lokasi yang telah dibuktikan oleh Chartrand,dkk. (2002)

Teorema 2.1 (Chartrand dkk., 2002)

Misal c adalah suatu pewarnaa lokasi pada graf terhubung G. Jika titik u dan titik v adalah dua titik yang berbeda pada graf G sedemikian sehingga $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(\mathrm{G}) - \{u, v\}$, maka $c(u) \neq c(v)$. Dalam hal khusus, jika titik u dan titik v adalah titik-titik yang tidak bertetangga di G sedemikian sehingga $N(u) = N(v)$ maka $c(u) \neq c(v)$.

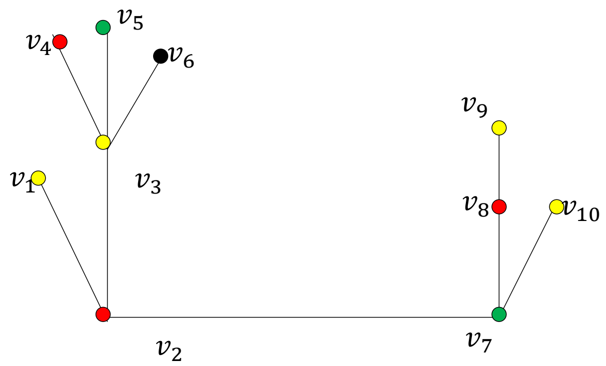
Bukti: Misalkan c adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung dan misalkan $\Pi = \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ adalah partisi dari titik – titik G ke dalam kelas warna c_i. Untuk semua $v \epsilon V(G)$, andaikan $c(u) = c(v)$ sedemikian sehingga titik u dan v berada dalam kelas warna yang sama, misal c_i dari Π. Akibatnya, $(u, c_i) = d(v, c_i) = 0$. Karena $d(u,w) = d(v,w)$ untuk setiap $w \epsilon V(G) - \{u,v\}$ maka $(u, c_i) = d(v, c_i)$ untuk setiap $j \neq i, 1 \leq j \leq k$. Akibatnya $c_\Pi(u) = c_\Pi(v)$ sehingga c bukan pewarnaan lokasi. Jadi $c(u) \neq c(v)$. ■

Akibat 2.1 (Chartrand dkk., 2002)

Jika G adalah graf terhubung dengan suatu titik yang bertetangga dengan k daun, maka $\chi_L(G) \geq k + 1$.

Bukti: Misalkan v adalah suatu titik yang bertetangga dengan k daun, yaitu $x_1, x_2, \ldots, x_k$ di G. Berdasarkan Teorema 2.1, setiap pewarnaan lokasi dari G mempunyai warna yang berbeda untuk setiap x_i, dimana $i = 1,2,3, \ldots, k$. karena v bertetangga dengan semua x_i, maka v harus mempunyai warna yang berbeda dengan semua daun x_i. Akibatnya $\chi_L(G) \geq k + 1$. ■

Berikut ini diberikan graf G dan akan ditentukan bilangan kromatik lokasi dari graf G tersebut .



Gambar 7. Pewarnaan lokasi minimum pada G dengan $\chi_L(G) = 4$

Diberikan graf *G* yang dapat terlihat di Gambar 7, akan ditentukan terlebih dahulu batas bawah bilangan kromatik lokasi graf *G*. Karena terdapat titik v_3 yang mempunyai tiga daun, maka berdasarkan. Akibat 2.1, diperoleh

$$\chi_L(G) \geq 4. \qquad (2.1)$$

Misalkan *c* adalah pewarnaan titik menggunakan empat warna, pada graf *G* diberikan kelas warna sedemikian sehingga diperoleh $\Pi = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ dengan $C_1 = \{v_1, v_3, v_9, v_{10}\}$, $C_2 = \{v_2, v_4, v_8\}$, $C_3 = \{v_5, v_7\}$ dan C_4=$\{v_6\}$, oleh karena itu, diperoleh kode warna sebagai berikut :

$c_\Pi(v_1) = (0,1,2,3)$; $c_\Pi(v_6) = (1,2,2,0)$

$c_\Pi(v_2) = (1,0,1,2)$; $c_\Pi(v_7) = (2,1,0,3)$

$c_\Pi(v_3) = (0,1,1,1)$; $c_\Pi(v_8) = (1,0,1,4)$

$c_\Pi(v_4) = (1,0,2,2)$; $c_\Pi(v_9) = (0,1,2,5)$

$c_\Pi(v_5) = (1,2,0,2)$; $c_\Pi(v_{10}) = (0,2,1,4)$

Karena kode warna dari semua titik di *G* berbeda, maka *c* adalah pewarnaan lokasi. Jadi, $\chi_L(G) \leq 4$. (2.2)

Berdasarkan (2.1) dan (2.2), maka Π adalah pewarnaan lokasi dari *G* sehingga $\chi_L(G) = 4$.

Teorema 2.2 (Chartrand dkk., 2002)

Untuk siklus C_n misalkan $n \geq 3$, maka

$$\chi_l(C_n) = \begin{cases} 3, & jika\ n\ adalah\ ganjil \\ 4, & jika\ n\ adalah\ genap \end{cases}$$

Bukti : Pertimbangkan dua kasus

Kasus 1. $n \geq 3$ adalah ganjil. Misal himpunan titik graf siklus $V(C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ditetapkan warna 1 untuk v_1 diberi warna 1, warna 2 untuk v_i jika i adalah genap dan warna 3 untuk v_i jika $i \geq 3$ dan ganjil. Berdasarkan Akibat 2.1 perlu ditunjukan bahwa ini adalah pewarnaan lokasi untuk membuktikan bahwa $\chi_l(C_n) = 3$. Pertimbangkan dua sub kasus berikut :

Subkasus 1.1

Jika $n \geq 4k + 1$, dimana $k \geq 1$. Untuk $1 \leq i \leq k$, $c(v_{2i}) = (2i – 1,0,1)$ dan untuk $k + 1 \leq i \leq 2k$, $c(v_{2i}) = (2k + 2 – 2i, 0,1)$. Juga, untuk $1 \leq i \leq k$, $c(v_{2i}) = (2i - 1,1,0)$ dan untuk $k + 1 \leq i \leq 2k$, $c(v_{2i}) = (2k + 2 – 2i, 0,1)$. Karena vektor-vektor, $c(v_i)$ berbeda. Sehingga pewarnaan tersebut adalah pewarnaan lokasi jadi $\chi_L(C_{4k+1}) = 3$.

Subkasus 1.2

$n = 4k + 3$, dimana $k \geq 0$. Membuktikan bahwa $\chi_L(C_{4k+3}) = 3$ dengan cara yang sama pada subkasus 1.1 .

Kasus 2

Jika $n \geq 4$ adalah genap. Misalkan kembali himpunan titik graf siklus $V(C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Diberi warna 1 untuk v_i ,warna 2 untuk v_i, warna 3 untuk v_i , jika $i \geq 3$, i ganjil, dan warna 4 untuk v_i jika $i \geq 4$ genap. Akan ditunjukkan bahwa pewarnaan lokasi dari C_n adalah $\chi_L(C_{4k}) = 4$.

Subkasus 2.1

Jika $n = 4k$, dimana $k \geq 1$ untuk $1 \leq i \leq k$, $c_\Pi(v_{2i+1}) = (2i, 2i-1,0,1)$, dimana $k+1 \leq i \leq 2k-1$, $c_\Pi(v_{2i+1}) = (4k-2i, 4k-2i+1,0,1)$. Untuk $2 \leq i \leq k$,, $c_\Pi(v_{2i}) = (2i-1, 2i-1,1,0)$, dimana $k+1 \leq i \leq 2k$, $c_\Pi(v_{2i}) = (2k+1-2i, 4k+2-2i, 1,0)$. Karena ordinat- ordinat dari $c_\Pi(v_i)$ berbeda pewarnaan tersebut adalah pewarnaan lokasi .

Subkasus 2.2

Jika $n = 4k+2$, dimana $k \geq 1$. Pembuktian bahwa pewarnaan tersebut adalah pewarnaan lokasi sama seperti sub kasus 2.1. Selanjutanya ini hanya perlu membuktikan bahwa $\chi_L(G) = 4$, jika n adalah genap. Asumsikan sebaliknya bahwa terdapat pewarnaan lokasi c dari C_n memerlukan 3 warna, misalkan 1,2,3, untuk $n \geq 4$. Setidaknya terdapat satu warna, misalkan 2 adalah warna bilangan genap *t* dari titik C_n, dimana $2 \leq t \leq n/2$. Seperti proses siklus pada C_n. Dimulai dengan v_1 misalkan, $v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in}$, titik-titik dari $C_n$bahwa berwarna 2. Karena tidak ada 2 titik yang bertetangga , termasuk untuk setiap bilangan bulat dengan $1 \leq j \leq t$, interval $I_j = \{v_{ij+1}, v_{ij+2}, \dots, v_{ij+1} - 1\}$.

Pertama, akan ditunjukan bahwa tidak ada interval yang memilikikardinalitas ganjil untuk 3 atau lebih, untuk asumsi sebaliknya beberapa selang I_j memuat bilangan ganjil pada titik 3 atau lebih . Tanpa menghilangkan secara umum, Asumsikan bahwa v_{ij+1} dan $v_{ij+1} - 1$ diberi warna 1. Meskipun demikian, $c_\Pi(v_{ij}+1)$ = $c_\Pi(v_{ij+1}-1)$ = (0,1,1) tetapi tidak mungkin.

Kedua, akan ditunjukan bahwa tidak ada selang yang memuat bilangan genap pada titik-titiknya, untuk asumsikan sebaliknya, bahwa terdapat selang-selang yang memuat bilangan genap di titik –titiknya. Karena c_{2k} memilikisusunan genap, pasti terdapat bilangan genap dari selang yang memuat bilangan genap pada titik-titiknya. Misal I_j dan I_k menjadi 2 selang berbeda memuat bilangan genap dititik-titiknya. Asumsikan, tanpa kehilangan keumuman, bahwa $v_{ij}+1$ diberi pewarnan 1. Tepat hanya 1 dari $v_{ik}+1$ dan $v_{ik}-1$ diberi warna 1, maka $c_\Pi(v_{ij}+1)$ = $c_\Pi(v_{ij+1}-1)$ = (0,1,1) kontradiksi. Akibatnya, semua selang *t = n/2* memuat tepat satu titik. Sehingga, terdapat bilangan bulat terkecil I_j $(1 \leq j \leq n/2)$, maka $v_{ik} +$

1 dan $v_{ik} - 1$ diberi warna yang berbeda, misalkan 1 dan 3, secara berturut-turut. Pentingnya, terdapat bilangan bulat $I_k > I_j$ bahwa $v_{ik} - 1$ diberi warna 3 dan $v_{ik} + 1$ diberi warna 1. Meskipun demikian $c_\Pi(v_{ij} + 1)$ = $c_\Pi(v_{ij+1} - 1)$ = (0,1,1). Hasil akhir kontradiksi oleh karena itu $\chi_L(C_n) = 4$ jika n adalah genap. ■

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada semester genap tahun akademik 2020/2021 di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung .

3.2 Metode Penelitian

Langkah – langkah yang metode yang digunakan dalam penelitian adalah studi literatur.

1. Menentukan bilangan kromatik graf *shadow* siklus dengan prosedur sebagai berikut:
   - Menentukan batas dan batas bawah bilangan kromatik lokasi pada graf *shadow* siklus $D_2(c_n)$ dengan menggunakan Teorema 2.2, dimana untuk *n* ganjil membutuhkan sekurang–kurangnya 3 warna sedangkan untuk *n* genap membutuhkan sekurang-kurangnya 4 warna. Jika ternyata tidak cukup menggunakan 4 warna maka dilakukan pembuktian dengan kontradiksi.

- Mengkontruksi graf dengan mengawali dari pewarnaan titik pada graf *shadow* siklus, sehingga diperoleh kelas-kelas warna atau partisi pembeda graf tersebut. Kemudian dimodifikasi sehingga memenuhi kriteria pewarnaan lokasi dengan membentuk struktur dari graf *shadow* siklus.

2. Menentukan bilangan kromatik lokasi graf barbel dan subdivisinya dengan prosedur sebagai berikut :
    - Menentukan batas bawah dari bilangan kromatik lokasi graf barbel *shadow shadow* yang diperoleh dari hasil bilangan kromatik lokasi *shadow* siklus
    - Menentukan batas atas dari bilangan kromatik lokasi graf barbel *shadow* siklus yang diperoleh dari hasil bilangan kromatik *shadow* siklus
3. Menentukan bilangan kromatik lokasi graf subdivisi dari barbel *shadow* siklus dengan prosedur sebagai berikut :
    - Menentukan batas bawah dari bilangan kromatik lokasi graf subdivisi dari graf barbel *shadow shadow* yang diperoleh dari hasil bilangan kromatik lokasi graf barbel *shadow* siklus
    - Menentukan batas atas dari bilangan kromatik graf subdivisi dari lokasi graf barbel *shadow* siklus yang diperoleh dari hasil bilangan kromatik graf barbel *shadow* siklus

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan kesimpulan yang diperoleh bilangan kromatik lokasi graf *shadow* siklus $D_2(c_n)$ untuk $n \geq 3$ adalah 6 untuk n ganjil dan 7 untuk *n* = 6,8 dan 8 untuk n genap lainnya. Sedangkan untuk bilangan kromatik lokasi graf barbel *shadow* siklus dan subdivisinya adalah 6 untuk *n* ganjil dan 8 untuk *n* genap.

5.2 Saran

Penelitian ini dapat dilanjutkan untuk menentukan bilangan kromatik lokasi dari gabungan saling lepas graf *shadow* siklus, serta untuk operasi-operasi lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Asmiati, Wamiliana, Devriyadi, dan Yulianti, L. 2017. On Some Petersen Graphs Having Locating-Chromatic Number Four or Five. *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)*. 102(4):769-778

Asmiati, I Ketut Sadha Gunce Yana, dan Lyra Yulianti.2018.On The Locating Chormatic Number of Certain Barbell Graphs.*International Journal of Mathematical Sciences.*2018:1-5

Asmiati, I Ketut Sadha Gunce Yana, dan Lyra Yulianti.2019. On the Locating Chromatic Number of Subdivision of Barbell Graphs Containing Generalized Petersen Graph. *International Journal of Computer Scienceand Network Security (IJCSNS).* 19(7)

Asmiati and Baskoro, E.T.2012. Characterizing All Graphs containing Cycles with locating-chromotic number *3*. *AIP Conf. Proc.,* 1450.351-357

Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M., Slater, P., and Zhang, P.2002. The locating-chromatic number of a graph, *Bull. Inst. Combin. Appl.*, 36**,** 89 –101

Deo, N. 1989. *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*. Prentice Hall of India Private Limited, New Delhi.