MODEL SIQR DENGAN KARANTINA DAN VAKSINASI PADA PENYAKIT DIFTERI

(Skripsi)

Oleh

SAYYIDAH ANNISA FITRI

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2021

ABSTRACT

SIQR MODEL WITH VACCINATION AND QUARANTINE OF DIPHTERIA DISEASE

By

SAYYIDAH ANNISA FITRI

Diphteria is a bacterial infection that attacks the upper respatory and throat systems caused by *Corynebacterium diphtheria*. Because diphteria is a potentially contagious and dangerous disease, it is important to use mathematical modelling to try to suppress its development. The modelling referred to is the SIQR model in which there are four compartments in the model, namely the Susceptible, Infected, Quarantined, and Recovered compartment which will form a non linier differential equation system, then simplified by transforming models, determining the equilibrium points and basic reproduction number (R_0), analyzing the stability of the equilibrium point, and then doing a model simulation.

To determine basic reproduction number (R_0), the rate in the infected compartment greatly influences the stability of the equilibrium point. Because when $R_0 < 1$ the stability of the disease free equilibrium point is stable asymptotic local, whereas if $R_0 > 1$ then the stability of the endemic equilibrium point is stable asymptotic local. The role of vaccination is no less important in the model, because the greater the vaccination rate given, the faster the diphteria disease disappears from the population. Likewise with quarantine, each infected individual must be quarantined in order for the disease to spread.

Keywords : *diphteria, SIQR model, equilibrium point, vaccination, quarantine.*

ABSTRAK

MODEL SIQR DENGAN KARANTINA DAN VAKSINASI PADA PENYAKIT DIFTERI

Oleh

SAYYIDAH ANNISA FITRI

Difteri adalah penyakit infeksi bakteri yang menyerang sistem pernapasan atas, dan tenggorokan yang disebabkan oleh bakteri *Corynebacterium diphtheria*. Karena penyakit difteri termasuk penyakit yang dapat menular dan juga berbahaya, maka penting menggunakan pemodelan matematika untuk mencoba menekan perkembangannya. Pemodelan yang dimaksud adalah model SIQR dimana terdapat empat *kompartemen* dalam model, yaitu *kompartemen Susceptible*, *Infected*, *Quarantined*, dan *Recovered* yang akan membentuk sistem persamaan non linier, kemudian disederhanakan dengan transformasi model, menentukan titik ekuilibrium dan bilangan reproduksi dasar (R_0), menganalisis kestabilan titik ekuilibrium, kemudian melakukan simulasi model.

Untuk menentukan bilangan reproduksi dasar (R_0), laju pada kompartemen *Infected* sangat mempengaruhi kestabilan titik ekuilibriumnya. Karena ketika $R_0 < 1$ maka kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik lokal, sedangkan jika $R_0 > 1$ maka kestabilan titik ekuilibrium endemik penyakit stabil asimtotik lokal. Peran vaksinasi juga tidak kalah penting dalam model, karena semakin besar tingkat vaksinasi yang diberikan maka semakin cepat pula penyakit difeteri menghilang dari populasi. Begitu pula dengan karantina, setiap individu yang terinfeksi harus dikarantina agar penyakit tidak dapat menyebar.

Kata Kunci: *difteri, model SIQR, titik ekuilibrium, vaksinasi, karantina*.

MODEL SIQR DENGAN KARANTINA DAN VAKSINASI PADA PENYAKIT DIFTERI

Oleh

SAYYIDAH ANNISA FITRI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat Untuk Mencapai Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2021

Judul Skripsi : **Model SIQR dengan Karantina dan Vaksinasi pada Penyakit Difteri**

Nama Mahasiswa : *Sayyidah Annisa Fitri*

Nomor Pokok Mahasiswa : 1757031009

Program Studi : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.
NIP 19620704 198803 1 002

Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.
NIP 19700831 199903 1 002

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.** .....

Sekretaris : **Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.** .....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Dra. Dorrah Azis, M.Si.** .....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, M.T.
NIP 19740705 200003 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **19 Agustus 2021**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama Mahasiswa	: **Sayyidah Annisa Fitri**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1757031009**
Jurusan	: **Matematika**
Judul Skripsi	: **Model SIQR dengan Karantina dan Vaksinasi pada Penyakit Difteri**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan semua tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung.

Bandar Lampung, 23 Agustus 2021

Yang Menyatakan,

Sayyidah Annisa Fitri

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Sayyidah Annisa Fitri lahir di Bandar Lampung pada 02 Oktober 1997. Terlahir sebagai anak pertama dari Bapak Edi Susanto dan Ibu Siti Mulyati dan merupakan kakak dari Muhammad Fajar Afif.

Penulis menyelesaikan pendidikan di TK Al-Hikmah pada tahun 2004. Pendidikan sekolah dasar di SD Negeri 1 Kali Balau Kencana pada tahun 2010. Pendidikan sekolah menengah pertama di MTs Negeri 2 Bandar Lampung pada tahun 2010. Pendidikan sekolah menengah atas di MAN 1 Bandar Lampung pada tahun 2016. Kemudian penulis diterima sebagai mahasiswa S1 Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung (Unila) pada tahun 2017 melalui jalur SMMPTN (Seleksi Mandiri Masuk Perguruan Tinggi).

Sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu dan pengabdian ke masyarakat, penulis telah melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) selama empat puluh hari di Desa Sumber Alam, Kecamatan Air Hitam, Kabupaten Lampung Barat, Lampung pada Januari 2020. Dan sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu di dunia kerja, penulis telah melaksanakan Kerja Praktik (KP) selama empat puluh hari di Kantor Dinas Pendidikan dan Kebudayaan Kota Bandar Lampung pada Agustus 2020.

KATA INSPIRASI

"Maka sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan."

(Q.S. Asy-Syarh : 5)

"Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya."

(Al-Baqarah : 286)

"Tetapi boleh jadi kamu tidak menyenangi sesuatu, padahal itu baik bagimu, dan boleh jadi kamu menyukai sesuatu, padahal itu tidak baik bagimu. Allah mengetahui, sedang kamu tidak mengetahui."

(Q.S Al-Baqarah : 216)

"Jika kamu berbuat baik (berarti) kamu berbuat baik untuk dirimu sendiri. Dan jika kamu berbuat jahat, maka (kerugian kejahatan) itu untuk dirimu sendiri."

(Q.S Al-Isra : 7)

"Sesunggunya Allah tidak akan mengubah keadaan suatu kaum sebelum mereka mengubah keadaan diri mereka sendiri."

(Q.S Ar-Ra'd : 11)

"Maka nikmat Tuhanmu manakah yang kamu dustakan?"

(Q.S Ar-Rahman : 13)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirobbil'alamin.

Puji dan syukur saya haturkan kepada Allah Subhanahu Wata'ala atas berkah dan karunia-Nya. Shalawat dan salam selalu tercurah kepada baginda Nabi Muhammad *Shallallahu 'Alaihi Wasallam* yang telah memberikan kabar gembira kepada umat manusia.

Kupersembahkan karya sederhana ini untuk :

Mama dan Adek Fajar

Sangat bersyukur kepada Allah *Subhanahu Wata'ala* karena dapat terlahir menjadi putri yang dibesarkan oleh Mama. Terimakasih sebesar-besarnya atas semua yang telah diberikan kepadaku, doa, kasih sayang, waktu, pengorbanan, dan keringat yang belum dapat aku balas. Terimakasih kepada adek Fajar yang selalu mendoakan dan mendukung setiap langkah yang aku pilih.

Guru dan Dosen

Ilmu dan pengetahuan serta begitu banyak pembelajaran hidup yang telah diberikan adalah hal terbaik yang tak kalah ku syukuri. Terimakasih atas segala jasa-jasamu selama ini.

SANWACANA

Alhamdulillahi Robbil 'alamin. Penulis mengucapkan puji syukur kehadirat Allah *Subhanahu Wata'ala*, karena dengan ridho dan karunia-Nya serta atas berkah dan rahmat-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Model SIQR dengan Vaksinasi dan Karantina pada Penyakit Difteri".

Penulis menyadari bahwa dalam menyusun penulisan skripsi ini tidak terlepas dari bimbingan, bantuan, dukungan dan doa dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph. D., selaku dosen pembimbing utama yang selalu bersedia membimbing, memberikan arahan, dukungan dan semangat kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
2. Bapak Agus Sutrisno, S.Si., M.Si., selaku dosen pembimbing kedua yang juga bersedia memberikan bimbingan, arahan, saran dan dukungan yang membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
3. Ibu Dra. Dorrah Azis, M.Si., selaku penguji utama yang telah bersedia memberikan kritik dan saran, serta evaluasi kepada penulis sehingga dapat lebih baik lagi.

4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
5. Bapak Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, S.Si., M. T., selaku dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Ibu Widiarti, S. Si., M. Si., selaku dosen pembimbing akademik yang selalu memberikan bimbingan, saran dan motivasi kepada penulis selama melaksanakan perkuliahan ini.
7. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
8. Mama tercinta yang selalu mendoakan dan bersabar dalam memberikan pesan, motivasi, semangat, dan dukungan kepada penulis.
9. Adek Fajar, Bapak dan Alleyda serta semua keluarga yang telah memberikan dukungan, bantuan dan doa kepada penulis.
10. Muhammad Azhari Alam yang senantiasa mendoakan, memotivasi dan memberi bantuan serta dukungan kepada penulis.
11. Sahabat-sahabat penulis Amalia Puspita Rani, Suci Anugrah H, Indah Okta Sari, Anindiya Handayani, Restu Ambiani, Yunda Nurul Yasmine, Hamma Qurrata A’yun, Riska Auliyanti, Yurika Chairani, Nurul Rizki, Fatimah Zahra, dan Triayu Sartika Zanti yang telah memberikan bantuan, dukungan dan motivasi serta kenangan kepada penulis.
12. Teman-teman KKN dan masyarakat Pekon Sumber Alam yang telah memberikan pengalaman dan pembelajaran hidup kepada penulis.

13. Pegawai dan Staff Kantor Dinas Pendidikan dan Kebudayaan Kota Bandar Lampung yang telah memberikan ilmu dan pengalaman kerja yang sangat berharga kepada penulis.
14. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2017.
15. Almamater tercinta Universitas Lampung.

Semoga skripsi ini dapat memberikan banyak manfaat bagi kita semua. Penulis juga menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 23 Agustus 2021

Penulis,

Sayyidah Annisa Fitri

DAFTAR ISI

Halaman

I. PENDAHULUAN 1

1.1 Latar Belakang dan Masalah 1

1.2 Tujuan Penelitian..... 3

1.3 Manfaat Penelitian..... 4

II. TINJAUAN PUSTAKA 5

2.1 Pemodelan Matematika 5

2.2 Model Kermack-McKendrick 6

2.3 Model SIQR 8

2.4 Sistem Kesetimbangan dan Autonomous..... 11

2.5 Linierisasi 13

2.6 Linierisasi untuk Sistem Persamaan Diferensial Nonlinier *Autonomous* 14

2.7 Analisis Kestabilan..... 16

2.8 Kriteria Kestabilan *Routh-Hurwitz*..... 18

2.9 Bilangan Reproduksi Dasar..... 20

III. METODOLOGI PENELITIAN 21

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian 21

3.2 Metode Penelitian..... 21

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN 23

4.1 Asumsi-Asumsi dalam Model..... 23

4.2 Model SIQR dengan Karantina dan Vaksinasi..... 25

4.3 Titik Ekuilibrium..... 30

4.3.1 Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit 30

4.3.2 Titik Ekuilibrium Endemik Penyakit..... 31

4.4 Kestabilan Titik Ekuilibrium..... 35

4.5 Jumlah Individu Minimum yang di Vaksinasi 45

4.6 Simulasi Model..... 46

4.6.1 Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit 47
4.6.2 Titik Ekuilibrium Endemik Penyakit..... 49
4.6.3 Jumlah Individu Minimum yang di Vaksinasi 52

V. KESIMPULAN..... 54
5.1 Kesimpulan..... 54

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN

DAFTAR TABEL

Tabel Halaman

1. Daftar Variabel-Variabel 9
2. Daftar Parameter-Parameter 10
3. Nilai-Nilai Parameter Model 46
4. Nilai R_0 pada Masing-Masing $p_f > 0{,}5$ 53

DAFTAR GAMBAR

Gambar Halaman

1. *Kompartemen* model SIR 6
2. *Kompartemen* model SIQR 10
3. Model SIQR dengan karantina dan vaksinasi pada penyakit difteri 25
4. Dinamika populasi SIQR titik ekuilibrium bebas penyakit..... 48
5. Dinamika populasi SIQR titik ekuilibrium endemik penyakit 51

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Difteri adalah penyakit menular yang disebabkan oleh bakteri *Corynebacterium diphtheria*, yang terutama menginfeksi tenggorokan, saluran pernapasan bagian atas dan juga pada kulit. Penyakit ini menyebar secara langsung dari penderita melalui *droplet* (percikan ludah) dari batuk, bersin, muntah, melalui alat makan atau kontak langsung dari lesi di kulit.

Tanda dan gejala penyakit ini berupa infeksi saluran pernapasan akut (ISPA) bagian atas, adanya nyeri tenggorok, nyeri menelan, demam, dan ditemui adanya *pseudomembran* (selaput) putih/keabu-abuan/kehitaman di tonsil, faring, atau laring yang tak mudah lepas, serta berdarah apabila diangkat. Pada keadaan lebih berat dapat ditandai dengan kesulitan menelan, sesak nafas, *stridor* (suara mendengkur) pembengkakan leher yang tampak seperti leher sapi (*bullneck)* bahkan dapat menyebabkan kematian. Kematian biasanya terjadi karena sumbatan jalan nafas, kerusakan otot jantung, serta kelaianan susunan saraf pusat dan ginjal (Kementerian Kesehatan Republik Indonesia, 2017).

Karena dapat mengancam kehidupan manusia maka penyakit ini masih menjadi masalah kesehatan yang sangat penting. Berdasarkan data dari WHO, penyebaran penyakit difteri dapat ditekan oleh vaksinasi, karena telah mengurangi angka kematian dan *morbiditas* difteri secara sistematis. Sampai saat ini program vaksinasi masih dipercaya sebagai cara yang paling efektif dalam menekan penyebaran penyakit difteri (WHO, 2017).

Selain diberi vaksinasi penderita difteri harus dikarantina di rumah ataupun di rumah sakit bergantung tingkat keparahan infeksi. Karantina merupakan pembatasan seseorang dalam rumah ataupun rumah sakit yang diduga terinfeksi penyakit dan/atau terkontaminasi sedemikian rupa untuk mencegah penyebaran penyakit.

Mengingat pentingnya pengetahuan lebih lanjut terkait difteri, maka diperlukan suatu model matematika yang dapat membantu dalam memprediksi dan mengendalikan penyebaran penyakit endemik di masa yang akan datang. Pemodelan matematika yang dimaksud adalah model SIR (*Susceptible-Infected-Recovered*). Model SIR pertama kali diperkenalkan oleh Kermack dan McKendrick pada tahun 1927 (Brauer, 2005). Bentuk umum model SIR disajikan dalam bentuk persamaan diferensial. Pada model SIR, populasi dibagi ke dalam tiga kelompok, yaitu kelompok individu yang sehat namun rentan terinfeksi penyakit (*Susceptible*), kelompok individu yang terinfeksi penyakit dan dapat sembuh dari penyakit (*Infected*), dan kelompok individu yang telah sembuh dan kebal terhadap penyakit (*Recovered*).

Pada penelitian ini akan ditambahkan kelompok individu yang dikarantina (*Quarantined*) pada penyakit difteri sehingga membentuk model SIQR (*Susceptible-Infected-Quarantined-Recovered*) yang merupakan pengembangan model SIR (*Susceptible-Infected-Recovered*) dengan upaya karantina dan vaksinasi untuk mengendalikan penyebaran penyakit difteri (Puspita G., Kharis M., & Supriyono, 2017).

Karena penyebaran penyakit dapat ditekan oleh vaksinasi dan karantina dianggap mempengaruhi model penyebaran penyakit difteri maka penulis mencoba melakukan penelitian yang berjudul "Model SIQR dengan Karantina dan Vaksinasi Pada Penyakit Difteri".

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengkaji penyebaran penyakit difteri dengan pengaruh karantina dan vaksinasi menggunakan model epidemi SIQR (*Susceptible-Infected-Quarantined-Recovered*).
2. Mendapatkan bilangan reproduksi dasar (R_0) melalui kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit (*disease free equilibrium*) dan titik ekuilibrium endemik penyakit (*endemic equilibrium*).
3. Mencari jumlah individu yang divaksinasi agar tidak terjadi endemik penyakit dengan menentukan bilangan reproduksi dasar (R_0) dan tingkat vaksinasi minimum pada model SIQR penyakit difteri dengan karantina dan vaksinasi.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Sebagai sarana memperdalam pengetahuan pemodelan matematika khususnya model epidemi SIQR pada penyebaran penyakit difteri dengan pengaruh karantina dan vaksinasi.
2. Sebagai sarana alternatif dalam menyelesaikan persoalan penyakit difteri dengan pengaruh karantina dan vaksinasi.
3. Sebagai referensi atau kajian lanjutan dalam dunia kesehatan.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pemodelan Matematika

Model adalah representasi penyederhanaan dari sebuah realita yang kompleks, biasanya bertujuan untuk memahami realita tersebut dan mempunyai ciri-ciri yang sama dengan tiruannya dalam menyelesaikan permasalahan. Model adalah karakteristik umum yang mewakili sekelompok bentuk yang ada atau representasi suatu masalah dalam bentuk yang lebih sederhana dan mudah dikerjakan (Ripno Juli Iswanto, 2012).

Model matematika yang diperoleh dari suatu masalah matematika yang diberikan, selanjutnya diselesaikan dengan aturan-aturan yang ada. Penyelesaian yang diperoleh perlu diuji untuk mengetahui apakah penyelesaian tersebut valid atau tidak. Hasil yang valid akan menjawab secara tepat model matematikanya dan disebut solusi matematika. Jika penyelesaian tidak valid atau tidak memenuhi model matematika maka solusi masalah belum ditemukan, dan diperlukan pemecahan ulang atas model matematikanya (Edi Cahyono, 2011).

2.2 Model Kermack-McKendrick

Model dasar tentang penyebaran penyakit pertama kali dirumuskan oleh Kermack-McKendrick pada tahun 1927 (Brauer, 2005). Model Kermack-McKendrick disebut juga sebagai model SIR (*Susceptible-Infected-Recovered*). Pada model SIR populasi dipartisi menjadi tiga subpopulasi, yaitu subpopulasi yang sehat tetapi rentan terinfeksi (*susceptible*), subpopulasi yang terinfeksi dan dapat menularkan penyakit kepada individu yang sehat (*infected*), dan subpopulasi yang sembuh dari penyakit dan akan kebal terhadap penyakit (*recovered*). Subpopulasi sering disebut kelas atau *kompartemen* (*compartment*).

Dalam model ini, $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{t})$ mewakili jumlah individu *susceptible*, *infected*, dan *recovered* pada waktu $\boldsymbol{t}$ sedangkan $\boldsymbol{N}$ adalah total keseluruhan dari populasi. *Susceptible* $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{t})$ adalah jumlah individu yang sehat tetapi rentan terinfeksi pada saat $\boldsymbol{t}$, *infected* $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{t})$ adalah jumlah individu yang terinfeksi dan dapat menularkan penyakit kepada individu yang sehat pada saat $\boldsymbol{t}$, dan *recovered* adalah jumlah individu yang sembuh dari penyakit dan akan kebal terhadap penyakit pada saat $\boldsymbol{t}$. Selanjutnya $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{t})$ hanya dituliskan S,I,R.

Kompartemen model SIR (*Susceptible-Infected-Recovered*) dapat dilihat pada Gambar 2.1 berikut.

$$S \xrightarrow{\beta} I \xrightarrow{\gamma} R$$

Gambar 2.1 *Kompartemen* model SIR

Sehingga diperoleh formulasi untuk model SIR sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI \qquad S(0) > 0$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I \qquad I(0) > 0$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I \qquad R(0) > 0$$

$$N(t) = S(t) + I(t) + R(t)\ , \beta > 0\ , \gamma > 0$$

Dengan

β : laju penularan

γ : laju kesembuhan

Laju perubahan untuk setiap *kompartemen* diperoleh dari *input* masing-masing *kompartemen* dikurangi *output* dari masing-masing *kompartemen*.

Asumsi-asumsi untuk model di atas adalah:

1. Penyebaran penyakit berada pada lingkungan tertutup, artinya tidak ada imigrasi ataupun emigrasi, dan tidak ada kelahiran ataupun kematian pada populasi, sehingga total populasi adalah konstan.
2. Jumlah individu yang pindah dari *kompartemen infected* persatuan waktu dinyatakan dengan $\gamma I(t)$, dimana γ adalah laju transisi dari *kompartemen infected* ke *recovered*.
3. Jumlah individu *susceptible* yang terinfeksi oleh individu *infected* persatuan waktu dinyatakan dengan βSI.

Model di atas merupakan model *epidemi deterministik* atau bisa disebut juga model *kompartemen*. Kebanyakan model untuk penyakit infeksi menggunakan model *deterministik* karena hanya membutuhkan sedikit data. (Trottier H & Philippe P, 2001).

2.3 Model SIQR

Model SIR (*Susceptible-Infected-Recovered*) dapat dimodifikasi menjadi berbagai bentuk model epidemi. Salah satunya adalah model SIQR (*Susceptible-Infected-Quarantined-Recovered*) yang digunakan untuk pemodelan matematika pada penyebaran penyakit difteri dengan pengaruh karantina dan vaksinasi. Model tersebut dipartisi menjadi empat kelas yang terdiri dari kelas *susceptible* meliputi individu yang sehat tetapi rentan terinfeksi dinotasikan dengan S, kelas *infected* meliputi individu yang terinfeksi dan dapat menularkan penyakit dinotasikan dengan I, kelas *quarantined* meliputi individu yang dikarantina dinotasikan dengan Q, dan kelas *recovered* meliputi individu yang telah sembuh dari penyakit dan kebal terhadap penyakit dinotasikan dengan R.

Adapun pada pemodelan matematika penyebaran penyakit difteri diberikan asumsi-asumsi sebagai berikut:

1. Jumlah populasi cukup besar.
2. Laju kelahiran sama dengan laju kematian, sehingga total populasi konstan.
3. Populasi tertutup, berarti tidak ada proses emigrasi dan imigrasi.
4. Setiap individu yang baru lahir dalam keadaan sehat tetapi masih dapat terinfeksi penyakit karena belum kebal terhadap penyakit.
5. Penyakit difteri menular melalui kontak langsung dengan penderita.
6. Hanya terdapat satu penyakit yang menyebar dalam populasi.

7. Individu yang terinfeksi dapat sembuh dari penyakit dan dapat meninggal akibat penyakit.
8. Setiap anak yang lahir rentan dari imun pasif karena tidak bekerja efektif disebabkan waktu yang relatif singkat.
9. Setiap individu yang sembuh dari infeksi pasti melalui proses karantina.

Untuk vaksinasinya diberikan asumsi-asumsi sebagai berikut:

1. Vaksin hanya diberikan pada individu yang baru lahir.
2. Keampuhan vaksinasi adalah 100%. Hal tersebut berarti setiap individu yang telah mendapatkan vaksin akan kebal dari penyakit.
3. Kekebalan yang terjadi karena vaksin bersifat permanen. Hal tersebut berarti individu yang mendapat vaksin tidak dapat terinfeksi oleh penyakit yang sama sampai waktu yang tidak terbatas.

Dari kedua model diperoleh daftar variabel-variabel yang disajikan dalam Tabel 2.1.

Tabel 2.1 Daftar Variabel-variabel

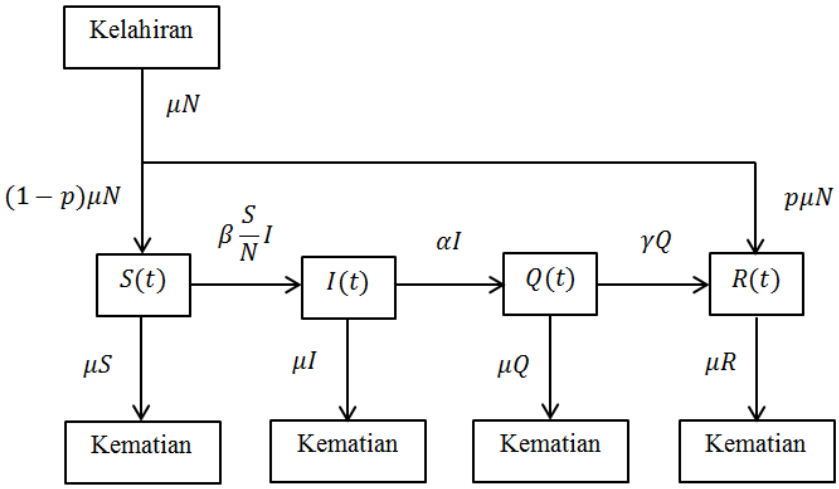
Variabel	Keterangan	Syarat
$N(t)$	Banyak populasi pada waktu t	$N(t) \geq 0$
$S(t)$	Banyak individu yang rentan terinfeksi penyakit pada waktu t	$S(t) \geq 0$
$I(t)$	Banyak individu yang terinfeksi pada waktu t	$I(t) \geq 0$
$Q(t)$	Banyak individu yang dikarantina pada waktu t	$Q(t) \geq 0$

Dari model diperoleh daftar parameter-parameter yang disajikan dalam Tabel 2..2.

Tabel 2.2 Daftar Parameter-parameter

Parameter	Keterangan	Syarat
μ	Laju kelahiran dan laju kematian	$\mu > 0$
p	Proporsi individu yang divaksinasi	$0 \leq p \leq 1$
β	Peluang antara individu yang rentan dengan individu yang terinfeksi	$\beta > 0$
α	Laju individu yang dikarantina tiap satuan waktu	$\alpha > 0$
γ	Laju kesembuhan	$\gamma > 0$

Diagram *kompartemen* untuk pemodelan matematika penyebaran penyakit difteri dapat dilihat pada Gambar 2.2



Gambar 2.2 *Kompartemen* model SIQR.

Sehingga formulasi untuk model SIQR adalah:

$$\frac{dS}{dt} = (1-p)\mu N - \mu S - \beta \frac{S}{N} I \tag{2.1}$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta S \frac{I}{N} - \mu I - \alpha I \tag{2.2}$$

$$\frac{dQ}{dt} = \alpha I - \mu Q - \gamma Q \tag{2.3}$$

$$\frac{dR}{dt} = p\mu N + \gamma Q - \mu R \tag{2.4}$$

$$N = S + I + Q + R \tag{2.5}$$

Dimana $\beta \frac{S}{N} I$ adalah laju transisi dari *kompartemen susceptible* ke *infected*, αI adalah laju transisi dari *kompartemen infected* ke *quarantined*, dan γQ adalah laju transisi dari *kompartemen quarantined* ke *recovered*. Laju kelahiran dan laju kematian untuk tiap *kompartemen* dinyatakan dengan μ, sehingga laju kelahiran adalah μN, laju kematian untuk *susceptible* adalah μS, laju kematian untuk *infected* adalah μI, laju kematian untuk *quarantined* adalah μQ, dan laju kematian untuk *recovered* adalah μR (Puspita G., Kharis M., & Supriyono, 2017).

2.4 Sistem Kesetimbangan dan Autonomous

Persamaan diferensial biasa merupakan persamaan yang memuat turunan terhadap fungsi yang memuat satu variabel bebas. Sistem persamaan diferensial biasa yang berbentuk:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) \tag{2.6}$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y) \tag{2.7}$$

Persamaan (2.6) dan (2.7) merupakan sistem *autonomous* karena $f(x, y)$ dan $g(x, y)$ tidak memuat variabel t (variabel bebas). Persamaan *autonomous* bersifat bahwa laju perubahan $\frac{dx}{dt}$ atau $\frac{dy}{dt}$ hanya bergantung pada nilai variabel x atau y dan tidak bergantung pada variabel t (Campbell & Haberman, 2008).

Contoh sistem *autonomous* adalah sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = 11x - 3y \qquad \frac{dy}{dt} = 3x + 4y \tag{2.8}$$

Contoh sistem *non autonomous* adalah sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = 10x(t) + 4y(t) \qquad \frac{dy}{dt} = 2x(t) + 13y(t) \tag{2.9}$$

Persamaan (2.8) disebut sistem *autonomous* karena variabel t tidak dinyatakan secara *eksplisit*. Sedangkan pada persamaan (2.9) variabel t dinyatakan secara *eksplisi*t, maka persamaan (2.9) disebut sistem *non autonomous*.

Sebuah titik (x_0, y_0) merupakan titik kesetimbangan (ekuilibium) dari persamaan (2.6) dan (2.7) jika memenuhi $f(x_0, y_0) = 0$ dan $g(x_0, y_0) = 0$. Karena turunan suatu konstanta sama dengan nol, maka sepasang fungsi konstan $x(t) = x_0$ dan $y(t) = y_0$ merupakan penyelesaian kesetimbangan dari persamaan (2.6) dan (2.7). Solusi kesetimbangan dari suatu persamaan diferensial adalah penyelesaian yang tidak bergantung pada variabel t (konstan terhadap waktu) (Campbell & Haberman, 2008).

2.5 Linierisasi

Persamaan nonlinier dapat diselesaikan dengan menggunakan pendekatan sistem persamaan linier. Persamaan-persamaan nonlinier yang ada, terlebih dahulu dilinierkan. Misalkan $\frac{dx}{dt}f(x)$ adalah persamaan diferensial orde pertama *autonomous* dengan solusi setimbang $x(t) = a$. Syarat awal merupakan keadaan yang menetapkan nilai pemecahan pada sebuah titik. Syarat awal menunjukkan perilaku fungsi untuk arah waktu (*time direction*). Untuk menganalisis kestabilan di titik ekuilibrium, harus ditentukan syarat awal (*initial condition*) yang dekat dengan titik ekuilibrium. Salah satu cara yang dapat dilakukan adalah dengan aproksimasi persamaan diferensial di sekitar titik ekuilibrium. Cara ini bertujuan untuk menyederhanakan persamaan diferensial (Campbell & Haberman, 2008).

Dalam kalkulus, deret Maclaurin dapat digunakan untuk mengaproksimasi fungsi $f(x)$ di sekitar $x = 0$ adalah

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots \tag{2.10}$$

Persamaan (2.10) dapat digunakan untuk mengaproksimasi fungsi di sekitar $x = a$ dan itu disebut dengan deret Taylor. Fungsi deret Taylor adalah sebagai berikut:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \cdots$$

unsur dari deret Taylor $\boldsymbol{f(a) + f'(a)(x - a)}$ termasuk konstanta $\boldsymbol{f(a)}$ adalah linierisasi atau aproksimasi garis tangen (*tangent line approximation*) untuk fungsi $\boldsymbol{f(x)}$ di sekitar titik ekuilibrium $\boldsymbol{x = a}$. Jadi aproksimasi fungsi di sekitar titik ekuilibrium dapat dilakukan dengan linierisasi seperti pada persamaan (2.11).

$$\boldsymbol{f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)} \tag{2.11}$$

2.6 Linierisasi untuk Sistem Persamaan Diferensial Nonlinier Autonomous

Diberikan sistem nonlinier *autonomous*

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) \tag{2.12}$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y) \tag{2.13}$$

Misal $\boldsymbol{x(t) = 0}$ dan $\boldsymbol{y(t) = 0}$ merupakan solusi setimbang untuk sistem nonlinier *autonomous* di atas. Maka persamaan (2.12) dan (2.13) dapat dilinierkan dengan menggunakan deret Taylor, sehingga didapatkan:

$$\boldsymbol{f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}$$

$$\boldsymbol{g(x, y) \approx g(x_0, y_0) + g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0)}$$

Karena $\boldsymbol{(x_0, y_0)}$ merupakan titik ekuilibrium, maka $\boldsymbol{f(x_0, y_0) = 0}$ dan $\boldsymbol{g(x_0, y_0) = 0}$. Solusi persamaan (2.12) dan (2.13) di dekat titik ekuilibrium dapat diaproksimasi, sehingga diperoleh:

$$\boldsymbol{\frac{dx}{dt} = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)} \tag{2.14}$$

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dt} = g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0)} \tag{2.15}$$

Misalkan $\boldsymbol{z = x - x_0}$ dan $\boldsymbol{w = y - y_0}$ maka:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} \qquad \text{dan} \qquad \frac{dw}{dt} = \frac{dy}{dt}$$

sehingga persamaan (2.14) dan (2.15) menjadi:

$$\frac{dz}{dt} = az + bw$$

$$\frac{dw}{dt} = cz + dw$$

Dimana $\boldsymbol{a = f_x(x_0, y_0)}$, $\boldsymbol{b = f_y(x_0, y_0)}$, $\boldsymbol{c = g_x(x_0, y_0)}$ dan $\boldsymbol{d = g_y(x_0, y_0)}$. Persamaan (2.12) dan (2.13) merupakan persamaan linier homogen, dengan menggunakan matriks, sistem (2.12) dan (2.13) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}$$

disini akan diperkenalkan matriks Jacobian, yaitu matriks yang elemen-elemennya berupa turunan pertama.

$$\text{Matriks Jacobian} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

karena matriks $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$ merupakan sebuah matriks pergantian dari titik ekuilibrium, maka persaamaan (2.16) dapat ditulis menjadi:

$$\frac{du}{dt} = Au$$

dimana $\boldsymbol{A}$ adalah matriks konstan yang diperoleh dari mengevaluasi matriks Jacobian pada titik ekuilibrium.

$$A = \begin{bmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

(Campbell & Haberman, 2008).

2.7 Analisis Kestabilan

Stabilitas dapat dikatakan sebagai perubahan kecil dalam syarat awal hanya menyebabkan pengaruh kecil pada penyelesaian, sedangkan kestabilan asimtotik berarti bahwa pengaruh dari suatu perubahan kecil cenderung tidak berpengaruh. Kestabilan berarti bahwa suatu perubahan kecil dalam syarat awal mempunyai pengaruh besar pada penyelesaian (Finizio & Ladas, 1982). Penjelasan mengenai nilai eigen yang diambil dari Anton (1998) akan dijelaskan sebagai berikut.

Definisi 2.1 Jika $\boldsymbol{A}$ merupakan matrik $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$, maka vektor tak nol $\boldsymbol{x}$ di dalam $\boldsymbol{R^n}$ disebut sebagai vektor eigen (*eigen vector*) dari $\boldsymbol{A}$ jika $\boldsymbol{Ax}$ adalah kelipatan skalar dari $\boldsymbol{x}$, yakni

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\lambda x} \tag{2.17}$$

Untuk suatu skalar $\boldsymbol{\lambda}$. Skalar $\boldsymbol{\lambda}$ disebut nilai eigen (*eigen value*) dari $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{x}$ dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan $\boldsymbol{\lambda}$.

Untuk mencari nilai eigen matrik $\boldsymbol{A}$ yang berukuran $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$ maka harus menuliskan kembali persamaan (2.17) sebagai $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\lambda Ix}$ atau secara ekivalen dapat ditulis

$$(\boldsymbol{\lambda I} - \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0} \tag{2.18}$$

Supaya $\boldsymbol{\lambda}$ menjadi nilai eigen, maka harus ada pemecahan tak nol dari persamaan ini. Sehingga, persamaan (2.18) akan mempunyai pemecahan tak nol jika dan hanya jika

$$\boldsymbol{det}(\boldsymbol{\lambda I} - \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0} \tag{2.19}$$

Persamaan (2.19) dinamakan *persamaan karakteristik* $\boldsymbol{A}$, skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai eigen dari $\boldsymbol{A}$. Bila diperluas, maka determinan $\boldsymbol{det}(\boldsymbol{\lambda I} - \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$ adalah polinom $\boldsymbol{\lambda}$ yang dinamakan *polinom karakteristik* dari $\boldsymbol{A}$. Berikut ini adalah penjelasan mengenai teorema kestabilan yang diambil dari Finizio & Ladas (1982).

Teorema 2.1

1. Titik ekuilibrium $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2})$ dari sistem linier akan stabil jika dan hanya jika akar-akar dari polinom karakteristik adalah real dan negatif atau mempunyai bagian real tak positif.
2. Titik ekuilibrium $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2})$ dari sistem linier akan stabil asimtotik jika dan hanya jika akar-akar dari polinom karakteristik adalah real dan negatif atau mempunyai bagian real yang negatif.
3. Titik ekuilibrium $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2})$ dari sistem linier akan tidak stabil jika paling sedikit satu akar mempunyai bagian real yang positif.

Teorema 2.2

1. Titik ekuilibrium $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2})$ dari sistem nonlinier adalah stabil asimtotik jika titik ekuilibrium $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2})$ adalah hasil linierisasi dari sistem yang stabil asimtotik pada sistem liniernya.
2. Titik ekuilibrium $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2})$ dari sistem nonlinier adalah tak stabil jika titik ekuilibrium $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2})$ adalah hasil linierisasi dari sistem yang tak stabil pada sistem liniernya.

Teorema 2.3

Diberikan Jacobian $\boldsymbol{J}\big(\boldsymbol{f}(\vec{\boldsymbol{x}})\big)$ dari sistem nonlinier $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ dengan nilai eigen $\boldsymbol{\lambda}$:

1. Stabil asimtotik lokal, jika semua bagian real nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{J}\big(\boldsymbol{f}(\vec{\boldsymbol{x}})\big)$ bernilai negatif.
2. Tidak stabil, jika terdapat paling sedikit satu nilai eigen matriks $\boldsymbol{J}\big(\boldsymbol{f}(\vec{\boldsymbol{x}})\big)$ yang bagian realnya positif.

2.8 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz

Untuk mengkaji sifat kestabilan diperlukan perhitungan untuk menentukan nilai-nilai eigen dari matriks Jacobian di titik ekuilibrium. Kriteria Routh-Hurwitz merupakan salah satu alternatif untuk menentukan nilai eigen.

Menurut Hanh (1967), diberikan suatu sistem persamaan karakteristik dalam bentuk polinomial sebagai berikut:

$$f(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + a_3 s^{n-3} + \cdots + a_{n-1} s + a_n \qquad (2.20)$$

Jika persamaan (2.20) mempunyai bagian real negatif, maka:

$$\frac{a_1}{a_0} > 0\,, \frac{a_2}{a_0} > 0\,, \ldots, \frac{a_n}{a_0} > 0 \qquad (2.21)$$

Definisi 2.2

Diberikan polinomial (2.20), dengan a_0 positif dan a_k bilangan real, $k = 1,2,\ldots,n$. Matriks Hurwitz untuk persamaan (2.20) didefinisikan sebagai matriks bujur sangkar berukuran $n \times n$ yang berbentuk sebagai berikut:

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

Determinan Hurwitz tingkat ke-k, dinotasikan dengan $\Delta_k; k = 1,2,\dots,n$ yang dibentuk dari matriks Hurwitz (2.22), didefinisikan sebagai berikut:

$$\Delta_1 = [a_1]$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{bmatrix}$$

Teorema 2.4

Menurut Grantmatcher (1959), pembuat nol polinomial (2.20) mempunyai bagian real negaitf jika dan hanya jika pertidaksamaan (2.21) dipenuhi dan

$$\Delta_1 > 0\,, \Delta_2 > 0\,, \Delta_3 > 0\,, \dots, \Delta_n > 0 \tag{2.23}$$

Menurut Edelstein (1988), dengan demikian, titik kesetimbangan $\tilde{x}$ stabil jika dan hanya jika $detH_i > 0$ untuk setiap $i = 1,2,\dots,n$. Untuk $n = 3$ dan $n = 4$, kriteria Routh-Hurwitz diberikan sebagai berikut:

$n = 3$; $a_1 > 0\,, a_2 > 0\,, a_3 > 0\,, a_1.a_2 - a_3 > 0$

$n = 4$; $a_1 > 0\,, a_2 > 0\,, a_3 > 0\,,\ a_4 > 0\,,\ a_1.a_2 - a_3 > 0$, dan

$a_3(a_1.a_2 - a_3) - {a_1}^{\mathbf{2}}.a_4 > 0$

2.9 Bilangan Reproduksi Dasar

Kemungkinan terjadinya infeksi pada suatu populasi bergantung pada bilangan reproduksi. Bilangan reproduksi dasar ($\boldsymbol{R_0}$) merupakan parameter penting dalam matematika epidemilogi yang merupakan ambang batas (*threshold*) terjadinya penyebaran penyakit. Bilangan ini diperoleh dengan cara menentukan nilai eigen matriks Jacobian pada titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemic penyakit. Beberapa kondisi yang akan timbul, yaitu:

Teorema 2.5

1. Jika $\boldsymbol{R_0 < 1}$, maka titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik lokal. Ini berarti bahwa jumlah individu yang terinfeksi akan berkurang dan penyakit akan menghilang sehingga penyakit tidak menyebar.
2. Jika $\boldsymbol{R_0 > 1}$, maka titik ekuilibrium endemik penyakit stabil asimtotik lokal. Ini berarti bahwa jumlah individu yang terinfeksi bertambah dan penyakit akan meningkat menjadi wabah, sehingga penyakit akan menyebar

(Hetchcote. H. W, Tanpa Tahun).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2020/2021 bertempat di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan menggunakan pendekatan studi *literatur* serta sistematis yang diperoleh dari jurnal atau artikel dan buku-buku yang berhubungan dengan analisis sistem pemodelan matematika.

Dalam mencapai tujuan penelitian, adapun tahapan-tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Melakukan *observasi literatur* berdasarkan jurnal atau artikel yang berhubungan dengan analisis sistem pemodelan matematika.

2. Mengkontruksi model matematika SIQR pada penyebaran penyakit difteri dengan pengaruh karantina dan vaksinasi.

3. Menentukan titik ekuilibrium dari model matematika SIQR pada penyakit difteri dengan asumsi adanya karantina dan vaksinasi.
4. Menganalisis sistem untuk mengetahui kestabilan perilaku sistem penyebaran penyakit difteri dengan pengaruh karantina dan vaksinasi.
5. Menginterpretasikan hasil yang diperoleh untuk mengetahui jumlah individu yang harus divaksinasi agar tidak terjadi endemik penyakit.
6. Menentukan nilai-nilai parameter dan rasio jumlah populasi di setiap kelas SIQR kemudian melakukan simulasi model SIQR pada penyakit difteri dengan asumsi adanya karantina untuk mendapatkan titik ekuilibrium dan dan asumsi vaksinasi untuk menentukan jumlah individu minimum yang divaksinasi.

V. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil-hasil yang telah diperoleh pada bab sebelumnya, maka diperoleh kesimpulan dan saran yang berhubungan dengan model SIQR dengan karantina dan vaksinasi pada penyakit difteri jika dikemudian hari pembaca tertarik untuk melanjutkan penelitian ini.

5.1 Kesimpulan

Penyakit difteri adalah salah satu penyakit menular yang dapat menyebabkan infeksi saluran pernapasan bagian atas bahkan kematian bagi penderita. Oleh karena itu sangat penting untuk membuat model penyebaran penyakit difteri, model SIQR penyakit difteri yang terbentuk setelah dilakukan transformasi adalah sebagai berikut:

$$\frac{ds}{dt} = (1-p)\mu - \mu s - \beta si$$

$$\frac{di}{dt} = \beta si - \mu i - \alpha i$$

$$\frac{dq}{dt} = \alpha i - \mu q - \gamma q$$

$$\frac{dr}{dt} = p\mu + \gamma q - \mu r$$

Dari model di atas diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit $(s, i, q) = ((1-p), 0,0)$, sedangkan titik ekuilibrium endemik penyakit $(s^*, i^*, q^*) = \begin{pmatrix} \frac{\mu+\alpha}{\beta}, \\ \frac{\mu\left[\frac{\beta(1-p)}{\mu+\alpha}-1\right]}{\beta}, \\ \frac{\alpha\mu\left[\frac{\beta(1-p)}{\mu+\alpha}-1\right]}{\beta(\mu+\gamma)} \end{pmatrix}$ untuk mencari titik ekuilibrium r dengan menggunakan $r = 1 - s - i - q$ begitu pula dengan mencari titik ekuilibrium r^* dengan menggunakan $r^* = 1^* - s^* - i^* - q^*$. Kemudian diperoleh bilangan reproduksi dasar (R_0) dari $i^* > 0$ sebagai berikut:

$$R_0 = \frac{\beta(1-p)}{\mu+\alpha}$$

Jika $R_0 < 1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit (s, i, q) stabil asimtotik, yang berarti jumlah individu yang terinfeksi akan berkurang dan penyakit akan menghilang sehingga penyakit tidak menyebar. Sedangkan jika $R_0 > 1$ titik ekuilibrium endemik penyakit (s^*, i^*, q^*) stabil asimtotik, yang berarti jumlah individu yang terinfeksi bertambah dan penyakit akan meningkat menjadi wabah, sehingga penyakit akan menyebar. Selain untuk menentukan sifat kestabilan titik ekuilibrium, R_0 juga dapat digunakan untuk menentukan jumlah individu minimum yang harus di vaksinasi atau tingkat vaksinasi minimum yang diperlukan untuk menekan perkembangan penyebaran penyakit difteri, berikut adalah jumlah individu yang harus divaksinasi agar tidak terjadi endemik penyakit difteri.

$$p_f > 1 - \frac{1}{R_0}$$

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H., 1998. *Aljabar Linier Elementer*. Terjemahan oleh Pantur Silaban. Erlangga, Jakarta.

Brauer, F. 2005. *The Kermack-McKendrick Epidemic Model Revisited*. Mathematical Biosciences. https://doi.org/10.1016/j.mbs.2005.07.006

Cahyono, Edi. 2013. *Pemodelan Matematika*. Graha Ilmu, Yogyakarta.

Campbell, S. L., & Haberman, R. 2008. *Introduction to Differential Equations with Dynamical Systems*. Princeton University Press, New Jersey.

Edelstein, K. 1988. *Mathematical Models in Biology*. Random House, New York.

Finizio, J., & Ladas, T. 1982. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern.* Alih bahasa oleh Widiarti Santoso. Erlangga, Jakarta.

Grantmatcher. 1959. *The Theory of Matrices.* Chelsea Publishing Company, New York.

Hanh, W. 1967. *Stability of Motion.* Springer-Verlag, New York.

Hethcote, H. W. Tanpa Tahun. *The Basic Epidemiology Models: Models, Expression for R_0, Parameter Estimation and Application*. Departemen of Mathematics. University of Iowa, USA.

Iswanto, Ripno Juli. 2012. *Pemodelan Matematika: Aplikasi dan Terapannya. Edisi Pertama*. Graha Ilmu, Yogyakarta

Kementerian Kesehatan Republik Indonesia. 2017. *Pedoman Pencegahan dan Pengendalian Difteri*. Buku Pedoman Pencegahan Dan Pengendalian Difteri.

Puspita, G., Kharis, M., & Supriyono. 2017. *Pemodelan Matematika pada Penyebaran Penyakit Difteri dengan Pengaruh Karantina dan Vaksinasi.* Unnes Journal of Mathematics.

Trottier, H., & Philippe, P. 2001. *Deterministic Modeling of Infectious Diseases: Theory and Methods.* The Internet Journal of Infectious Diseases.

Wahab, W., & Subiantoro, A. Tanpa Tahun. *Fundamental of Control System Stability Criterian-Routh Hurwitz*.

WHO. (2017). *WHO | Diphtheria – Yemen*. WHO.