BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF BARBEL SPLIT LINTASAN TANPA SISI PENDAN DAN OPERASI GABUNGAN SALING ASING

(Skripsi)

Oleh

CHAIRUL UMAM

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2021

ABSTRACT

THE LOCATING CHROMATIC NUMBER FOR BARBELL GRAPH OF SPLIT PATH WITHOUT PENDANT EDGE AND THEIR DISJOINT UNIONS

By

CHAIRUL UMAM

Let $G = (V, E)$ is a graph, where $V \neq 0$ is a set of vertices and E is a set of edges. Let c be a proper coloring of graph G if vertex u adjacent to v then $c(u) \neq c(v)$. Let C_i is a set of vertices receiving color i, the color code $c_{\Pi}(v)$ of a vertex v in G is the ordered k-tuple $\left(d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_k)\right)$ with $d(v, C_1) = \min\{d(v, x) |\ x \in C_i\}$ for $1 \leq i \leq k$. If all distinct vertices of G have distinct color codes, then c is called a locating coloring of G. The minimum number of colors in a locating coloring of G is called the locating chromatic number of graph G, denoted by $\chi_L(G)$. The locating chromatic number for barbell graph of split path graph without pendant edge is 4, as well as for disjoint union.

Keywords: locating chromatic number, barbell graph, split path graph, disjoint union.

ABSTRAK

BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF BARBEL SPLIT LINTASAN TANPA SISI PENDAN DAN OPERASI GABUNGAN SALING ASING

Oleh

CHAIRUL UMAM

Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf, dengan $V \neq 0$ adalah himpunan titik dan E adalah himpunan sisi. Misalkan c adalah suatu pewarnaan titik pada graf G jika titik u dan v bertetangga di G, maka $c(u) \neq c(v)$. Misalkan C_i merupakan himpunan semua titik-titik yang diberi warna i. Kode warna $c_\Pi(v)$ dari v adalah k-pasang terurut $\left(d(v, C_1), d(v, C_2), \ldots, d(v, C_k)\right)$ dengan

$d(v, C_1) = \min\{d(v, x) | \ x \ \in \ C_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik di G mempunyai kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarna lokasi dari G. Banyaknya warna minimum pada pewarnaan lokasi dari G disebut bilangan kromatik lokasi dari graf G, yang dinotasikan dengan $\chi_L(G)$. Bilangan kromatik lokasi graf barbel split lintasan tanpa sisi pendan adalah 4, demikian juga untuk gabungan saling asingnya.

Kata kunci: bilangan kromatik lokasi, graf barbel, graf split lintasan, gabungan saling asing.

BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF BARBEL SPLIT LINTASAN TANPA SISI PENDAN DAN OPERASI GABUNGAN SALING ASING

Oleh

CHAIRUL UMAM

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
2021

Judul Skripsi : **BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF BARBEL SPLIT LINTASAN TANPA SISI PENDAN DAN OPERASI GABUNGAN SALING ASING**

Nama Mahasiswa : **Chairul Umam**

Nomor Pokok Mahasiswa : **1717031051**

Jurusan : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Asmiati, S.Si., M.Si
NIP 19760411 200012 2 001

Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.
NIP 19800206 200312 1 003

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Amanto, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, M.T.
NIP 19740705 200003 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **21 Oktober 2021**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: **Chairul Umam**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1717031051**
Jurusan	: **Matematika**
Judul Skripsi	: **BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF BARBEL SPLIT LINTASAN TANPA SISI PENDAN DAN OPERASI GABUNGAN SALING ASING**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan apabila dikemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung,
Yang menyatakan,

Chairul Umam
NPM. 1717031051

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Chairul Umam, dilahirkan pada tanggal 30 September 1999 di Penumangan Baru. Merupakan anak ketiga dari tiga bersaudara, dari Bapak Arwan S. dan Ibu Ratna Dewi.

Penulis menempuh pendidikan Sekolah Dasar di SDN 1 Penumangan Baru pada tahun 2005-20011. Kemudian melanjutkan ke sekolah menengah pertama SMP Bina Desa pada tahun 2011-2014. Melanjutkan ke sekolah menengah atas SMAN 1 Tumijajar pada tahun 2014-2017.

Penulis melanjutkan pendidikan di Universitas Lampung jalur SBMPTN pada tahun 2017, diterima sebagai mahasiswa S1 Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Pada tahun 2018 penulis aktif dalam organisasi HIMATIKA sebagai anggota biro dana dan usaha. Pada awal tahun 2020 penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) selama 40 hari di desa Bumi Emas, Kecamatan Batanghari, Kabupaten Lampung Timur. Pada pertengahan tahun 2020 penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Balai Penelitian Teknologi Mineral Lembaga Ilmu Pengetahuan Indonesia (BPTM LIPI) Lampung Selatan selama 40 hari.

KATA INSPIRASI

“Maka sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan. Sesungguhnya Bersama kesulitan ada kemudahan. Maka apabila engkau telah selesai (dari sesuatu urusan), tetaplah bekerja keras (untuk urusan lain). Hanya kepada Tuhanmulah engkau berharap”

(Qs. Al-Insyirah 6-8)

PERSEMBAHAN

Puji dan syukur kepada Allah SWT, atas limpahan berkah dan hidayah-nya skripsi ini dapat diselesaikan. Kupersembahkan karya sederhana ini kepada:

Mamak, Bapak, Abang, dan Aden serta keluarga yang selalu memberikan dukungan baik moril maupun materil, serta telah memotivasi penulis agar menjadi orang yang bermanfaat bagi masyarakat.

Teman- teman tercinta. Terima kasih buat semua canda, tawa, suka, duka yang pernah kita lewati bersama.

Universitas Lampung

SANWACANA

Puji syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa atas berkat dan kasih-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul "Bilangan Kromatik Lokasi Graf Barbel Split Lintasan tanpa Sisi Pendan dan Operasi Gabungan Saling Asing" disusun sebagai salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Matematika di Universitas Lampung.

Dalam menyelesaikan skripsi ini penulis menyadari adanya bimbingan, dukungan serta doa dari berbagai pihak. Maka dari itu, pada kesempatan kali ini penulis ingin menyampaikan terimakasih kepada:

1. Ibu Dr. Asmiati, S.Si., M.Si. selaku pembimbing I yang selalu bersedia memberikan bimbingan, masukan, serta saran kepada penulis selama proses penulisan skripsi ini hingga selesai.
2. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc. selaku pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, masukan, serta arahan selama penulisan skripsi ini.
3. Bapak Amanto, S.Si., M.Si. selaku dosen pembahas yang telah memberikan evaluasi dan masukan hingga selama penulisan skripsi ini.
4. Bapak Dr. Muslim Ansori S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing akademik yang telah memberikan arahan serta saran selama perkuliahan.
5. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Bapak Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, M.T. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Seluruh dosen dan staf Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
8. Mamak, Bapak, Abang, Aden yang selalu memotivasi serta mendukung juga senantiasa mendoakan yang terbaik bagi penulis.

9. Orang perdalaman; Horas, Poltak, Dani, Ican, JJ, Nandang yang selalu saling membantu selama perkuliahan.
10. Teman-teman baik penulis; Bagoes, Michael Salim, Iqbal, Yoga, Bang Desfan.
11. Teman-teman mahasiswa jurusan matematika angkatan 2017.
12. Kepada seluruh pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis berharap semoga skripsi bermanfaat. Penulis juga menyadari dalam penyusunan skripsi ini masih memiliki banyak kekurangan, oleh karena itu kritik dan saran yang membangun diharapkan untuk penyempurnaan skripsi ini.

Bandar Lampung,

Penulis,

Chairul Umam

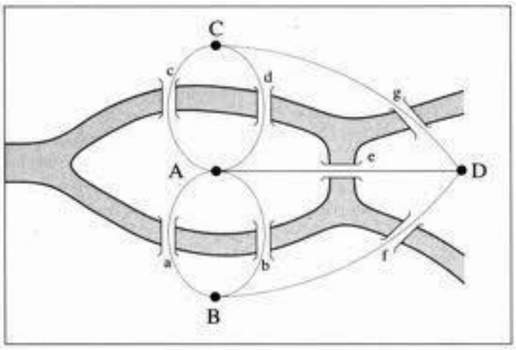
DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang mempelajari himpunan titik yang dihubungkan oleh himpunan sisi, yang semakin lama semakin berkembang pesat. Berawal dari permasalahan jembatan Konigsberg yang memiliki tujuh jembatan yang menghubungkan empat daerah. Penduduk kota tersebut ingin melewati ketujuh jembatan tersebut tepat satu kali dan kembali lagi ke tempat awal keberangkatan. Seorang matematikawan Swiss, Leonard Euler pada tahun 1736 berhasil menemukan jawaban dari permasalahan tersebut, yaitu memodelkan masalah tersebut dengan cara mempresentasikannya ke dalam graf. Daratan yang dihubungkan oleh jembatan sebagai titik dan jembatan sebagai sisi. Representasi tersebut mempermudahkan menganalisis solusi dari permasalahan tersebut.



Gambar 1. Permasalahan Jembatan Konigsberg dan Representasinya.
(sumber: https://docplayer.info/57988814-Pertemuan-11-teori-graf.html)

Bilangan kromatik lokasi pertama kali dikaji oleh Chartrand dkk., pada tahun 2002. Penentuan bilangan kromatik lokasi didasarkan pada banyaknya warna minimum yang digunakan pada pewarnaan lokasi dengan kode warna yang berbeda di setiap titik pada graf tersebut, sehingga bilangan kromatik lokasi akan sangat bergantung pada kode warna yang digunakan pada suatu graf.

Pada penelitian sebelumnya Chartrand dkk. (2002) telah berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi beberapa kelas graf, diantaranya pada graf lengkap diperoleh $\chi_L\ (K_n)\ = n$, pada graf terhubung G diperoleh $3 \leq \chi_L(G) \leq n$ untuk orde $n \geq 3$, serta pada graf siklus diperoleh $\chi_L\ (C_n)\ = 3$ untuk n ganjil dan $\chi_L\ (C_n)\ = 4$ untuk n genap. Pada tahun 2003 Chartrand dkk. membuktikan bahwa bilangan kromatik lokasi graf G dengan orde n yang memuat graf multipartit lengkap berorde $(n-\ 1)$ sebagai subgraf induksinya, berada pada selang $\left[\frac{(n+1)}{2}, n\right]$, dan juga graf-graf yang mempunyai bilangan kromatik lokasi dengan batas atasnya $(n-\ 2)$. Selain itu, Chartrand dkk. (2003) juga menunjukkan bahwa terdapat pohon berorde $n \geq\ 5$ dengan bilangan kromatik lokasi $k \in\ \{3,4, \ldots\ , n-\ 2, n\}$ kecuali $n-1$.

Pada penelitian Asmiati dkk. (2011) berhasil mendapatkan bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi bintang. Selanjutnya, Asmiati dkk. (2012) memperoleh bilangan kromatik lokasi pada graf kembang api. Pada tahun yang sama juga, Asmiati dan Baskoro (2012) berhasil mengkarakterisasi semua graf yang memuat siklus berbilangan kromatik lokasi tiga. Kemudian, Baskoro dan Asmiati (2013) telah mendapatkan karakterisasi semua pohon berbilangan kromatik lokasi tiga. Masalah penentuan bilangan kromatik lokasi pada suatu graf masih terbuka untuk dikaji karena belum adanya teorema yang digunakan untuk menentukan bilangan kromatik lokasi pada sembarang graf. Pada tahun 2020, Damayanti dkk. telah mendapatkan bilangan kromatik lokasi pada graf split lintasan tanpa sisi pendan. Pada tulisan ini akan dikaji bilangan kromatik lokasi graf barbel split lintasan tanpa sisi pendan dan operasi gabungan saling asing.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan bilangan kromatik lokasi pada graf barbel split lintasan tanpa sisi pendan dan operasi gabungan saling asing.

1.3 Manfaat Penelitian

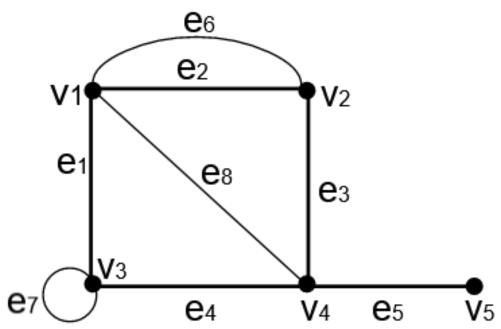
Adapun manfaat dari karya ilmiah ini adalah sebagai berikut:

1. Mengembangkan wawasan tentang teori graf terutama tentang bilangan kromatik lokasi pada graf barbel split lintasan tanpa sisi pendan dan operasi gabungan saling asing.
2. Sebagai referensi untuk penelitian lanjutan tentang menentukan bilangan kromatik lokasi dari graf tak terhubung.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Graf

Menurut Deo (1989), graf merupakan kumpulan titik dan sisi, dinotasikan dengan *G = (V,E)*, dengan V menyatakan himpunan titik $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ yang tak kosong dan E menyatakan himpunan sisi $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ yang merupakan pasangan tak terurut dari titik-titik di V.



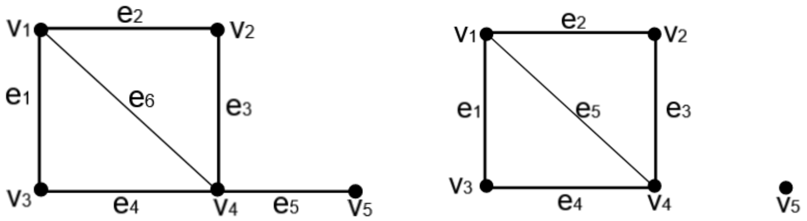
Gambar 2. Contoh graf dengan 5 titik dan 8 sisi.

Pada Gambar 2, graf tersebut merupakan graf G dengan himpunan titik $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$. Dua titik pada graf G dikatakan bertetangga (*adjacent*) bila keduanya terhubung dengan suatu sisi. Suatu sisi dikatakan menempel (*incident*) dengan suatu titik v, jika titik v merupakan salah satu titik ujung dari sisi tersebut. Pada Gambar 2, titik v_2 bertetangga dengan titik v_4 dan v_1. Sisi e_3 menempel pada titik v_2 dan v_4. Derajat suatu titik v pada graf G adalah banyaknya sisi yang menempel pada titik v, dinotasikan dengan $d(v)$. Daun (titik pendan) adalah titik yang berderajat satu, sedangkan sisi yang menempel dengan titik pendan disebut sisi pendan. Pada

Gambar 2.1, $d(v_1) = 4, d(v_2) = 3, d(v_3) = 4, d(v_4) = 4$ dan $d(v_5) = 1$ dan daun terdapat pada titik v_5.

Loop adalah sisi yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. Sisi paralel (sisi ganda) adalah sisi yang memiliki dua titik ujung yang sama. Graf yang tidak mempunyai sisi ganda dan atau loop disebut graf sederhana. Pada Gambar 2, terdapat *loop* pada titik v_3 yaitu e_7, sedangkan e_2 dan e_6 disebut sisi paralel. Graf pada Gambar 2 bukan graf sederhana karena terdapat *loop* (e_7) dan sisi ganda (e_2 dan e_6).

Jalan adalah barisan berhingga bergantian antara titik dan sisi yang dimulai dan diakhiri dengan titik. Lintasan adalah jalan yang memiliki dan melewati titik yang berbeda. Suatu graf G dikatakan graf terhubung jika terdapat paling sedikit satu lintasan yang menghubungkan setiap pasang titik di graf G. Jika ada satu pasang atau lebih titik di G yang tidak dapat ditemukan suatu lintasan di G yang menghubungkan pasangan titik-titik tersebut, maka graf G disebut graf tak terhubung. Graf dikatakan tidak terhubung jika graf tersebut memiliki lebih dari satu komponen dan graf tersebut tidak memiliki hubungan satu sama lain (Deo, 1989).



(a) (b)

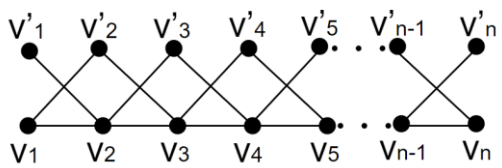
Gambar 3. (a) Graf Terhubung. (b) Graf Tak Terhubung dengan Dua Komponen.

2.2 Graf Lintasan, Graf Split Lintasan tanpa Sisi Pendan dan Graf Barbel

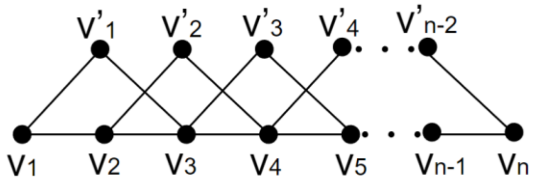
Suatu graf yang setiap titiknya berderajat dua kecuali dua titik ujung yang berderajat satu disebut graf lintasan. Graf lintasan dengan n titik dinotasikan dengan P_n.

Gambar 4. Contoh Graf Lintasan dengan n Titik.

Graf split adalah graf G yang diperoleh dengan menambahkan pada setiap titik v pada G satu simpul baru v', sedemikain sehingga v' bertetanggaan dengan setiap titik yang bertetanggan dengan v di G. Graf yang hasilkan dinyatakan dengan $spl(G)$ (Sugeng dkk., 2014). Graf split lintasan P_n, $n \geq 3$ dinotasikan dengan $spl(P_n)$, sedangkan graf split lintasan tanpa sisi pendan dinotasikan dengan $spl^*(P_n)$. Pada Gambar 5 diberikan graf split dari lintasan P_n yang dinotasikan dengan $spl(P_n)$. Pada Gambar 6 diberikan graf split lintasan P_n tanpa sisi pendan dinotasikan dengan $spl^*(P_n)$.

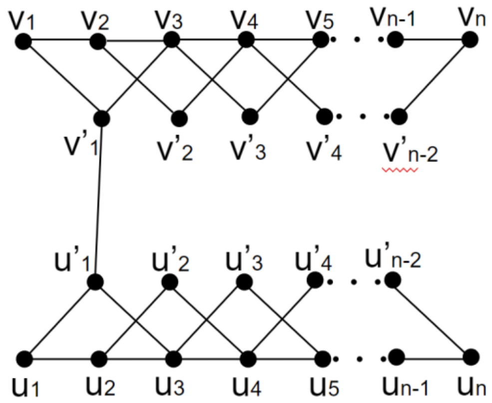


Gambar 5. Contoh Graf Split Lintasan dengan n titik.



Gambar 6. Contoh Graf Split Lintasan tanpa Sisi Pendan dengan n titik.

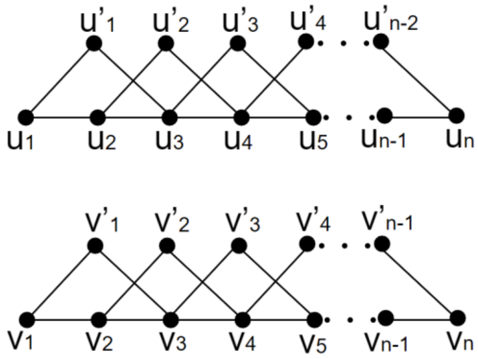
Graf barbel adalah graf sederhana yang dibentuk dengan menghubungkan dua tiruan atau jiplakan dari sebuah graf yang dihubungkan dengan sebuah sisi (Ihwan dkk., 2014). Graf barbel dari graf split lintasan tanpa sisi pendan adalah graf yang dibentuk dari dua graf $spl^{*}(P_n)$ yang dihubungkan oleh sisi $v'_1u'_1$, dan dinotasikan dengan $B_{spl^{*}(P_n)}$.



Gambar 7. Contoh Graf Barbel Split Lintasan tanpa Sisi Pendan dengan n titik.

2.3 Gabungan Saling Asing Graf Split Lintasan tanpa Sisi Pendan

Gabungan saling asing adalah gabungan dari beberapa graf terhubung, dimana untuk setiap i, G_i adalah graf terhubung, dinotasikan dengan $H = \bigcup_{i=1}^{m}(G_i)$. Gabungan saling asing dari graf split lintasan $A = \bigcup_{i=1}^{m}\left(spl^{*}{}_{i}(P_n)\right)$ adalah gabungan dari beberapa graf terhubung $spl^{*}(P_n)$.



Gambar 8. Contoh Gabungan Saling Asing Graf Split Lintasan tanpa Sisi Pendan dengan n titik.

2.4 Bilangan Kromatik Lokasi Graf

Menurut Chartrand dkk. (2002), bilangan kromatik lokasi didefinisikan sebagai berikut. Misalkan c suatu pewarnaan titik di G dengan $c(u) \neq c(v)$ untuk u dan v yang bertetangga di G. Misalkan c_i adalah himpunan titik-titik yang diberi warna i, yang selanjutnya disebut kelas warna, maka $\Pi = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ adalah himpunan yang terdiri dari kelas – kelas warna dari $V(G)$. Kode warna $c_\Pi(v)$ dari v adalah k-pasang terurut $\left(d(v, c_1), d(v, c_2), \dots, d(v, c_k)\right)$ dengan $d(v, c_1) = \min\{d(v, x) |\ x \in c_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik di G mempunyai kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarna lokasi dari G. Banyaknya warna minimum yang digunakan pewarnaan lokasi disebut bilangan kromatik lokasi dari G, yang dinotasikan dengan $\chi_L(G)$. Karena setiap pewarnaan lokasi juga merupakan pewarnaan titik, maka $\chi(G) \leq \chi_L(G)$.

Teorema 2.1 (Chartrand dkk., 2002)

Misalkan c adalah pewarnaan lokasi pada graf G. Jika u dan v adalah dua titik yang berbeda di G sedemikian sehingga $d(u, w) = d(v, w)$ untuk semua $w \in V(G) - \{u, v\}$, maka $c(u) = c(v)$. Secara khusus, jika u dan v titik – titik yang tidak bertetangga di G sedemikian sehingga $N(u) = N(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$.

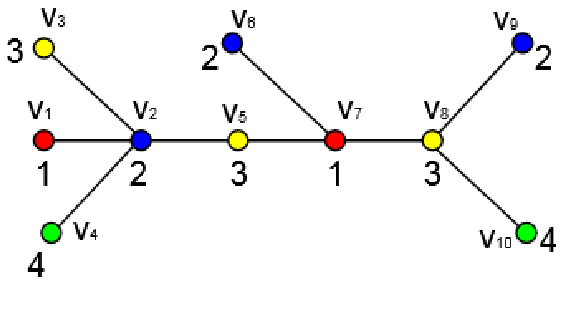
Bukti: Misalkan c adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung dan misalkan $\Pi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ adalah partisi dari titik – titik G ke dalam kelas warna C_i. Untuk suatu titik $u, v \in V(G)$, andaikan $c(u) = c(v)$ sedemikian sehingga titik u dan v berada dalam kelas warna yang sama, misal C_i dari Π. Akibatnya, $(u, c_i) = d(v, c_i)$ = 0. Karena $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$ maka $(u, c_i) = d(v, c_i)$ untuk setiap $j \neq i$, $1 \leq j \leq k$. Akibatnya $c_\Pi(u) = c_\Pi(v)$ sehingga c bukan pewarnaan lokasi. Dengan demikian, $c(u) \neq c(v)$. ■

Akibat 2.1 (Chartrand dkk., 2002)

Jika G adalah graf terhubung dengan suatu titik yang bertetangga dengan k daun, maka $\chi_L(G) \geq k + 1$.

Bukti: Misalkan v adalah suatu titik yang bertetangga dengan k daun, yaitu $x_1, x_2, \dots, x_k$ di G. Berdasarkan Teorema 2.1, setiap pewarnaan lokasi dari G mempunyai warna yang berbeda untuk setiap x_i, $i = 1,2, \dots, k$. Karena v bertetangga dengan semua x_i, maka v harus mempunyai warna yang berbeda dengan semua daun x_i. Akibatnya $\chi_L(G) \geq k + 1$. ■

Berikut ini diberikan graf G dan akan ditentukan bilangan kromatik lokasi dari graf G tersebut.



Gambar 9. Pewarnaan Lokasi Minimum dari Graf G.

Diberikan graf G seperti terlihat di Gambar 9. Kemudian akan ditentukan terlebih dahulu batas bawah bilangan kromatik lokasi dari graf G. Karena terdapat titik v_2 yang mempunyai tiga daun dan berdasarkan Akibat 2.1 maka $\chi_L(G) \geq 4$. (2.1)

Misalkan c adalah pewarnaan titik menggunakan empat warna. Pada graf G diberikan kelas warna sedemikian sehingga diperoleh $\Pi = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ dengan $C_1 = \{v_1, v_7\}$, $C_2 = \{v_2, v_6, v_9\}$, $C_3 = \{v_3, v_5, v_8\}$ dan $C_4 = \{v_4, v_{10}\}$. Oleh karena itu, diperoleh kode warna sebagai berikut:

$c_\Pi(v_1) = (0,1,2,2)$; $c_\Pi(v_6) = (1,0,2,3)$;

$c_\Pi(v_2) = (1,0,1,1)$; $c_\Pi(v_7) = (0,1,1,2)$;

$c_\Pi(v_3) = (2,1,0,2)$; $c_\Pi(v_8) = (1,1,0,1)$;

$c_\Pi(v_4) = (1,1,2,0)$; $c_\Pi(v_9) = (2,0,1,2)$;

$c_\Pi(v_5) = (1,1,0,2)$; $c_\Pi(v_{10}) = (2,2,1,0)$.

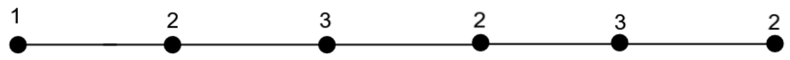
Karena kode warna dari nsemua titik di G berbeda, maka c adalah pewarnaan lokasi. Jadi, $\chi_L(G) \leq 4$. (2.2)

Berdasarkan (2.1) dan (2.2), maka Π adalah pewarnaan lokasi dari G sehingga $\chi_L(G) = 4$.

Teorema 2.2 (Chartrand dkk., 2002)

Bilangan kromatik lokasi graf lintasan $P_n (n \geq 3)$ adalah 3.

Bukti: Perhatikan bahwa $\chi_L(P_n) = 1$ dan $\chi_L(P_n) = 2$. Jelas bahwa $\chi_L(P_n) \geq 3$ untuk $n \geq 3$. Berdasarkan Akibat 2.1 $\chi_L(G) \geq k + 1$, dengan k derajat titik maksimum. Karena pada P_n, $k = 2$ maka $\chi_L(G) \geq (2 + 1)$. Akibatnya, $\chi_L(G) \geq 3$, untuk $n \geq 3$. ■



Gambar 10. Contoh Pewarnaan Lokasi Minimum pada Graf Lintasan P_6.

2.5 Bilangan Kromatik Lokasi Graf Tak Terhubung

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf tak terhubung dan c adalah pewarnaan lokasi dari G menggunakan warna $1,2,3, \ldots, k$ untuk beberapa bilangan bulat positif k. Misalkan $\Pi = \{C_1 , C_2 , \ldots, C_k\}$ adalah kumpulan yang terdiri dari kelas-kelas warna dari $V(G)$. Kode warna c_Π dari v adalah k-pasang terurut $\big(d(v, c_1), d(v, c_2), \ldots, d(v, c_k)\big)$ dengan $d(v, c_1) = \min\{d(v, x)|\ x\ \in\ c_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik di G mempunyai kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarna lokasi dari G. Banyaknya warna minimum yang digunakan pewarnaan lokasi disebut bilangan kromatik lokasi dari G, yang dinotasikan dengan $\chi'_L(G)$ (Asmiati dkk., 2019).

Teorema 2.3 (Welyyanti, 2014)

Untuk setiap i, misal G_i adalah suatu graf terhubung dan misalkan $H = \bigcup_{i=1}^{m}(G_i)$. Jika $\chi'_L(G) < \infty$, maka $q \leq \chi'_L(H) \leq r$, dimana $q = \max\{\chi_L(G_i); i \in [1, m]\}$ dan $r = \min\{|V(G_i)|, i \in [1, m]\}$.

Bukti: Karena $q = \max\{\chi_L(G_i); i \in [1, m]\}$, maka terdapat suatu bilangan bulat $k \in [1, m]$ sedemikian sehingga $\chi_L(G_i) = q$. Hal ini bearti bahwa setiap pewarnaan lokasi graf H harus memiliki paling sedikit q warna disetiap komponen dari graf H sehingga $\chi'_L(H) \geq q$. Selanjutnya, akan ditunjukkan batas atas dari $\chi'_L(H)$. Karena $r = \min\{|V(G_i)|, i \in [1, m]\}$, maka terdapat satu bilangan bulat $k \in [1, m]$ sedemikian sehingga $\chi_L(G_i) = r$. Sehingga pewarnaa lokasi dari H harus memiliki paling banyak r warna disetiap komponen dari H. Sehingga, $\chi'_L(H) \leq r$. ∎

Teorema 2.4 (Welyyanti, 2014)

Misalkan $H = \bigcup_{i=1}^{t}(P_{n_i})$, $r = \min\{n_i|, i \in [1, t]\}$, jika $\chi'_L(H) < \infty$, maka $3 \leq \chi'_L(H) \leq r$. Secara khusus, $\chi'_L(H) = 3$ disebabkan oleh $t = 1,2,$ atau 3.

Bukti: Bagian pertama sudah dibuktikan melalui Teorema 2.3. Selanjutnya, akan membuktikan bagian kedua. Misalkan $\chi'_L(H) = 3$, maka $t \leq 3$ karena akan ada tiga titik dominan, suatu kontradiksi. Misal $V(H) = V(P_{n_1}) \cup V(P_{n_2}) \cup V(P_{n_3})$, dimana $V(P_{n_1}) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $V(P_{n_2}) = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, $V(P_{n_3}) = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$. Sekarang, misalkan pewarnaan $c: V(H) \rightarrow \{1,2,3\}$ sedemikian sehingga

$$c(x_1) = c(y_2) = c(z_1) = 1$$

$$c(x_2) = c(y_1) = c(z_3) = 2$$

$$c(x_3) = c(y_3) = c(z_2) = 3$$

Untuk $k \in [4, n_1]$, $l \in [4, n_2]$,dan $m \in [4, n_3]$, didefinisikan

$$c(x_k) = \begin{cases} 2, & \text{jika } k \text{ genap,} \\ 3, & \text{jika } k \text{ ganjil;} \end{cases}$$

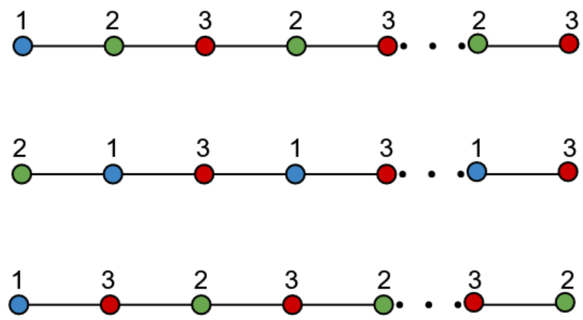
$$c(y_l) = \begin{cases} 1, & \text{jika } l \text{ genap,} \\ 3, & \text{jika } l\ ganjil; \end{cases}$$

$$c(z_m) = \begin{cases} 3, & \text{jika } m \text{ genap,} \\ 2, & \text{jika } m\ ganjil. \end{cases}$$

Misal $\Pi = \{C_1, C_2, C_3\}$ menjadi partisi yang diinduksi oleh c. Selanjutnya akan ditunjukkan kode warna dari semua titik yang berbeda. Pada gambar 11 menunjukkan $c_\Pi(x_1) = (0,1,2)$, $c_\Pi(x_2) = (1,0,1)$, $c_\Pi(x_3) = (2,1,0)$, $c_\Pi(y_1) = (1,0,2)$, $c_\Pi(y_2) = (0,1,1)$, $c_\Pi(y_3) = (1,2,0)$, $c_\Pi(z_1) = (0,2,1)$, $c_\Pi(z_2) = (1,1,0)$, $c_\Pi(z_3) = (2,0,1)$. Untuk $k \in [4, n_1]$, $c_\Pi(x_k) = (k-1,0,1)$ jika k genap dan $c_\Pi(x_k) = (k-1,1,0)$ jika k ganjil. Untuk $l \in [4, n_2]$, $c_\pi(y_l) = (0, l-1,1)$ jika l genap dan $c_\Pi(y_l) = (1, l-0,0)$ jika l ganjil. Untuk $m \in [4, n_3]$, $c_\Pi(z_m) = (m-1,1,0)$ jika m genap dan $c_\Pi(z_m) = (m-1,0,1)$ jika m ganjil.

Sehingga, semua titik memiliki kode warna yang berbeda. Hal tersebut menyebabkan $\chi'_L(H) \leq 3$. Jika, $t \geq 2$, maka batas pewarnaan c disesuaikan dengan komponen. Jadi, $\chi'_L(H) = 3$ untuk $t = 1,2,$ atau 3. ■

Berikut ini diberikan contoh pewarnaan lokasi minimum pada gabungan saling asing graf lintasan.



Gambar 11. Pewarnaan Lokasi minimum pada $H = (P_{n_1}) \cup (P_{n_2}) \cup (P_{n_3})$.

2.6 Bilangan Kromatik Lokasi Graf Split lintasan tanpa Titik Pendan

Berikut ini diberikan teorema tentang bilangan kromatik lokasi dari graf split lintasan tanpa sisi pendan yang telah dibuktikan oleh Damayanti, (2020).

Teorema 2.5 (Damayanti dkk., 2020)

Bilangan kromatik lokasi dari graf split lintasan tanpa sisi pendan $spl^*(P_n)$ adalah 4.

Bukti: Misal $spl^*(P_n), n \geq 3$ dengan himpunan titik $V(spl^*(P_n)) = \{u_i, v_i, x_i, y_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(spl^*(P_n)) = \{v_iu_i; i \in [1, n-1]\} \cup \{x_iy_i; i \in [1, n-1]\} \cup \{x_iy_i; i \in [1, n-1]\} \cup \{u_iv_{i+1}; i \in [1, n-1]\} \cup \{y_ix_{i+!}; i \in [1, n-1]\} \cup \{v_ix_i; i \in [1, n-1]\} \cup \{x_iv_{i+!}; i \in [1, n-1]\}$.

Pertama, menentukan batas bawah dari $spl^*(P_n)$. Untuk sebuah kontradiksi, misalkan c adalah pewarnaan lokasi pada P_n menggunakan 3 warna. Misalkan $c(v_i) = \{1,2,3\} = c(u_i)$. Karena u_i bertetanggaan dengan v_i dan v_{i+1}, jika $c(u_i) = \{c(v_j)\}$, maka $c_\Pi(u_i) = c_\Pi(v_j), i \neq j$, kontradiksi. Sehingga, membutuhkan paling sedikit 4 warna untuk mewarnai graf split lintasan tanpa sisi pendan. Jadi, $\chi_L spl^*(P_n) \geq 4$. Selanjutnya, menentukan batas atas, misal c menjadi pewarnaan lokasi menggunakan 4 warna sebagai berikut:

$$c(u_i) = 1, \text{untuk } i \geq 1$$

$$c(v_i) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } i \geq 2 \\ 4, & \text{untuk } i = 1 \end{cases}$$

$$c(x_i) = 2, \text{untuk } i \geq 1$$

$$c(y_i) = 1, \text{untuk } i \geq 1$$

Kode warna dari $spl^*(P_n)$ adalah:

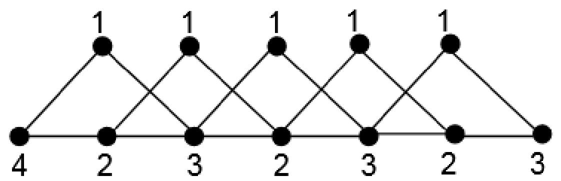
$$c_\Pi(u_i) = \begin{cases} 2i-1, & \text{untuk komponen ke} - 4, i \geq 2 \\ 0, & \text{untuk komponen ke} - 1, i \geq 1 \\ 2, & \text{untuk komponen ke} - 2, i \geq 1 \\ 1, & \text{lainnya} \end{cases}$$

$$c_\Pi(v_i) = \begin{cases} 2i-2, & \text{untuk komponen ke} - 4, i \geq 1 \\ 0, & \text{untuk komponen ke} - 3, i \geq 2 \\ 2, & \text{untuk komponen ke} - 3, i = 1 \\ 1, & \text{lainnya} \end{cases}$$

$$c_\Pi(x_i) = \begin{cases} 2i-1, & \text{untuk komponen ke} - 4, i \geq 1 \\ 0, & \text{untuk komponen ke} - 2, i \geq 1 \\ 1 & \text{lainnya} \end{cases}$$

$$c_\Pi(y_i) = \begin{cases} 2i, & \text{untuk komponen ke} - 4, i \geq 1 \\ 0, & \text{untuk komponen ke} - 1, i \geq 2 \\ 2, & \text{untuk komponen ke} - 3, i \geq 1 \\ 1, & \text{lainnya} \end{cases}$$

Karena semua titik di $spl^*(P_n)$ untuk $n \geq 3$ memiliki kode warna yang berbeda, maka c adalah pewarnaan lokasi menggunakan 4 warna. Sehingga $\chi_L\big(spl^*(P_n)\big) \leq 4$. Jadi $spl^*(P_n) = 4$. ■



Gambar 12. Pewarnaan Lokasi Minimum dari $spl^*(P_5)$.

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Waktu dan tempat pelaksanaan penelitian ini adalah di Gedung Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung pada semester genap tahun ajaran 2020/2021.

3.2 Metode Penelitian

Langkah-langkah yang dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Metode menentukan bilangan kromatik lokasi graf barbell split lintasan tanpa sisi pendan, untuk $n \geq 3$ sebagai berikut:
   a. Menentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi $B_{spl^*(P_n)}$ dengan $n \geq 3$ dengan menggunakan batas bawah trivial. Jika batas bawah tersebut tidak memenuhi syarat pewarnaan lokasi, maka dilakukan penambahan pewarnaan secara bertahap sedemikian sehingga syarat pewarnaan lokasi terpenuhi.
   b. Menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi $B_{spl^*(P_n)}$ dengan $n \geq 3$. Mengkontruksi pewarnaan titik-titik dengan melihat struktur grafnya. Pewarnaan titik dimulai dengan label terkecil sedemikian sehingga diperoleh minimum pewarnaan titik yang memenuhi syarat pewarnaan lokasi.

c. Jika batas atas bilangan kromatik lokasi $B_{spl^*(P_n)} \leq y$ dan batas bawah bilangan kromatik lokasi $B_{spl^*(P_n)} \geq y$, maka diperoleh bilangan kromatik lokasinya $\chi_L\left(B_{spl^*(P_n)}\right) = y$.

d. Memformulasikan hasil-hasil yang diperoleh dalam suatu pernyataan matematika dan membuktikan hasil-hasil yang diperoleh.

2. Menentukan bilangan kromatik lokasi gabungan saling asing dari graf split lintasan tanpa sisi pendan sebagai berikut:

   a. Menentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi $\bigcup_{i=1}^{m}\left(spl^*(P_{n_i})\right)$ dengan $n \geq 3$ dengan menggunakan batas bawah trivial. Jika batas bawah tersebut tidak memenuhi syarat pewarnaan lokasi, maka dilakukan penambahan pewarnaan secara bertahap sedemikian sehingga syarat pewarnaan lokasi terpenuhi.

   b. Menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi $\bigcup_{i=1}^{m}\left(spl^*(P_{n_i})\right)$ dengan $n \geq 3$. Mengkontruksi pewarnaan titik-titik dengan melihat struktur grafnya. Pewarnaan titik dimulai dengan label terkecil sedemikian sehingga diperoleh minimum pewarnaan titik yang memenuhi syarat pewarnaan lokasi.

   c. Jika batas atas bilangan kromatik lokasi $\bigcup_{i=1}^{m}\left(spl^*(P_{n_i})\right) \leq y$ dan batas bawah bilangan kromatik lokasi $\bigcup_{i=1}^{m}\left(spl^*(P_{n_i})\right) \geq y$, maka diperoleh bilangan kromatik lokasinya yaitu $\chi'_L\left(\bigcup_{i=1}^{m}\left(spl^*(P_{n_i})\right)\right) = y$.

   d. Memformulasikan hasil-hasil yang diperoleh dalam suatu pernyataan matematika dan membuktikan hasil-hasil yang diperoleh.

V. KESIMPULAN

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan dapat diperoleh kesimpulan bahwa bilangan kromatik lokasi dari $B_{spl^*(P_n)}$ untuk $n \geq 3$ adalah 4, demikian juga untuk $\bigcup_{i=1}^{3}\left(spl^*(P_{n_i})\right)$.

DAFTAR PUSTAKA

Asmiati, & Baskoro, E. T. 2012. Characterizing All Graphs Containing Cycles with Locating-Chromatic Number 3. *AIP Conference Proceedings*. **1450**(1), 351-357.

Asmiati, A., Assiyatun, H., & Baskoro, E. T. 2011. Locating-Chromatic Number of Amalgamation of Stars. *ITB J. Sci.* **43**(1), 1-8.

Asmiati, A., Baskoro, E. T., Assiyatun, H., & Suprijanto, D. 2012. The Locating-Chromatic Number of Firecracker Graphs. *Far East Journal of Mathematics and Mathematics Sciences*. **63**(1), 11-23.

Asmiati, A., Yulianti, L., Aristoteles, A., & Junaidi, A. 2019. The Locating Chromatic Number of a Disjoint Union of Some Double Stars. *Journal of Physics.* **1338**: 1-5.

Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M.A., Slater, P.J., dan Zhang, P. 2002. The Locating-Chromatic Number of a Graph. *Bull. Inst. Combin.* **36**:89- 101.

Chartrand, G., Erwin, D., Slater, P.J. Zhang, P. 2003. Graphs of Order n with Locating-Chromatic Number n-1. *Discrete Mathematics*. **269**: 65-79.

Damayanti, M., Ansori, M., & Faradilla, A. 2021. The Locating Chromatic Number of Some Modified Path with Cycle having Locating Number Four. *Journal of Physics*. 1751.

Deo, N. 1989. *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science.* Prentice Hall of India Private Limited, New Delhi.

Sugeng, K. A., Slamet, S., & Silaban, D. R. 2014. *Teori Graf dan Aplikasinya*. Department of Mathematics FMIPA University of Indonesia, Depok.

Welyyanti, D., Baskoro, E. T., Simanjuntak, R., & Uttunggadewa, S. 2014. The Locating-Chromatic Number of Disconnected Graphs. *Far East J. Math. Sci*, **94**(2), 169-182.