FAKTOR PERSEKUTUAN TERBESAR PADA DERET FIBONACCI YANG DIMODIFIKASI

(Skripsi)

Oleh

SYAIFUL DAIYAN MUBAROK

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS LAMPUNG

BANDAR LAMPUNG

2021

ABSTRAK

FAKTOR PERSEKUTUAN TERBESAR PADA DERET FIBONACCI YANG DIMODIFIKASI

OLEH :

SYAIFUL DAIYAN MUBAROK

Deret Fibonacci memiliki bentuk umum yaitu $G_n = G_{n-1} + G_{n-2}$, untuk $n \geq 3$. Deret Fibonacci ini ditransformasi menjadi $G_n = \alpha F_{n-2} + \beta F_{n-1}$. Ketika $\alpha = \beta = 1$, deret G_n merupakan Deret Fibonacci dan ketika $\alpha = 1$ dan $\beta = 3$ merupakan Deret Lucas. Menggunakan metode FPB pada deret umum, Fibonacci akan memiliki FPB bernilai barisan konstanta $\{1,1,1,\dots\}$ atau $FPB(G_n, G_{n+1}) = 1$. Deret Fibonacci yang dimodifikasi dinotasikan dengan $(F_n + a)$. Untuk menentukan FPB pada Deret Fibonacci yang dimodifikasi, dinotasikan $f_n(a) = FPB(F_n + a, F_{n+1} + a)$. FPB pada Deret Fibonacci dimodifikasi oleh $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ yaitu $(f_n(1), f_n(2), f_n(3), f_n(-1), f_n(-2), f_n(-3))$, dan FPB pada Deret Lucas dimodifikasi oleh 1 yang dinotasikan dengan $(l_n(1))$ memiliki hasil barisan bilangan yang tidak selalu relatif prima.

Kata kunci: *Barisan Fibonacci, Barisan Lucas, FPB, Deret Fibonacci yang dimodifikasi.*

ABSTRACT

THE GREATEST COMMON DIVISOR IN THE MODIFIED FIBONACCI SEQUENCE

By

SYAIFUL DAIYAN MUBAROK

The Fibonacci series has a general form, namely $G_n = G_{n-1} + G_{n-2}$, for $n \geq 3$. This Fibonacci sequence is transformed into $G_n = \alpha F_{n-2} + \beta F_{n-1}$, when $\alpha = \beta = 1$ the G_n series is the Fibonacci series and when $\alpha = 1$ and $\beta = 3$ is the Lucas series. Using the GCF method on a general series, Fibonacci will have GCF value constant sequence $\{1,1,1,\ldots\}$ or $\gcd(G_n, G_{n+1}) = 1$. The modified Fibonacci sequence is denoted by $(F_n + a)$. To determine the GCF of the modified Fibonacci Sequence denoted $f_n(a) = \mathrm{GCF}(F_n + a, F_{n+1} + a)$. The GCF in the Fibonacci sequence is modified by $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ that is $(f_n(1), f_n(2), f_n(3), f_n(-1), f_n(-2), f_n(-3))$, and the GCF on the Lucas series modified by 1 which is denoted by $(l_n(1))$ has the result that the sequence of numbers is not always relatively prime.

Keyword: *Fibonacci sequences, Lucas sequences, GCF, the modified Fibonacci sequences.*

FAKTOR PERSEKUTUAN TERBESAR PADA DERET FIBONACCI YANG DIMODIFIKASI

Oleh

SYAIFUL DAIYAN MUBAROK

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS LAMPUNG

BANDAR LAMPUNG

2021

Judul Skripsi	:	**FAKTOR PERSEKUTUAN TERBESAR PADA DERET FIBONACCI YANG DIMODIFIKASI**
Nama Mahasiswa	:	***Syaiful Daiyan Mubarok***
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**1717031070**
Jurusan	:	**Matematika**
Fakultas	:	**Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Amanto, S.Si., M.Si.	**Dr. Fitriani S.Si., M.Sc.**
NIP 19730314 200012 1 002	NIP 19840627 200604 2 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	: **Amanto, S.Si., M.Si.**	....
Sekretaris	: **Dr. Fitriani S.Si., M.Sc.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	: **Agus Sutrisno, S.Si., M.Si**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI UNIVERSITAS LAMPUNG FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, M.T.
NIP 19740705 200003 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **29 November 2021**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	:	**SYAIFUL DAIYAN MUBAROK**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**1717031070**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**FAKTOR PERSEKUTUAN TERBESAR PADA DERET FIBONACCI YANG DIMODIFIKASI**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan semua tulisan yang terdapat dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung.

Bandar Lampung, 29 November 2021

Penulis,

Syaiful Daiyan Mubarok

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Syaiful Daiyan Mubarok, anak ketiga dari lima bersaudara yang dilahirkan di Bukittinggi pada tanggal 05 Desember 1998 oleh pasangan suami istri Bapak Enda Gunawa dan Ibu Yossy Aziza.

Penulis menempuh pendidikan sekolah di SD Negeri 1 Way Huwi pada tahun 2004-2007 dan pindah sekolah di SD Negeri 2 Margorejo pada tahun 2007-2010. Setelah itu, penulis melanjutkan sekolah di MTS N 2 Bandar Lampung pada tahun 2010-2011 dan pindah sekolah di MTS NU Putra 2 Buntet Pesantren pada tahun 2012-2013. Untuk menempuh jenjang pendidikan menengah atas, penulis melanjutkan sekolah di MA NU Putra Bunten Pesantren Cirebon pada tahun 2013-2014 dan pindah sekolah di MA Al-Hikmah Kedaton Bandar Lampung pada tahun 2014-2016.

Pada tahun 2017 penulis terdaftar sebagai mahasiswi S1 Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui Jalur SBMPTN.

Pada bulan Februari tahun 2020, penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di PT. Sucofindo (PERSERO) Bandar Lampung dan pada bulan Juli di tahun yang sama, penulis melakukan Kuliah Kerja Nyata (KKN) Mandiri Putra Daerah di Desa Marga Agung, Jati Agung, Lampung Selatan.

KATA INSPIRASI

Setiap segala sesuatu itu ada kelebihannya. Maka janganlah suka meremehkan dan merendahkan.

(Abu Bakar Ash-Shidiq)

Suatu pengetahuan kalaupun tidak bermanfaat untukmu, itupun tidak akan membahayakanmu.

(Umar bin Khattab)

Pengetahuan lebih baik daripada kekayaan. Pengetahuan akan melindungimu, sedangkan kekayaan harus kau lindungi.

(Ustman bin Affan)

Jangan menganggap diamnya seseorang sebagai sikap sombongnya, bisa jadi dia sedang bertengkar dengan dirinya sendiri

(Ali bin Abi Tholib)

Barang siapa yang tidak mampu menahan lelahnya belajar, maka ia harus siap menahan perihnya kebodohan.

(Imam Asy-Syafi'i)

PERSEMBAHAN

Dengan kerendahan hati dan rasa syukur kepada Allah Tuhan Yang Maha Esa kupersembahkan skripsi ini kepada orang tua tercinta Mama dan Papa. Terima kasih atas doa, dukungan dan kasih sayang yang terus diberikan serta kerja keras dalam merawat, membesarkan penulis hingga sekarang.

Untuk kakak-kakakku dan adik-adikku tercinta yang selalu memberi semangat dan keluarga besar yang selalu mendukung penulis sehingga dapat menyelesaikan perkuliahan dengan lancar.

Juga kepada semua Dosen Jurusan Matematika yang telah meluangkan waktu untuk membimbing dan menurunkan ilmunya dengan penuh kesabaran kepada penulis.

Serta semua sahabat terbaik yang terus mendukung,

Almamater Unila dan Negeriku Indonesia.

SANWACANA

Puji syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa atas kasih karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "**Faktor Persekutuan Terbesar Pada Deret Fibonacci Yang Dimodifikasi**". Dalam proses penulisan skripsi ini tentunya penulis memperoleh bimbingan dan dukungan dari berbagai pihak. Dengan ketulusan hati penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada :

1. Bapak Amanto, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing I yang telah meluangkan waktu untuk membimbing, memberikan arahan dan saran kepada penulis selama penyusunan skripsi ini.
2. Ibu Dr. Fitriani S.Si., M.Sc., selaku Dosen Pembimbing II sekaligus pembimbing akademik yang telah memberikan arahan dan masukannya selama proses perkuliahan dan penyusunan skripsi ini.
3. Bapak Agus Sutrisno, S.Si., M.Si., selaku Dosen Penguji atas kesedian waktu untuk menguji dan memberi saran yang baik dalam skripsi ini.
4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si., selaku Kepala Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
5. Bapak Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, M.T., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Para Dosen dan Staf Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Mamah dan Papah, serta kakak-kakakku dan adik-adikku yang selalu memberi dukungan dan mendoakan penulis dalam menyelesaikan perkuliahan.
8. Keluarga Besar Papah, Keluarga Besar Mamah dan Keluarga Besarku yang selalu memberikan dukungan dan semangat kepada penulis selama proses perkuliahan.

9. Teman-teman seperjuangan Matematika 2017, Almamater Universitas Lampung, serta semua pihak yang tidak bisa disebutkan satu persatu yang mendukung dari awal hingga akhir perkuliahan.

Penulis menyadari masih memiliki kekurangan dalam penyusunan skripsi ini, oleh karena itu diharapkan kritik dan saran untuk penyempurnaan skripsi.

Bandar Lampung, 29 November 2021

Penulis

Syaiful Daiyan Mubarok

DAFTAR ISI

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Dalam dunia matematika, terdapat banyak cabang ilmu matematika salah satunya teori bilangan. Teori bilangan adalah cabang dari matematika murni yang mempelajari sifat-sifat bilangan bulat dan mengandung berbagai masalah terbuka yang dapat dimengerti sekalipun bukan oleh ahli matematika. Dalam teori bilangan dasar juga dipelari teknik matematika lainnya, salah satunya materi dasar matematika yaitu FPB atau Faktor Persekutuan Terbesar merupakan metode dalam menentukan faktor terbesar yang sama dari beberapa bilangan.

Ada beberapa jenis bilangan, misalnya bilangan real, bilangan asli, bilangan cacah, bilangan rasional, bilangan kompleks dan lain sebagainya. Bilangan-bilangan tersebut dapat membentuk pola barisan bilangan dan deret bilangan, baik deret aritmetika maupun geometri. Salah satunya adalah Bilangan Fibonacci yaitu sebuah barisan angka dimana suku berikutnya pada barisan tersebut merupakan hasil penjumlahan dari dua suku sebelumnya. Leonardo da Pisa (1175-1250) atau yang dikenal sebagai Fibonacci adalah seorang matematikawan Italia yang dikenal sebagai penemu Bilangan Fibonacci dan perannya dalam mengenalkan perhitungan bilangan Arab ke dunia Eropa. Pada tahun 1225, dia mengeluarkan buku Liber Quadraotorum (buku tentang kuadrat). Dalam buku tersebut tercantum permasalahan tentang berapa banyaknya keturunan dari sepasang induk kelinci dalam bulan tertentu. Permasalahan ini menjadi dasar terbentuknya bilangan Fibonacci dan Deret Fibonacci yang terkenal sampai sekarang.

Banyak penelitian yang didedikasikan untuk Bilangan Fibonacci, salah satunya adalah penelitian oleh U. Dudley dan B. Tucker pada tahun 1971 dalam jurnalnya *Greatest common divisors in altered Fibonacci sequences, Fibonacci Quart* dan

Kwang-Wu Chen pada tahun 2011 dalam jurnalnya *Greatest Common Divisors in Shifted Fibonacci Sequences* yang membahas mengenai FPB terhadap deret Fibonacci yang digeser oleh ± 1 dan ± 2. Berdasarkan jurnal sebelumnya, penulis bertujuan membahas teorema-teorema yang berlaku mengenai faktor persekutuan terbesar pada Deret Fibonacci yang diperumum untuk menghitung FPB pada Deret Fibonacci yang dimodifikasi.$\pm 1, \pm 2,$ dan ± 3 dan FPB pada Deret Lucas yang dimodifikasi oleh ± 1.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah :

1. mengkaji tentang Deret Fibonacci yang diperumum dan dimodifikasi;
2. membahas teorema FPB pada Deret Fibonacci dan menerapkannya pada FPB pada Deret Fibonacci dimodifikasi oleh ± 1, ± 2, ± 3 bernotasi $(f_n(1), f_n(2), f_n(3), f_n(-1), f_n(-2), f_n(-3))$, dan FPB pada deret Lucas dimodifikasi oleh 1 bernotasi $(l_n(1))$;
3. membuktikan hasil FPB pada Deret Fibonacci dan Deret Lucas yang dimodifikasi menggunakan teorema yang berlaku.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah menambah pengetahuan dan wawasan tentang metode dalam menentukan FPB dari Deret Fibonacci yang diperumum dan dimodifikasi.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Barisan

Barisan (*sequence*) pada himpunan S adalah suatu fungsi dari $\mathbb{N}$ ke S. Pada subbab ini akan dibahas mengenai barisan di $\mathbb{R}$ dan konvergensi dari suatu barisan.

Definisi 2.1.1. Barisan bilangan real adalah suatu fungsi yang didefinisikan dari $\mathbb{N}$ ke $\mathbb{R}$ (Riyanto, 2008).

Berdasarkan Definisi 2.1.1, barisan dalam $\mathbb{R}$ mengawankan setiap bilangan asli $n = 1,2,3, \ldots$ ke suatu bilangan real. Jika $X : N \to \mathbb{R}$ merupakan barisan, maka nilai dari X pada n dengan notasi x_n. Barisan sering dinotasikan dengan X atau (x_n) atau $(x_n : n \in \mathbb{N})$ atau $\{x_n\}$ atau $\{x_n\}_{n\geq 1}$. Apabila diketahui suatu barisan Y, artinya $Y = (y_k)$.

Contoh 2.1.2.

(a) Barisan (x_n) dengan $x_n = (-1)^n$ adalah barisan $-1,1,-1,1, \ldots, (-1)^n, \ldots$.

(b) Barisan (x_n) dengan $x_n = \frac{1}{2^n}, \left(\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right) = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$.

(c) Barisan konstanta (k_n) dengan $k_n = 3$ adalah $3,3,3,3, \ldots$.

(d) Barisan $\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$.

Definisi 2.1.3. Diberikan barisan bilangan real (x_n) dan (y_n), dan $a \in \mathbb{R}$. Didefinisikan

(i) $(x_n) \pm (y_n) = (x_n \pm y_n)$.

(ii) $a(x_n) = (a\, x_n)$.

(iii) $(x_n) \cdot (y_n) = (x_n \cdot y_n)$.

(iv) $\frac{(x_n)}{(y_n)} = \left(\frac{x_n}{y_n}\right)$, asalkan $y_n \neq 0$.

(Riyanto, 2008)

2.2 Deret

Berikut ini diberikan pengantar singkat mengenai suatu deret tak berhingga dari bilangan real.

Definisi 2.2.1. Jika $X = (x_n)$ barisan di $\mathbb{R}$, maka deret tak berhingga (cukup disebut deret) yang dibentuk oleh X adalah barisan $S = (s_k)$ yang didefinisikan dengan

$$s_1 = x_1$$

$$s_1 = s_1 + x_2 \qquad (= x_1 + x_2)$$

$$\cdots$$

$$s_k = s_{k-1} + x_k \qquad (= x_1 + x_2 + \cdots + x_k)$$

$$\cdots$$

x_n disebut dengan *terms* dari deret, dan s_k disebut jumlahan parsial (*partial sum*).

Deret tak berhingga S yang dibangun oleh barisan $X \coloneqq (x_n)$ disimbolkan dengan

$\sum(x_n)$ atau $\sum x_n$ atau $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (Riyanto, 2008).

Contoh 2.2.2. Diberikan barisan $X = (r^n)_{n=0}^{\infty}$ dengan $r \in \mathbb{R}$ yang membangun deret:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n + \cdots.$$

Akan ditunjukkan bahwa jika $|r| < 1$, maka deret ini konvergen ke $\frac{1}{(1-r)}$.

Misalkan $s_n \coloneqq 1 + r + r^2 + \cdots + r^n + \cdots$ untuk $n \geq 0$, dan jika s_n dikalikan dengan r dan mengurangkan hasilnya dari s_n, maka diperoleh

$$s_n(1-r) = 1 - r^{n+1}.$$

Oleh karena itu, diperoleh

$$s_n - \frac{1}{1-r} = -\frac{r^{n+1}}{1-r},$$

sehingga

$$\left| s_n - \frac{1}{1-r} \right| \leq \frac{|r|^{n+1}}{|1-r|}.$$

Karena $|r|^{n+1} \to 0$ saat $|r| < 1$, maka deret geometri $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ konvergen ke $\frac{1}{(1-r)}$ saat $|r| < 1$.

2.3 Barisan Fibonacci

Barisan Fibonacci adalah sebuah barisan angka dimana suku barisannya merupakan penjumlahan dua suku sebelumnya yang memiliki bentuk barisan $\{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots\}$, tetapi sebuah barisan angka dimana suku barisannya merupakan penjumlahan dua suku sebelumnya belum tentu Barisan Fibonacci.

Definisi 2.3.1. Barisan bilangan Fibonacci F_n didefinisikan sebagai barisan rekursif dimana suku ke-n barisan merupakan hasil penjumlahan dua suku sebelumnya, dengan pengecualian dua bilangan pertama yaitu $F_0 = 0$ dan $F_1 = 1$, sedangkan bentuk umum Barisan Fibonacci :

$$F_0 = 0 \text{ dan } F_1 = 1$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \; n \geq 2.$$

(Luma, 2010)

Misalkan Deret Fibonacci yang diperumum didefinisikan oleh;

$$G_n = G_{n-1} + G_{n-2}, \qquad \text{untuk } n \geq 3.$$

Jika dipilih $G_1 = \alpha, G_2 = \beta$, maka diketahui bahwa,

$$G_n = \alpha F_{n-2} + \beta F_{n-1}.$$

Jika $\alpha = \beta = 1$, maka Deret Fibonacci yang diperumum G_n adalah Deret Fibonacci F_n, dan jika $\alpha = 1$ dan $\beta = 3$ merupakan Deret Lucas L_n. Diketahui bahwa anggota Deret Fibonacci yang berurutan merupakan relatif prima (Chen, 2011).

Contoh 2.3.2:

Diketahui $F_0 = 0$ dan $F_1 = 1$, diperoleh;

$F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$

$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$

$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$

$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$

Oleh karena itu, barisan $(F_n) = 0,1,1,2,3,5, \dots$.

2.4 Barisan Lucas

Susunan bilangan $\{2,1,3,4,7,13, \dots\}$ dinamakan Barisan Lucas karena merupakan barisan angka dimana suku barisannya merupakan penjumlahan dua suku sebelumnya sama seperti Bilangan Fibonacci, tetapi pada Barisan Lucas dua suku pertamanya bukan 0 dan 1.

Definisi 2.4.1. Barisan Lucas L_n didefinisikan sebagai barisan rekursif dimana suku ke-n barisan merupakan hasil penjumlahan dua suku sebelumnya, dengan pengecualian dua bilangan pertama yaitu $L_0 = 2$ dan $L_1 = 1$, sedangkan bentuk umum Barisan Lucas:

$$L_0 = 2 \text{ dan } L_1 = 1$$

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \ n \geq 2.$$

(Luma, 2010)

Contoh 2.4.2:

Diketahui $L_0 = 2$ dan $L_1 = 1$, diperoleh;

$L_2 = L_1 + L_0 = 1 + 2 = 3$

$L_3 = L_2 + L_1 = 3 + 1 = 4$
$L_4 = L_3 + L_2 = 4 + 3 = 7$
$L_5 = L_4 + L_3 = 7 + 4 = 13$
Oleh karena itu, barisan $(L_n) = 2,1,3,4,7,13, \dots$.

2.5 Faktor Persekutuan Terbesar (FPB)

Faktor Persekutuan Terbesar (FPB) dikenal dengan *Greatest Common Divisor* (gcd), sering juga disebut *Greatest Common Factor* (gcf) atau *Highest Common Factor* (HCF).

Definisi 2.5.1. FPB dari dua bilangan adalah bilangan positif terbesar yang dapat membagi dua bilangan tersebut. Dua bilangan dikatakan relatif prima jika FPB dari dua bilangan tersebut adalah 1 (Sudirman, 2001:43).

Misalkan a dan b bilangan bulat yang tidak nol, d adalah faktor persekutuan terbesar (FPB) atau adalah *greatest common divisor* dari a dan b (ditulis FPB(a, b)) jika dan hanya jika d faktor persekutuan dari a dan b, jika c faktor persekutuan dari a dan b maka $c \leq d$.

Faktor persekutuan terbesar dari a dan b dapat dinyatakan sebagai berikut:
$d =$ FPB(a, b) jika dan hanya jika
(i) $d|a$ dan $d|b$,
(ii) Jika $c|a$ dan $c|b$ maka $c \leq d$.

Syarat (i) menyatakan bahwa d adalah faktor persekutuan dari a dan b, sedangkan syarat (ii) menyatakan bahwa d adalah faktor persekutuan terbesar dari a dan b (Burton, 1980).

Contoh 2.5.2
Akan ditentukan faktor persekutuan terbesar dari 14 dan 20.

Faktor dari 14 adalah 1, 2, 7, dan 14, sedangkan faktor dari 20 adalah 1, 2, 4, 5, 10, dan 20. Oleh karena itu, FPB dari 14 dan 20 adalah 2.

2.6 Modulo

Dalam matematika, operasi modulo adalah operasi yang menghasilkan sisa pembagian dari suatu bilangan terhadap bilangan lainnya.

Definisi 2.6.1. Misalkan a adalah bilangan bulat dan m adalah bilangan bulat dengan $m > 0$. Operasi a mod m (dibaca “a modulo m”) memberikan sisa jika a dibagi dengan m.
Notasi: a mod $m = r$ sedemikian sehingga $a = mq + r$, dengan $0 \leq r < m$.
Bilangan m disebut modulus atau modulo, dan hasil aritmatika modulo m terletak di dalam himpunan $\{0,1,2,\ldots,m-1\}$ (Grillet, 2007).

Contoh 2.6.2.
Beberapa hasil operasi dengan operator modulo:
23 mod 5 $= 3$ $\quad$ $(23 = 5 \cdot 4 + 3)$
27 mod 3 $= 0$ $\quad$ $(27 = 3 \cdot 4 + 0)$

2.7 Relasi Kongruensi

Dalam aljabar abstrak, relasi kongruensi juga disebut dengan kekongruenan atau kongruen adalah hasil operasi aljabar dari elemen yang ekuivalensi akan menghasilkan elemen yang ekuivalen yang bersesuaian dengan kelas ekuivalensi relasi tersebut.

Definisi 2.7.1. Misalkan a dan b adalah bilangan bulat dan m bilangan bulat dengan $m > 0$, a kongruen dengan b mod m, dituliskan dengan $a \equiv b (\text{mod } m)$ jika m

habis membagi $a - b$. Jika a tidak kongruen dengan b dalam modulus m, maka dapat ditulis $a \not\equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ (Grillet, 2007).

Contoh 2.7.2:

$17 \equiv\ 2$ (mod m) (3 habis membagi 17-2=15).

$12 \not\equiv\ 2$ (mod m) (7 tidak habis membagi $12 - 2 = 10$).

Kekongruenan $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ dapat pula dituliskan dalam hubungan $a = b + km$, dengan $k \in \mathbb{Z}$

Contoh 2.7.3:

17 ≡2 (mod 3) dapat ditulis sebagai 17 = 2 + 5 .3.

–7 ≡15 (mod 11) dapat ditulis sebagai –7 = 15 + (–2)11.

Contoh 2.7.4:

Beberapa hasil operasi dengan relasi kongruensi berikut:

$23 \text{ mod } 5 = 3$ dapat ditulis sebagai $23 \equiv 3 \text{ (mod 5)}$.

$27 \text{ mod } 3 = 0$ dapat ditulis sebagai $27 \equiv 0 \text{ (mod 3)}$.

Berdasarkan pengertian kongruen terdapat pada Definisi 2.5.1, berikut ini akan diberikan teorema tentang kongruen.

Teorema 2.7.5. Misalkan *m* adalah bilangan bulat positif.

1. Jika $a \equiv b$ (mod m) dan c adalah sebarang bilangan bulat maka
   (i)$(a + c) \equiv (b + c)$ (mod m)
   (ii) $ac \equiv bc$ (mod m)
   (iii) $a^p \equiv b^p$ (mod m) untuk suatu bilangan bulat tak negatif p.

2. Jika $a \equiv b$ (mod m) dan $c \equiv d$ (mod m), maka
   (i) $(a + c) \equiv (b + d)$ (mod m)
   (ii) $ac \equiv bd$ (mod m)

Bukti:

1. (i) $a \equiv b \pmod{m}$ berarti $a = b + km$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$

   Untuk sebarang $c \in \mathbb{Z}$, diperoleh

$$a + c = b + c + km \Leftrightarrow a + c = (b + c)(\text{mod } m)$$

   (ii) $a \equiv b \pmod{m}$ berarti:

$$a = b + km, \text{ untuk suatu } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow a - b = km$$

$$\Leftrightarrow (a - b)c = ckm$$

$$\Leftrightarrow ac - bc = ckm$$

$$\Leftrightarrow ac = bc + ckm$$

$$\Leftrightarrow ac = bc + lm \text{ , dengan } l = ck$$

$$\Leftrightarrow ac \equiv bc \pmod{m}$$

   (iii) $a \equiv b \pmod{m}$ berarti $a = b + km$ dengan $k \in \mathbb{Z}$ dan $p \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

$$a^p = (b + km)^p$$

$$\Leftrightarrow a^p = b^p + \binom{p}{1} b^{p-1}k + \binom{p}{2} b^{p-2}k^2m + \cdots + \binom{p}{p-1} b(km)^{p-1}$$

$$+(km)^p$$

$$= b^p + \{\binom{p}{1} b^{p-1}km + \binom{p}{2} b^{p-2}(km)^2 + \cdots + \binom{p}{p-1} bk^{p-1}m^{p-2}$$

$$+k^pm^{p-1}\}m$$

$$\Leftrightarrow a^p \equiv b^p(\text{mod})m.$$

Sifat 1 menyatakan kedua ruas suatu kongruensi dapat ditambah dengan bilangan yang sama. Demikian pula dengan perkalian, asalkan $c \neq 0(\text{mod } m)$

2. (i) $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a = b + k_1m$, untuk suatu $k_1 \in \mathbb{Z}$.

$$c \equiv d \pmod{m} \Leftrightarrow c = d + k_2m, \text{ untuk suatu } k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow (a + c) = (b + d) + (k_1 + k_2)m$$

$$\Leftrightarrow (a + c) = (b + d) + km \qquad (k = k_1 + k_2)$$

$$\Leftrightarrow (a + c) \equiv (b + d)(\text{mod } m)$$

   (ii) $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a = b + mk$, untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$.

$$c \equiv d \pmod{m} \Leftrightarrow c = d + ml \text{ , untuk suatu } l \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow a \cdot c = (b + mk)(d + ml)$$

$\Leftrightarrow a \cdot c = bd + blm + kdm + klm^2$

$\Leftrightarrow a \cdot c = bd + (bl + kd + klm)m$

$\Leftrightarrow a \cdot c \equiv bd (\mathrm{mod}\ m).$

Sifat 2 menyatakan bahwa dua kongruensi yang sama, masing-masing ruas, dapat dijumlahkan maupun dikalikan seperti halnya pada persamaan.

Jadi, terbukti bahwa a kongruen dengan b modulo m.

(Grillet, 2007)

III. METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian dilakukan pada semester Genap Tahun Ajaran 2020/2021, bertempat di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Adapun langkah-langkah yang akan dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. mencari literatur utama yang mendukung topik pembahasan ini;
2. memahami dan mempelajari konsep menentukan FPB dalam Deret Fibonacci;
3. membuktikan beberapa teorema dan lemma FPB dalam Deret Fibonacci yang berlaku;
4. menentukan FPB pada Deret Fibonacci dimodifikasi oleh ± 1,± 2,± 3 bernotasi ($f_n(1), f_n(2), f_n 3, f_n(-1), f_n(-2), f_n(-3)$), dan FPB pada Deret Lucas dimodifikasi oleh 1 bernotasi ($l_n(1)$);
5. membuktikan hasil FPB pada Deret Fibonacci dan Deret Lucas yang dimodifikasi menggunakan teorema yang berlaku;
6. menarik kesimpulan tentang FPB dalam Deret Fibonacci yang telah dibuktikan.

V. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dilakukan, maka dapat disimpulkan bahwa Deret Fibonacci yang diperumum $G_n = G_{n-1} + G_{n-2}$, untuk $n \geq 3$ dimana ketika $\alpha = \beta = 1$ deret G_n merupakan Deret Fibonacci yang memiliki FPB bernilai barisan kosntanta $\{1,1,1,\dots\}$ dan ketika $\alpha = 1$ dan $\beta = 3$ merupakan deret Lucas yang memiliki FPB bernilai barisan kosntanta $\{1,1,1,\dots\}$. Oleh karena itu, dari dua deret tersebut diketahui bahwa Deret Fibonacci yang diperumum G_n memiliki FPB bernilai barisan kosntanta $\{1,1,1,\dots\}$ atau $FPB(G_n, G_{n+1}) = 1$.

Beberapa hasil FPB dalam Deret Fibonacci yang dimodifikasi oleh ± 1 sampai ± 3 dan FPB dalam Deret Lucas yang dimodifikasi oleh 1, yang pada skripsi ini menambah perhitungan untuk FPB pada deret Fibonacci yang dimodifikasi oleh $+3$, barisan FPB yang terbentuk adalah $\{8, 1, 1, 8, 1, \dots\}$, $\{1, 1, 1, 1, 3, 1 \dots\}, \{4, 1, 1, 4, 1, \ \dots\}, \{3, 1, 3, 1, 3, \ \dots\}$. Sedangkan deret Fibonacci yang dimodifikasi oleh $+3$, barisan FPB yang terbentuk adalah $\{1, 1, 1, 1, 1, \dots\}$, $\{1, 1, 1, 1, 1, \ \dots\}, \{1, 1, 1, 1, 1, \ \dots\}, \{1, 1, 2, 1, 1, \ \dots\}$. Sehingga dengan melihat hasil FPB dari anggota Deret Fibonacci yang dimodifikasi oleh ± 1, $\pm 2, \pm 3$ dan FPB dalam Deret Lucas yang dimodifikasi oleh 1 diketahui bahwa FPB nya tidak selalu relatif prima.

DAFTAR PUSTAKA

Chen, K. 2011. Greatest Common Divisors in Shifted Fibonacci Sequences. *Journal of Integer Sequences.* Vol.14

Dudley, U. dan Tucker, B. 1971. Greatest Common Divisors In Altered Fibonacci Sequences. *Fibonacci Quart.* Vol.9, 89-91

Hernandez, S. dan Luca, F. 2003. Common Factors Of Shifted Fibonacci Number. *Period. Math. Hungar*. Vol. 47, 95-110

Koshy, T. 2001. Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. *Wiley-Interscience*. New York.

Luma, A. dan Raufi, B. 2010. Relationship Between Fibonacci and Lucas Squences and Their Application in Symmetric Cryptosystems. *Latest Trends on Circuits, Systems and Signals*. 146-150

M. Zaki Riyanto. 2008. Pengantar Analisis Real I. *Matematika Universitas Gadjah Mada*. 38-68

Sudirman. 2001. Teori Bilangan. Malang: *Depdiknas Universitas Negeri Malang*.

Burton, D. 1980. Elementary Number Theory. Second Edition. *Allyn and Bacon.* Inc. Boston.

Grillet, P. A. 2007. Abstract Algebra, second edition. *Springer*. 315-358.

Hoggatt, V. E. Jr. dan Alexanderson, G. L. 1971. A Property of Multinomial Coefficients. *The Fibonacci Quarterly. Vol. 9. 351-421*

Setya Budhi, W. 2014. Teori Bilangan Langkah Awal Menuju Olimpiade Matematika SMA. *Penerbit Erlangga.* Jakarta.