PENDUGAAN PARAMETER *SPATIAL ERROR MODEL* (SEM) MENGGUNAKAN *ORDINARY LEAST SQUARE* (OLS) DAN *GENERALIZED LEAST SQUARE* (GLS)

(Skripsi)

Oleh

ROSSA CHARISMA

(1717031090)

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2021

ABSTRACT

ESTIMATION OF SPATIAL ERROR MODEL (SEM) PARAMETERS USING ORDINARY LEAST SQUARE (OLS) AND GENERALIZED LEAST SQUARE (GLS)

By

ROSSA CHARISMA

Spatial regression is the result of the development of a simple linear regression method. The development is due to the influence of place or spatial on the analyzed data. In regression modeling with spatial effects, a spatial weighting matrix is arranged to determine the spatial interactions that occur between one region and another. The parameter estimation methods used in this research are Ordinary Least Square (OLS) and Generaalized Least Square (GLS). In this OLS regression method, it does not pay attention to the position or location of the data it uses/spatially. The SEM method is used when the data obtained are homoscedastic so that only one model is obtained for the whole. However, the OLS method is very sensitive to deviations from assumptions in the data. Therefore, another estimation method is needed to obtain valid results, namely the GLS (Generalized Least Square) estimator. This study aims to examine the form of estimation of the spatial error regression model using the OLS and GLS methods. Based on the results of theoretical studies that have been obtained that the β estimator is an unbiased estimator, minimum variance and consistent.

Keyword : Spatial, OLS,GLS,SEM**.**

ABSTRAK

PENDUGAAN PARAMETER *SPATIAL ERROR MODEL* (SEM) MENGGUNAKAN *ORDINARY LEAST SQUARE* (OLS) DAN *GENERALIZED LEAST SQUARE* (GLS)

Oleh

ROSSA CHARISMA

Regresi spasial merupakan hasil pengembangan dari metode regresi linier sederhana. Pengembangan tersebut karena adanya pengaruh tempat atau spasial pada data yang dianalisis. Pada pemodelan regresi dengan efek spasial, disusun suatu matriks pembobot spasial untuk mengetahui interaksi spasial yang terjadi antar wilayah satu dengan wilayah lainnya. Metode pendugaan parameter yang digunakan dalam penelitian ini adalah *Ordinary Least Square* (OLS) dan *Generaalized Least Square* (GLS). Pada metode regresi OLS ini tidak memperhatikan posisi atau lokasi data yang digunakannya/spasial. Metode SEM digunakan ketika data yang diperoleh homoskedastisitas sehingga hanya memperoleh satu model untuk keseluruhan. Namun metode OLS sangat peka terhadap adanya penyimpangan asumsi pada data. Oleh karena itu diperlukan metode pendugaan lain untuk memperoleh hasil yang valid yaitu penduga GLS (*Generalized Least Square*). Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji bentuk pendugaan model regresi spasial error dengan metode OLS dan GLS. Berdasarkan hasil kajian teori yang telah diperoleh bahwa penduga β merupakan penduga yang tak bias, ragam minimum dan konsisten.

Kata Kunci : Spasial, OLS,GLS,SEM.

PENDUGAAN PARAMETER *SPATIAL ERROR MODEL* (SEM) MENGGUNAKAN *ORDINARY LEAST SQUARE* (OLS) DAN *GENERALIZED LEAST SQUARE* (GLS)

Oleh

Rossa Charisma

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2021

Judul Skripsi : **PENDUGAAN PARAMETER *SPATIAL ERROR MODEL* (SEM) MENGGUNAKAN *ORDINARYLEAST SQUARE* (OLS) DAN *GENERALIZED LEAST SQUARE* (GLS)**

Nama Mahasiswa : Rossa Charisma

Nomor Pokok Mahasiswa : 1717031090

Program Studi : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI,

1. Komisi Pembimbing

Widiarti, S.Si., M.Si.
NIP. 198005022005012003

Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.
NIP. 197008311999031002

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 197403162005011001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Widiarti, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Prof. Drs. Mustofa Usman, M.A., Ph,D.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI UNIVERSITAS LAMPUNG FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, S.Si., M.T.
NIP. 197407052000031001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **6 Desember 2021**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama	: Rossa Charisma
Nomor Pokok Mahasiswa	:1717031090
Jurusan	: Matematika
Judul Skripsi	: **PENDUGAAN PARAMETER *SPATIAL ERROR MODEL* (SEM) MENGGUNAKAN *ORDINARY LEAST SQUARE* (OLS) DAN *GENERALIZED LEAST SQUARE* (GLS)**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan semua tulisan yang tertuang ini telah mengikuti kaidah karya penulisan ilmiah Universitas Lampung.

Bandar Lampung, 6 Desember 2021

Rossa Charisma
NPM. 1717031090

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Bandar Lampung pada taggal 23 September 1999, sebagai anak ketiga dari tiga bersaudara dari pasangan Bapak Suwarno dan Ibu Supiati.

Penulis telah menempuh Pendidikan di Sekolah Dasar Negeri (SDN) 1 Rajabasa Raya Bandar Lampung pada tahun 2007-2012, Sekolah Menengah Pertama Negeri (SMPN) 8 Bandar Lampung tahun 2012-2014, dan Sekolah Menengah Atas Swasta (SMAS) Muhammadiyah 2 Bandar Lampung tahun 2014-2016.

Pada Tahun 2017 penulis terdaftar sebagai Mahasiswi Program Studi S1 Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur Perluasan Akses Pendidikan (PMPAP) Universitas Lampung. Selama menjadi mahasiswi, penulis pernah bergabung di beberapa kegiatan seperti Generasi Muda Matematika (GEMATIKA), anggota BEM FMIPA Departemen Pemberdayaan Wanita Dan Banyak kegiatan lainnya.

Pada tanggal 02 Januari sampai 10 Februari 2020 penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) Kebangsaan di Desa Margoyoso, Kecamatan Sumberejo, Kabupaten Tanggamus. Pada tanggal 06 Juli sampai 14 Agustus 2020 penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Badan Pusat Statistik (BPS) Kota Bandar Lampung bertujuan untuk menambah ilmu dan menerapkan ilmu yang telah diperoleh sewaktu kuliah.

PERSEMBAHAN

Bismillahirrohmanirrohim

Alhamdulillah, puji Syukur kehadirat Allah SWT yang maha pengasih lagi maha penyayang karena atas izin-Nya terselesaikan skripsi ini. Penulis mempersembahkan skripsi ini kepada:

Orang Tua Tercinta

Orang Tuaku Bapak Suwarno dan Ibu Supiati yang selalu memberikan dukungan, bimbingan, doa, dan kasih sayang yang tiada batas.

Kakak Tersayang

Mamas Medi dan Mbak ewi yang mendukung, memberikan motivasi, keceriaan, dan mendoakan.

Dosen

Seluruh dosen-dosen Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam yang telah memberikan bimbingan, motivasi, dan ilmu yang sangat bermanfaat.

Keluarga dan Sahabat Terbaik

Seluruh Keluarga, saudara,dan juga sahabat yang memberikan kebahagiaan dan memberikan banyak motivasi.

Almamater Tercinta Universitas Lampung

KATA INSPIRASI

"Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan."

(Qur'an Surat Al-Insyirah ayat 5-6)

"Kesabaran itu ada dua macam: sabar atas sesuatu yang tidak kau ingini dan sabar menahan diri dari sesuatu yang kau ingini."

(Ali Bin Abi Thalib)

SANWACANA

Puji Syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT, yang telah memberikan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Pendugaan Parameter *Spatial Error Model* (SEM) Menggunakan *Ordinary Leasst Square* (OLS) dan *Generalized Least Ssquare* (GLS)”.

Selesainya skripsi ini adalah berkat motivasi, arahan, dan dukungan banyak pihak. Untuk itu, dengan segala kerendahan hati penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar besarnya kepada :

1. Ibu Widiarti, S.Si., M.Si., selaku dosen pembimbing utama yang telah banyak memberikan bimbingan dan arahan, memberikan evaluasi dan saran yang membangun dalam proses penyusuan skripsi ini.
2. Bapak Agus Sutrisno, S.Si., M.Si., selaku dosen pembimbing kedua yang telah banyak membantu memberikan bimbingan, saran dan nasehat selama proses penyusunan skripsi dan selama proses perkuliahan.
3. Bapak Prof. Drs. Mustofa Usman, M.A., Ph. D., selaku dosen penguji atas kritik dan saran yang membangun guna penyempurnaan skripsi ini.
4. Bapak La Zakaria, S.Si., M.Sc., selaku dosen pembimbing akademik yang telah membantu kemudahan untuk prose perkuliahan juga memberikan nasihat, saran dan masukan selama masa perkuliahan berjalan.
5. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

6. Bapak Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, M.T., selaku dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Seluruh dosen, staf, dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang telah memberikan banyak ilmu pengetahuan dan bantuan kepada penulis.
8. Keluarga ku, terutama kedua orang tuaku serta mamas dan mbak yang selalu memberikan dukungan, semangat, dan doa
9. Sahabat-sahabatku Titi ,Tia, dan Ridho yang selalu menyemangati, memberikan dukungan dan motivasi kepada penulis.
10. Sahabat seperjuangan dikampus, Indri, Putri, dan Nyoman yang selalu memberikan dukungan, keceriaan dan motivasi kepada peneliti selama masa perkuliahan.
11. Seluruh mahasiswa seperjuangan Matematika 2017 atas segalanya selama masa perkuliahan hingga akhir .
12. Pihak-pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu yang telah banyak membantu dan memberi masukan serta inspirasi bagi penulis.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih banyak kekurangan. Oleh karena itu penulis mengharapkan saran dan kritik yang membangun guna penelitian selanjutnya.

Bandar Lampung,   Desember 2021

Penulis

Rossa Charisma

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

Tabel Halaman

DAFTAR GAMBAR

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar belakang dan Masalah

Analisis regresi merupakan cabang dari metodologi statistik yang fokus pada analisis hubungan antara peubah terikat Y dengan peubah bebas X. Hal ini bertujuan untuk melihat hubungan antara peubah terikat dan peubah bebas sehingga mampu memprediksi nilai Y jika diberikan nilai X dengan *error* terkecil. Regresi memiliki bermacam-macam bentuk seperti, regresi linier sederhana dan regresi linier berganda yang digunakan untuk mencari hubungan linier antara peubah bebas dan peubah terikat. Perbedaannya terletak pada jumlah peubah bebas, pada regresi linier sederhana hanya ada satu peubah bebas, sedangkan regresi linier berganda memiliki peubah bebas lebih dari satu. Regresi data panel merupakan regresi bagi data *cross section* atau data runtun waktu. Sedangkan regresi spasial merupakan regresi bagi data yang memiliki efek spasial (Anselin,1988).

Regresi spasial merupakan hasil pengembangan dari metode regresi linier sederhana. Pengembangan tersebut karena adanya pengaruh tempat atau spasial pada data yang dianalisis. Sehingga, jika terdapat data dengan efek spasial maka analisis yang digunakan adalah regresi spasial. Sebab jika menggunakan regresi linier sederhana ataupun berganda maka model yang dihasilkan kurang akurat dan menyebabkan kesimpulan yang kurang tepat karena asumsi *error* saling bebas tidak terpenuhi (Winarno, 2009).

Analisis regresi spasial memiliki beberapa model yaitu *Spatial Autoregressive Model* (SAR), *Spatial Error Model* (SEM), dan *Spatial Autoregressive Moving Averange* (SARMA). SAR mengasumsikan bahwa terdapat pengaruh spasial pada peubah terikatnya. SEM merupakan model spasial yang mengandung pengaruh spasial pada *error*nya. Sedangkan SARMA merupakan gabungan antara SAR dan SEM yaitu model spasial yang mengandung pengaruh spasial pada peubah terikat maupun *error*nya (LeSage, 1999).

Pada pemodelan regresi dengan efek spasial, harus disusun suatu matriks pembobot spasial untuk mengetahui interaksi spasial yang terjadi antar wilayah satu dengan wilayah lainnya. Jika interaksi antar wilayah berdasarkan persentuhan titik sudut maka matriks pembobot spasial yang terbentuk adalah *rook contiguity*. Jika interaksi antar wilayah berdasarkan persentuhan titik sudut maka matriks pembobot spasial yang terbentuk adalah *bishop contiguity*. Sedangkan apabila interaksi antar wilayah merupakan gabungan dari persentuhan sisi wilayah dan titik sudut, maka matriks pembobot spasial yang terbentuk adalah *queen contiguity* (Anselin, 1988).

Metode pendugaan parameter regresi yang sering digunakan yaitu Metode *Ordinary Least Square* (OLS), namun kelemahan dari metode regresi OLS ini tidak memperhatikan posisi atau lokasi data yang digunakannya/spasial. Maka dari itu munculah hukum pertama tentang geografi yang menjadi salah satu dasar pengembangan analisis spasial yang dikemukakan oleh (Tobler, 1970) yang menyatakan "*everything is related to everything else, but near things are more related than distant things*". Salah satu regresi yang menggunakan pengaruh kewilayahan atau spasial yaitu metode *Spatial Error Model* (SEM).

Metode SEM digunakan jika regresi yang dilakukan memperhatikan daerah sekitarnya atau data yang digunakan memiliki pengaruh ketetanggaan. Metode SEM digunakan ketika data yang diperoleh homoskedastisitas sehingga hanya memperoleh satu model untuk keseluruhan. *Spatial Error Model* merupakan model spasial *error* dimana pada *error* terdapat korelasi spasial. Model spasial *error* terbentuk apabila W_1= 0 dan ρ = 0, sehingga model ini mengasumsikan bahwa proses *autoregressive* hanya pada *error* model.

Dalam analisis regresi ada beberapa uji asumsi yang harus dipenuhi, yaitu uji asumsi residual, uji asumsi saling bebas (uji autokorelasi residual), dan uji asumsi normal (residual harus berdistribusi normal). Pemodelan klasik dengan *Ordinary Least Square* (OLS) sangat ketat terhadap beberapa asumsi. Metode OLS harus memenuhi asumsi-asumsi yang ada sehingga hasil estimasinya memenuhi sifat *Best Linear Unbiased Estimator* (BLUE). Namun metode OLS sangat peka terhadap adanya penyimpangan asumsi pada data. Beberapa asumsinya antara lain adalah *residual* harus berdistribusi normal, variansnya homogen dan tidak terjadi autokorelasi. Jika data tidak memenuhi salah satu asumsi misalnya disebabkan adanya *outlier*, maka penduga OLS yang diperoleh menjadi tidak efisien. Oleh karena itu diperlukan metode pendugaan lain untuk memperoleh hasil yang valid yaitu penduga GLS (*Generalized Least Square*). Pelanggaran asumsi diantaranya terdapat autokorelasi pada galat model.

Terdapat beberapa penelitian terdahulu diantaranya Analisis Spasial Tingkat Pengangguran Terhadap Kemiskinan di Indonesia (Rahmawati, dkk, 2015), Pemodelan *Spatial Error Model* (SEM) Untuk Indeks Pembangunan Manusia (IPM) di Provinsi Jawa Tengah (Safitri, dkk, 2014), Perbandingan Penduga *Ordinary Least Squares* (OLS) dan *Generalized Least Squares* (GLS) Pada Model Regresi Linier dengan Regresi Bersifat Stokastik.
Dari beberapa penelitian tersebut dapat diketahui bahwa hasilnya menunjukan adanya efek spasial yang harus dipertimbangkan, dan terbukti bahwa metode spasial lebih tepat dibandingkan dengan metode yang biasa digunakan atau regresi biasa.

Menurut Badan Pusat Statistik Provinsi Lampung pada periode September 2019, tercatat jumlah penduduk miskin di Provinsi Lampung mengalami penurunan sebesar

33.390 jiwa dari sebelumnya yaitu dari 1.097.050 jiwa menjadi 1.063.660 jiwa atau sebesar 0.52% dari total jumlah penduduk miskin Provinsi Lampung.

Berdasarkan uraian tersebut, penulis tertarik untuk mengaplikasikan model *spatial error* pada data Kemiskinan di Provinsi Lampung Tahun 2019. Maka peneliti menyusunnya dalam suatu penelitian yang berjudul “Pendugaan Parameter Spasial Error Model (SEM) Menggunakan *Ordinary Least Square* (OLS) dan *Generalized Least Square* (GLS)”.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengetahui bentuk pendugaan model regresi spasial *error* dengan menggunakan metode *Ordinary Least Square* (OLS) dan *Generalized Least Square* (GLS).
2. Menentukan model regresi terbaik untuk memodelkan jumlah penduduk miskin Provinsi Lampung tahun 2021.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah untuk memperkaya wawasan tentang penerapan analisis regresi spasial khususnya *Spatial Error Model* serta sebagai bahan bacaan dan referensi dalam menyelesaikan permasalahan yang memasukan pengaruh lokasi.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Analisis Data Spasial

Data spasial adalah data yang berkaitan dengan lokasi, berdasarkan geografi yang terdiri dari lintang-bujur dan wilayah. Analisis data spasial tidak dapat dilakukan secara global, artinya setiap lokasi mempunyai karakteristik sendiri. Sebagian besar pendekatan analisisnya merupakan eksplorasi data yang disajikan dalam bentuk peta tematik. Peta tematik juga disebut sebagai peta statistik atau peta tujuan khusus, menghasilkan gambaran penggunaan ruangan pada tempat tertentu sesuai dengan tema yang diinginkan. Berbeda dengan peta rujukan yang memperlihatkan pengkhususan geografi (hutan, jalan, perbatasan administratif), peta-peta tematik lebih menekankan variasi penggunaan ruangan daripada sebuah jumlah atau lebih dari distribusi geografis. Distribusi geografis bisa berupa fenomena fisikal seperti iklim atau ciri-ciri khas manusia seperti kepadatan penduduk atau permasalahan kesehatan. Konsep Analisis Data Spasial terdiri dari *Spatial Dependence, Spatial Heterogeneity*, *Spatial Autocorrelation*.

2.2. Model Regresi Spasial

Menurut LeSage (1999) secara umum model regresi spasial adalah sebagai berikut :

$Y = \rho W_1 y + X\beta + u$ (2.1)

$u = \lambda W_2 u + \varepsilon$ (2.2)

$\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 1)$

dengan

Y : vektor variabel respon berukuran $n\ x\ 1$

X : matriks variabel predictor berukuran $n\ x\ (k+1)$

β : vektor parameter koefisien regresi berukuran $(k$+1$)x$

ρ : parameter koefisien spasial lag variabel predictor

λ: parameter koefisien spasial pada galat

u : vektor galat persamaan (2.1) berukuran $n\ x\ 1$

ε : vektor galat persamaan (2.2) berukuran $n\ x\ 1$

$\boldsymbol{W_1}, \boldsymbol{W_2}$: matriks pembobot berukuran $n\ x\ n$

I : matriks identitas berukuran $n\ x\ n$

Berdasarkan model umum di atas, dapat diperoleh beberapa model berikut:

1. Jika $\boldsymbol{W_2} = 0$ maka akan menjadi *Spatial Autoregressive Model* (SAR). Model ini menunjukkan adanya efek spasial pada variabel respon. Sehingga persamaannya menjadi

   $Y = \rho W_1 y + X\beta + u$ (2.3)

   $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$
2. Jika $\boldsymbol{W_1} = 0$ maka akan menjadi *Spatial Error Model* (SEM) atau Model Galat Spasial. Model Galat Spasial adalah model spasial yang menunjukkan adanya efek spasial dalam galat. Sehingga diperoleh persamaan seperti berikut

   $Y = X\beta + \lambda W u + \varepsilon$ (2.4)

   $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$
3. Jika terdapat efek spasial pada variabel respon dan variabel prediktor disebut *Spatial Durbin Model*. Sehingga model persamaan seperti berikut:

$$Y = \rho W_1 y + X\beta_1 + W_1 X\beta^2 + \varepsilon \quad (2.5)$$

$$\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$$

2.3. ***Spatial Error Model*** (SEM)

Persamaan SEM atau Model Galat Spasial dapat dijabarkan seperti berikut ini

$$Y = X\beta + u \quad (2.6)$$

$$u = \lambda W u + \varepsilon \quad (2.7)$$

$$\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 1)$$

Estimasi adalah pendugaan, yaitu menduga nilai suatu populasi dengan dasar nilai sampel. Peggunaan nilai sampel untuk mewakili nilai populasi yang disebabkan karena jumlah populasinya terlalu banyak atau karena alasan lain (Subagyo, 2010). Adapun sifat-sifat dari estimasi parameter antara lain :

1. Tak Bias *(Unbiased Estimator)*

   Suatu parameter dikatakan tak bias jika rata-rata dari seluruh kemungkinan sampel akan sama dengan nilai parameter dari populasi yang diduga. Misalkan terdapat suatu parameter θ. $\hat{\theta}$ merupakan pendugaan tak bias *(unbiased estimator)* dari θ jika $E(\theta) = \theta$.
2. Konsisten *(Consistent Estimator)*

   $\hat{\theta}$ merupakan penduga konsisten (*consistent estimator)* bagi θ untuk n (besarnya sampel) yang semakin besar mendekati tak terhingga ($n \to \infty$). Artinya, jika jumlah sampelnya semakin mendekati nilai populasinya.
3. Efisien *(Efficient Estimator)*

   $\hat{\theta}$ merupakan penduga yang efisien *(efficient estimator)* bagi θ jika penduga $\hat{\theta}$ memiliki varians atau standar deviasi yang lebih kecil dibandingkan dengan penduga lainnya.

2.4 Metode *Ordinary Least Square* (OLS)

Secara umum model regresi linear berganda yang melibatkan sejumlah k variabel bebas dapat dituliskan dalam persamaan sebagai berikut :

$$Y_i = \beta_0 + \beta_j x_{ij} + \varepsilon_i \tag{2.8}$$

dengan $i = 1,2, \dots, n$ dan $j = 1,2, \dots, k$ dimana n adalah banyaknya pengamatan dan k adalah banyaknya variabel bebas dengan $k < n$; β_0 dan β_j merupakan parameter yang nilainya tidak diketahui; dan e adalah nilai variabel acak yang merepresentasikan faktor-faktor lain yang mempengaruhi nilai variabel terikat dan disebut sebagai *residual*. Persamaan (2.8) dapat ditulis dalam notasi matriks sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1p} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

dimana $\boldsymbol{y}$ adalah vektor variabel terikat berukuran (n x 1), $\boldsymbol{X}$ adalah matriks variabel bebas berukuran (n x p), dengan $p = k + 1$, $\boldsymbol{\beta}$ adalah vektor parameter berukuran (p x 1) dan ε adalah vektor *residual* berukuran (n x 1), dengan asumsi bahwa *residual* memiliki $E[e] = 0$ dan $var(e) = \sigma^2 I$. Salah satu metode estimasi parameter dalam model regresi ialah metode *Ordinary Least Squares* (OLS). Metode OLS bertujuan menemukan penduga parameter regresi dengan meminimumkan jumlah kuadrat *residual*. *Residual* adalah selisih antara nilai pengamatan y dengan nilai estimasinya $\hat{y}$. Fungsi tujuan dari metode OLS dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\min \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \min \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 \tag{2.10}$$

Sehingga penduga untuk parameter regresi dalam bentuk matriks dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y \tag{2.11}$$

2.5 Penduga *Generalized Least Squares* (GLS)

Pendugaan parameter koefisien dengan *Generalized Least Squares* (GLS) dalam masalah autokorelasi memiliki sebaran komponen galat dalam model tidak bebas lagi dan juga tidak identik. Dalam kasus ini, penduga OLS bersifat tak bias dan tidak konsisten.

Diberikan suatu model

$$Y = X\beta + u, \tag{2.12}$$

dengan $E(u) = 0, Var(u) = \sigma^2\Omega$. Matriks $\boldsymbol{\Omega}$ adalah matriks simetris definit positif berorde n x n dan $u \sim N(0, \sigma^2\Omega)$. Penduga tak bias terbaik dari β adalah

$$\hat{\beta} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}Y, \tag{2.13}$$

dimana nilai tengah dan matriks varian-kovarian dari penduga GLS adalah $E(\hat{\beta}) = \beta$ dan $Cov(\hat{\beta}) = \sigma^2(X'\Omega^{-1}X)^{-1}$

2.6 Uji Efek Spasial

Untuk mengetahui adanya efek spasial yaitu *spatial dependence* dan *spatial heterogenity* pada data, digunakan beberapa metode pengujian. Pengujian dependensi spasial menggunakan *Likelihood Ratio* (LR), sedangkan untuk pengujian heterogenitas spasial menggunakan metode Uji *Breusch-Pagan*.

1. Uji Dependensi Spasial (*Spatial Dependence*)

Pengujian hipotesisnya adalah

H_0 : $\lambda = 0$ (tidak ada korelasi spasial)

H_1 : $\lambda \neq 0$ (ada korelasi spasial)

Fungsi *likelihood* untuk model galat spasial adalah

$$L = -\frac{n}{2}\ln(\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) + ln|I - \lambda W| - \frac{(y - X\beta)'(I - \lambda W)(y - X\beta)}{2\sigma^2}$$

Fungsi *likelihood* pada H_0 adalah

$$L_0 = -\frac{n}{2}\ln(\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{(y-X\beta)'(y-X\beta)}{2\sigma^2}$$

Statistik *Likelihood Ratio Test* (LRT) merupakan selisih dari kedua fungsi *likelihood* di atas, sehingga

$$LRT = 2(L - L_0) \quad (2.14)$$

$$LRT = 2\left\{-\frac{n}{2}\ln(\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) + ln|I - \lambda W| - \frac{(y-X\beta)'(I-\lambda W)'(I-\lambda W)(y-X\beta)}{2\sigma_1^2} - \left(-\frac{n}{2}\ln(\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{(y-X\beta)'(y-X\beta)}{2\sigma_0^2}\right)\right\}$$

$$LRT = n[\ln(\sigma_0^2) - \ln(\sigma_1^2) + 2ln|I - \lambda W|]$$

Dimana

σ_0^2 : varian dari galat untuk model tanpa autokorelasi spasial

σ_1^2 : varian dari galat untuk model spasial

Untuk menguji signifikansi dari koefisien korelasi spasial (λ) digunakan LRT.

Pengambilan keputusan H_0 ditolak jika nilai LRT $> \chi^2_{\alpha,1}$

2. Uji Heterogenitas Spasial (*Spatial Heterogenity*)

Heterogenitas spasial dapat diuji dengan menggunakan uji *Breusch-Pagan* yang mempunyai hipotesis sebagai berikut

H_0 : Terdapat homogenitas spasial

H_1 : Terdapat heterogenitas spasial

Nilai Uji Breusch-Pagan

$$BP = \frac{1}{2} f^T Z(Z^T Z)^{-1} Z^T f \sim \chi_p^2$$

Dengan elemen vektor f

$$f_i = \left(\frac{e_i^2}{\sigma^2} - 1\right)$$

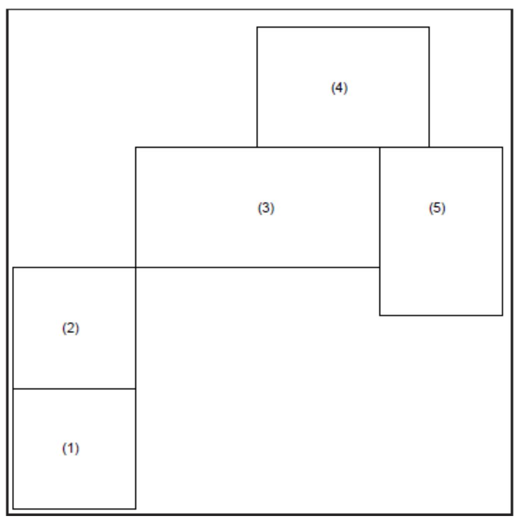
Dimana e_i^2 : galat untuk observasi ke-i

Z : matriks berukuran n x $(p + 1)$ yang berisi vektor yang sudah distandarkan (z) untuk setiap observasi

Pengambilan keputusan H_0 ditolak jika BP > $\chi^2_{\alpha,1}$.

2.7 Matriks Pembobot Spasial

LeSage (1999) menjelaskan ada beberapa metode yang dapat digunakan dalam menentukan matriks pembobot spasial, salah satunya adalah metode *Queen Contiguity* yang akan digunakan dalam penelitian ini. Metode *Queen Contiguity* mendefinisikan bahwa $\boldsymbol{W_{ij}} = 1$ jika lokasi bersinggungan sisi atau sudut dengan lokasi lainnya, sedangkan $\boldsymbol{W_{ij}} = 0$ jika tidak bersinggungan. Sebagai ilustrasi, Gambar 2.1 merupakan contoh pembentukan matriks pembobot spasial *Queen* dengan lima entitas atau area sebagai subjek pengamatan.



Gambar 1. Ilustrasi Pembobot Spasial

a. *Rook contiguity* ialah persentuhan sisi wilayah satu dengan sisi wilayah yang lain yang bertetanggaan. Pada Gambar 1, wilayah 1 bersentuhan dengan wilayah 2 sehingga **W12** = 1 dan yang lain 0 atau pada wilayah 3 bersentuhan dengan wilayah 4 dan 5 sehingga **W34** = 1, **W35** = 1 dan yang lain 0.

b. *Bishop contiguity* ialah persentuhan titik vertek wilayah satu dengan wilayah tetangga yang lain. Pada Gambar 1, wilayah 2 bersentuhan titik dengan wilayah 3 sehingga **W23** = 1 dan yang lain 0.

c. *Queen contiguity* ialah persentuhan baik sisi maupun titik vertek wilayah satu dengan wilayah yang lain yaitu gabungan *rook contiguity* dan *bishop contiguity*. Contoh **W32** = 1, **W34** = 1, **W35** =1 dan yang lain 0.

Berdasarkan ilustrasi pada Gambar 1 Matriks **W** yang merefleksikan *queen contiguity* adalah:

$$\boldsymbol{W}_{queen} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrik *Queen contiguity* atau *Rook contiguity* yang sudah diperoleh, dibentuk ke dalam bentuk matrik normalitas atau distandarisasi berdasarkan baris, yaitu matrik dimana jumlah dari setiap barisnya adalah satu, sehingga matrik normalitas dari matrik **W***queen* tersebut adalah:

$$\boldsymbol{W_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

2.8 Regresi Spasial

Berdasarkan hukum pertama tentang geografi Tobler yang berbunyi bahwa segala sesuatu saling berhubungan satu dengan lainnya, tetapi sesuatu yang berdekatan lebih berpengaruh daripada sesuatu yang jauh (Anselin, 1988). Hukum inilah yang menjadi dasar pengkajian masalah efek spasial yang dapat diselesaikan dengan regresi spasial. Regresi spasial merupakan metode yang memungkinkan untuk menghitung ketergantungan antar pengamatan, yang sering muncul ketika pengamatan dikumpulkan dari titik-titik yang ada didalam ruang (LeSage, 2009). Menurut LeSage (2011), berdasarkan tipe data, pemodelan spasial dapat dijadikan menjadi pemodelan dengan pendekatan titik dan pendekatan area. Berdasarkan jenis pendekatan area yaitu *Spatial Autoregressive Models* (SAR),*Spatial Error Models* (SEM), *Spatial Durbin Models* (SDM), *Conditional Autoregressive Models* (CAR), dan *Spatial Autoregressive Moving Avarage* (SARMA).

Bentuk umum persamaan model regresi spasial adalah:

$$Y = \rho W y + X\beta + u \tag{2.15}$$
$$u \cong \lambda W u + \varepsilon$$
$$\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$$

Dimana Y adalah vektor peubah respon ukuran $n\ x\ 1$, $\boldsymbol{W}$ adalah matriks pembobot spasial berukuran $n\ x\ n$, $\boldsymbol{X}$ adalah matriks peubah penjelas berukuran $n\ x\ (p+1)$, β adalah vektor koefisien parameter regresi yang berukuran $(p+1)\ x\ 1$, dan u adalah vektor galat yang diasumsikan mengandung autokorelasi yang berukuran $n\ x\ 1$. Sedangkan ρ adalah koefsien parameter lag spasial dan λ adalah koefisien autoregresi galat spasial yang bernilai $|\lambda| < 1$ (LeSage, 1999). Menurut Anselin (1998), jika nilai $\rho \neq 0$ dan $\lambda = 0$ maka model regresi spasial akan menjadi model spasial autoregresif (SAR) atau disebut juga *Spatial Lag Model* (SLM) dan jika nilai $\lambda \neq 0$ atau $\rho = 0$ maka model regresi spasial akan menjadi *Spatial Error Model* (SEM).

2.9 Autokorelasi Spasial

Autokorelasi spasial adalah korelasi antara variabel dengan dirinya sendiri berdasarkan ruang atau dapat juga diartikan suatu ukuran kemiripan dari objek di dalam suatu ruang (jarak, waktu dan wilayah). Jika terdapat pola sistematik di dalam penyebaran sebuah variabel, maka terdapat autokorelasi spasial. Adanya autokorelasi spasial mengindikasikan bahwa nilai atribut pada daerah tertentu terkait oleh nilai atribut tersebut pada daerah lain yang letaknya berdekatan atau bertetangga. Permulaan dari keacakan spasial mengindikasikan pola spasial seperti *clustered* (berkelompok), *dispersed* (menyebar), atau *random* (acak). Autokorelasi spasial positif mengindikasikan lokasi yang berdekatan mempunyai nilai yang mirip dan cenderung berkelompok. Autokorelasi spasial negatif mengindikasikan lokasi yang berdekatan mempunyai nilai yang berbeda dan cenderung menyebar,serta tidak ada autokorelasi spasial mengindikasikan pola lokasi acak (Lee dan Wong, 2001). Pengukuran Autokorelasi Spasial untuk data spasial area dapat dihitung menggunakan metode *Moran's I* (Indeks Moran), *Geary's c*, dan *Tango's excess* (Pfeiffer dkk, 2008).

2.10 Indeks Moran

Indeks Moran adalah sebuah tes statistik lokal untuk mengetahui nilai autokorelasi spasial, yang digunakan untuk mengidentifikasi suatu lokasi dari pengelompokkan spasial atau autokorelasi spasial. Autokorelasi spasial adalah korelasi antara variabel dengan dirinya sendiri berdasarkan ruang (Lembo, 2006). Perhitungan autokorelasi spasial menggunakan Indeks Moran dengan matriks pembobot **W** berdasarkan perkalian silang adalah sebagai berikut :

$$I = \frac{n \sum i \sum j \, W_{ij}(x_i - \bar{x})(x_j - \bar{x})}{\left(\sum i \neq j \, W_{ij}\right) \sum i (x_i - \bar{x})^2} \tag{2.16}$$

(Banerjee, 2004)

Nilai yang dihasilkan dalam perhitungan Indeks Moran berkisar antara -1 sampai dengan 1. Nilai indeks moran bernilai nol mengindikasikan tidak berkelompok, nilai indeks moran yang positif mengindikasikan autokorelasi spasial yang positif yang berarti lokasi yang berdekatan mempunyai nilai yang mirip dan cenderung berkelompok, dan nilai indeks moran yang negatif mengindikasikan autokorelasi spasial negatif yang berarti lokasi yang berdekatan mempunyai nilai yang berbeda (Pfeiffer dkk, 2008). Signifikansi Indeks Moran dapat ditaksir di bawah pendekatan normal. Uji signifikansi Indeks Moran dilakukan dengan pendekatan normal dengan ketentuan sebagai berikut :

i. Hipotesis

$H_0 : I = 0$ (tidak ada autokorelasi spasial)

$H_1 : I \neq 0$ (ada autokorelasi spasial)

ii. Tingkat Signifikansi α= 5 % =0,05

iii. Statistik Uji

$$Z(I) = \frac{I-\varepsilon(I)}{\sqrt{var(I)}} \sim N(0;1) \tag{2.17}$$

Dengan nilai harapan $E(I) = l_0 = -\frac{1}{n-1}$ (2.18)

Ragam untuk pendekatan normal (Banerjee, 2004)

$$Var(I) = \frac{n^2(n-1)S_1 - n(n-1)S_2 - 2S_0^2}{(n+1)(n-1)^2 S_0^2} \tag{2.19}$$

Dengan $S_0 = \sum_{i \neq j} W_{ij}$, $S_1 = \frac{1}{2}\sum_{i \neq j}(W_{ij} + W_{ji})^2$ (2.20)

$S_2 = \sum_k \left(\sum_j W_{kj} + \sum_i W_{ik}\right)^2$

iv. Daerah Kritis

dengan uji dua arah H_0 akan ditolak jika |Z (I)| > $Z_{(1-\alpha/2)}$ (2.21)

v. Kesimpulan

2.11 Uji *Lagrange Multiplier*

Uji *Lagrange Multiplier* (LM test) digunakan sebagai dasar untuk memilih model regresi spasial yang sesuai (LeSage, 2009:156). Uji *Lagrange Multiplier* terdiri dari LM lag dan LM error. LM lag digunakan untuk identifikasi *Spatial Autoregressive Model* dan LM error digunakan untuk identifikasi *Spatial Error Model*.
Apabila keduanya signifikan maka model yang sesuai adalah *Spatial Autoregressive Moving Average* (SARMA).

2.12 Ukuran Kebaikan Model

Ukuran kebaikan model regresi baik model regresi klasik maupun model regresi spasial dalam penelitian ini adalah *Akaike Information Criterion* (AIC). Jika nilai AIC suatu model lebih kecil dari model lainnya, model tersebut dikatakan lebih baik. Persamaan untuk AIC adalah sebagai berikut:

$$AIC = -2 \log (\textit{maximum likelihood}) + 2p \qquad (2.22)$$

dengan p adalah banyaknya parameter regresi (Akaike, 1974). Menurut metode AIC, regresi terbaik adalah model regresi yang mempunyai nilai AIC terkecil.

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Tempat dan Waktu Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester genap tahun akademik 2021/2022, bertempat di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Data Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini merupakan data sekunder tentang Jumlah Pengangguran dan Jumlah Pendapatan per kapita Provinsi Lampung tahun 2019 yang diperoleh dari website Badan Pusat Statistik (BPS) Lampung. Data tersebut kemudian akan diolah menggunakan bantuan *software* R dan GeoDa.

3.3 Metode Penelitian

Dalam penelitian ini akan dikaji karakteristik penduga *Spatial Error Model* dan menentukan model terbaik dari OLS dan GLS dengan melihat R^2 dan *Akaike's*

Information Criterion (AIC) dan adapun langkah-langkah yang perlu dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Menentukan model persamaan regresi spasial *error*.
2. Menentukan fungsi *log-likelihood* untuk gabungan vektor observasi y, berdasarkan sebaran normal baku gabungan pada vektor galat.
3. Menentukan pendugaan parameter pada model regresi spasial *error* dengan metode *Ordinary Least Square* (OLS) dengan mencari nilai dugaan parameter β.
4. Jika terdapat autokorelasi atau tidak terpenuhinya asumsi OLS maka dilakukan pendugaan parameter menggunakan model *Generalized Least Square* (GLS).
5. Menentukan sifat-sifat estimasitor unbias, efisien, dan konsisten.
6. Menentukan matriks pembobot spasial (**W**) *Queen Contiguity* dengan software GeoDa untuk mengetahui hubungan antar wilayah.
7. Melakukan uji dependensi spasial dan heterogenitas spasial.
8. Melakukan uji lanjut untuk mengetahui efek ketergantungan spasial yang terjadi dengan uji *Lagrange Multiplier*.
9. Melakukan pendugaan parameter, pengujian signifikan parameter dan uji asumsi regresi dari model *Spatial Error Model* (SEM) yang terbentuk.
$$Y = X\beta + u, \qquad u = \lambda W u + \varepsilon$$
10. Melakukan uji asumsi pada *Spatial Error Model* (asumsi residual identik, asumsi residual indpenden, dan asumsi residual berdistribusi normal).
11. Menentukan model regresi terbaik dengan R^2 dan *Akaike's Information Criterion* (AIC) dengan membandingkan nilai yang terkecil.
12. Menginterpretasikan model dan membuat kesimpulan dari hasil yang diperoleh.

V. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan, dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Penduga β pada model regresi merupakan penduga yang tak bias bagi β karena nilai harapannya sama dengan parameternya , penduga β memiliki ragam yang minimum atau efisien dan juga konsisten. Jadi untuk $\hat{\beta}$ dengan metode OLS dan GLS merupakan penduga yang tak bias terbaik, efisien dan konsisten.
2. Hasil estimasi dengan GLS memberikan estimasi parameter β_0 $\beta_0 = -9.97$, $\beta_1 = 6.67$, $\beta_2 = -4.02$ sehingga model yang terbentuk adalah
$$Y = 2.9813 - 9.97X_1 + 6.67X_2 - 4.02X_3 + \varepsilon_i$$
3. Hasil dari model SEM yang terbentuk adalah sebagai berikut :
$$\hat{Y}_i = 243.228 + 10.386X_{i1} + 0.634X_{i2} + 3.161X_{i3} - 0.586 \sum_{j=1, i\neq j}^{15} W_{ij}U_j$$
4. Model R^2 dan AIC dengan masing-masing nilai yaitu 0.777 dan 35.281 minimal yaitu terdapat pada model SEM. Sehingga model SEM lebih baik digunakan untuk menganalisis data Kemiskinan di Provinsi Lampung dibandingkan dengan model regresi dengan menggunakan metode OLS dan GLS. Berdasarkan hubungan antara Kemiskinan dengan Tingkat Pengangguran Terbuka (TPT), Realisasi Pendapatan dan Belanja Pemerintah dan Tingkat Partisipasi Angkatan Kerja (TPAK) dapat diartikan bahwa persamaan dan perbedaan karakteristik pada tiap sektor yang berdekatan dapat menimbulkan peningkatan atau penurunan Jumlah Kemiskinan di Provinsi Lampung.

DAFTAR PUSTAKA

Aditya, S.R., Hadijati, M., Switrayni, N.M. 2019. "Analisis Masalah Heteroskedastisitas Menggunakan *Generalized Least Square* dalam Analisis Regresi", Eigen Mathematics Journal, vol 02, no 02 (hlm. 66).

Akaike, H. 1974. *A New Look at Statistical Model Identification*. IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. 19, 328-347.

Anselin, L. 1988. *Spatial Econometrics: Methods and Models*. Kluwer Academic: Dordrecht.

Aziz, A. 2010. *EKONOMETRIKA (Teori dan Praktik Eksperimen dengan Matlab)*. UIN-Maliki Press.

Banerjee, S. 2004. *Hierarchical Modeling and Analysis for Spatial Data*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton.

Badan Pusat Statistik. 2019. *Data dan Informasi Kemiskinan Kabupaten/Kota Tahun 2019*, Jakarta. www.bps.go.id/publikasi. Diakses pada hari Senin, 28 Desember 2020 pukul 22.30 WIB.

Badan Pusat Statistik. 2019. *Pendapatan Provinsi Tahun 2019*, Jakarta. www.bps.go.id. Diakses pada hari Senin, 28 Desember 2020 pukul 22.30 WIB.

Badan Pusat Statistik. 2019. *Kemiskinan Provinsi Lampung Tahun 2019*, Jakarta. www.bps.go.id. Diakses pada hari Minggu, 30 Mei 2021 pukul 12.13 WIB

Lee, J., and Wong, D. W. 2001. *Statistical analysis with ArcView GIS.* Canada: John Wiley & Sons, Inc.

Lembo, A. J. 2006. *Spatial Autocorrelation*. Retrieved Oktober 25, 2008, from Cornel University Departement of Crop and Soil Sciences: http://www.css.cornell.edu/courses/620/lecture9.ppt.

LeSage, JP. 1999. *The Theory and Practice of Spatial Econometrics*. Toledo: Department of Economics University of Toledo.

LeSage, JP., Pace, R.K. 2009. *Introduction to Spatial Econometrics*. Texas State University San Marcos: CRC Press.

LeSage, JP. 2011. *Pitfallas In Higher Order Model Extensions of Basic Spatial Regression, Metodology*. Texas State University San Marcos: Departement of Finance and Econometrics.

Pfeiffer, U., Robinson, T.P., Stevenson, M., Stevens, K.B., Rogers, D.J., and Clements, A.C.A., 2008. *Spatial Analysis in Epidemologi*. New York: Oxford University Press.

Rahmawati, R., Safitri,D., and Fairuzdhiya, O.U. 2015. "Analisis Spasial Pengaruh Tingkat Pengangguran Terhadap Kemiskinan Di Indinesia (Studi Kasus Provinsi Jawa Tengah)". Media Statistika, vol. 8, no.1, pp. 23-30. Departement of Statistics Diponegoro University.

Safitri, D.W., Darsyah, M.Y., and Utami, T.W. 2014. “Pemodelan Spatial Error Model (SEM) Untuk Indeks Pembangunan Manusia (IPM) di Provinsi Jawa Tengah”. Jurnal Statistika, vol. 2, no. 2. Departement of Statistics Muhammadiyah Semarang University.

Suprapto, J. 2001. *Statistik Teori dan Aplikasi Edisi Keenam*. Jakarta: Erlangga.

Tobler, W. (1970). *"A computer movie simulating urban growth in the Detroit region"*. *Economic Geography*, 46(Supplement): 234–240.

Winarno, W.W. 2009. *Analisis Ekonometrika dan Statistika dengan eviews*. Yogyakarta: UPP STIM YKP.