PENERAPAN KONSEP HIMPUNAN *ROUGH* PADA STRUKTUR IDEAL SUATU RING

(Skripsi)

Oleh

ADHANIS TYA GARNIS

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2022

ABSTRACT

THE IMPLEMENTATION OF ROUGH SET ON A IDEAL STRUCTURE OF A RING

By

Adhanis Tya Garnis

Let (U, θ) be an approximation space where U non-empty set and θ is an equivalence relation on U. Equivalence relation is a relation that is reflective, symmetric and transitive which will form separate partitions called equivalence class. If X is a subset of U, then the equivalence class will form the upper approximation of X and the lower approximation of X. If the upper approximation of X and the lower approximation of X are not the same, then X is called a rough set. If two binary operations are defined, then X will form a rough ring if it meets certain conditions. If a non-empty set Y subset of X with two binary operations is given, then Y is called an rough ideal in the rough ring if it statisfies the conditions for rough right ideal and rough left ideal. Next, we give an example of the commutative rough ring and rough ideal on a finite set. In addition, we provide the properties of the rough ideal.

Keywords: *Approximation space, upper approximation, lower approximation, rough set, rough group, rough ring, rough ideal.*

ABSTRAK

PENERAPAN KONSEP HIMPUNAN *ROUGH* PADA STRUKTUR IDEAL SUATU RING

Oleh

Adhanis Tya Garnis

Diberikan pasangan (U, θ) merupakan ruang aproksimasi dengan U himpunan tak kosong dan θ adalah relasi ekuivalensi pada U. Relasi ekuivalensi merupakan relasi yang bersifat reflektif, simetris dan transitif yang akan membentuk partisi-partisi yang saling lepas yang disebut kelas ekuivalensi. Jika diberikan himpunan bagian X di U, maka kelas-kelas ekuivalensi akan membentuk aproksimasi atas dari X dan aproksimasi bawah dari X. Jika aproksimasi atas dari X dan aproksimasi bawah dari X tidak sama, maka X disebut himpunan *rough*. Jika didefinisikan dua operasi biner, X akan membentuk ring *rough* apabila memenuhi syarat-syarat tertentu. Jika diberikan himpunan tak kosong Y subhimpunan dari X dengan dua operasi biner, maka Y disebut ideal *rough* pada ring *rough* jika memenuhi syarat ideal kanan *rough* dan ideal kiri *rough*. Selanjutnya diberikan contoh konstruksi ring *rough* dan ideal *rough* komutatif pada himpunan berhingga. Selain itu, diberikan sifat-sifat ideal *rough* pada ring *rough*.

Kata kunci: *Ruang aproksimasi, aproksimasi atas, aproksimasi bawah, himpunan rough, grup rough, ring rough, ideal rough.*

PENERAPAN KONSEP HIMPUNAN *ROUGH* PADA STRUKTUR IDEAL SUATU RING

ADHANIS TYA GARNIS

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat Untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2022

Judul Skripsi : **PENERAPAN KONSEP HIMPUNAN *ROUGH* PADA STRUKTUR IDEAL SUATU RING**

Nama Mahasiswa : Adhanis Tya Garnis

Nomor Pokok Mahasiswa : 1867031001

Program Studi : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.	**Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.**
NIP 19840627 200604 2 001	NIP 19800206 200312 1 003

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	: **Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.**	....
Sekretaris	: **Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	: **Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, M.T.
NIP 19740705 200003 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **28 April**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: **Adhanis Tya Garnis**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1867031001**
Jurusan	: **Matematika**
Judul Skripsi	: **Penerapa Konsep Himpunan *Rough* pada Struktur Ideal Suatu Ring**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 28 April 2022

Penulis

Adhanis Tya Garnis

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Adhanis Tya Garnis lahir di Gedongtataan pada tanggal 17 Maret 2000. Penulis merupakan anak kedua dari dua bersaudara yang lahir dari pasangan Nastino dan Sumini.

Penulis menempuh awal pendidikan di TK Dharma Wanita Bumi Dipasena Sejahtera pada tahun 2004 sampai tahun 2006. Kemudian, penulis melanjutkan pendidikan sekolah dasar di SD Negeri 1 Bumi Dipasena Sejahtera pada tahun 2006 sampai tahun 2009 dan melanjutkan di SD Negeri 1 Karang Anyar pada tahun 2009 sampai tahun 2012. Selanjutnya, penulis melanjutkan pendidikan Sekolah Menengah Pertama di SMP Negeri 1 Gedongtataan pada tahun 2012 sampai tahun 2015. Penulis melanjutkan Sekolah Menengah Atas di SMA Negeri 1 Gedongtataan pada tahun 2015 sampai tahun 2018.

Pada tahun 2018, penulis terdaftar sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur prestasi khusus. Penulis aktif mengikuti kegiatan beladiri taekwondo sejak penulis SMP sampai sekarang dan banyak mengikuti kegiatan perlombaan. Selain itu, penulis juga tergabung dalam kepengurusan organisasi taekwondo Provinsi Lampung.

Sebagai penerapan ilmu yang didapat, pada awal semester VI penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Badan Pendapatan Daerah Kabupaten Pesawaran Provinsi Lampung selama 40 hari. Kemudian, pada semester VII penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata di Desa Wiyono, Kecamatan Gedongtataan, Kabupaten Pesawaran pada tanggal 1 Agustus 2021 sampai dengan 10 September 2021.

KATA INSPIRASI

"Maka sesungguhnya bersama kesulitan itu ada kemudahan"

(Q.S. Al-Insyirah:5)

"Seribu orang tua bisa bermimpi, tetapi satu pemuda bisa mengubah dunia"

(Ir. Soekarno)

"Perjalanan seribu mill dimulai dengan satu langkah"

(Lao Tzu)

"Seperti sebuah cerita, begitulah hidup. Tidak lama, tetapi seberapa bagus ceritanya itulah yang terpenting"

(J.K Rowling)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirobbil'alamin
Dengan mengucapkan puji dan syukur atas kehadirat Allah Subhanahu Wata'ala karena limpahan nikmat dan karunia-Nya sehingga skripsi ini dapat diselesaikan. Tak lupa shalawat beserta salam selalu tercurah kepada junjungan kita Nabi Muhammad Shallallahu 'Alaihi Wasallam.

Dengan penuh syukur dan ketulusan, kupersembahkan karya sederhana ini untuk:

Ayah dan Ibu

Terima kasih telah menjadi sosok yang selalu kuandalkan, telah memberikan pengorbanan, kasih sayang yang tiada henti dan dukungan atas segala keputusan yang kuambil. Menjadi rumah ternyaman sejauh apapun aku melangkah pergi dan sekeras apapun aku menghadapi dunia.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terima kasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang telah sangat berjasa dalam membantu, memberi masukan dan arahan, serta ilmu yang sangat bermanfaat.

Kakakku Tersayang

Terima kasih untuk dukungan yang mba berikan dan menemaniku setiap bimbingan. Semoga karya ini membuat mba bangga dan kita menjadi orang sukses serta membanggakan ayah dan ibu.

Almamater Tercinta Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillahirabbilalamin, puji syukur senantiasa penulis hanturkan kepada Allah SWT, yang selalu memberi nikmatnya sehingga penulis dapat menyusun skripsi dengan judul “ Penerapan Konsep Himpunan *Rough* pada Struktur Ideal Suatu Ring” dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang ditargetkan.

Dalam penyusunan skripsi ini, banyak sekali pihak yang telah membantu penulis dalam memberikan bimbingan, dorongan, semangat, motivasi dan saran yang membangun. Pada kesempatan ini penulis menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Allah SWT atas segala nikmatnya yang telah diberikan sehingga penulis bisa beraktifitas dengan baik dan lancar.
2. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc. selaku dosen Pembimbing I yang telah memberikan arahan, saran dan bimbingan dalam proses penyelesaian skripsi ini.
3. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc. selaku dosen Pembimbing II yang telah memberikan arahan, saran dan bimbingan dalam proses penyelesaian skripsi ini.
4. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, MA., Ph.D. selaku dosen Penguji yang telah memberikan kritik dan saran serta evaluasi yang membangun kepada penulis agar dapat menjadi lebih baik lagi.
5. Bapak Amanto, S.Si.,M.Si. selaku dosen Pembimbing Akademik yang telah memberikan pengarahan dan bimbingan selama perkuliahan.
6. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universita Lampung.
7. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

8. Guru TK, SD, SMP dan SMA yang telah mengajarkan, membimbing, sampai bisa menduduki bangku perkuliahan.
9. Ayah, ibu dan kakak yang selalu mendoakan dan mendukung penulis.
10. Sahabat penulis Juliana dan Sulistian yang selalu menemani suka maupun duka.
11. Teman-teman satu bimbingan yang telah memberikan semangat maupun saran kepada penulis.
12. Teman-teman seperjuangan Jurusan Matematika angkatan 2018.

Semoga Allah SWT melimpahkan karunia-Nya dan memberikan kemudahan serta kebaikan kepada pihak-pihak yang telah membantu penulis. Penulis menyadari sepenuhnya bahwa skripsi ini masih memiliki banyak kekurangan baik dari segi materi maupun teknisnya. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi para pembacanya.

Bandar Lampung, 17 Maret 2022
Penulis,

Adhanis Tya Garnis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Halaman

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Teori himpunan *rough* (*rough set theory*) merupakan teori himpunan pada matematika yang dikenalkan oleh Zdzislaw Pawlak pada tahun 1982 untuk pertama kali. Himpunan *rough* ini digunakan dalam menangani masalah yang bersifat ketidakjelasan dan ketidakpastian. Banyak peneliti yang telah mengkaji tentang teori himpunan *rough*, seperti penelitian yang dilakukan oleh Jerzy W. Grzymala-Busse pada tahun 2005 yang membahas mengenai himpunan *rough* dan penerapannya pada *data mining*, serta penelitian tentang implementasi teori himpunan *rough* pada struktur aljabar seperti penelitian yang dilakukan oleh Nabuaki Kuroki tahun 1997 tentang ideal *rough* pada semigrup. Penelitian oleh Davvaz tahun 2004 tentang ring *rough* dan sifat-sifatnya dan penelitian oleh Miao dkk., pada tahun 2005 yang mempelajari tentang grup *rough*, subgrup *rough*, dan sifat-sifatnya. Selain itu, penelitian juga dilakukan oleh Isaac dan Neelima pada tahun 2013 tentang ideal *rough*, serta berbagai penelitian lainnya.

Konsep dasar dari teori himpunan *rough* oleh Pawlak adalah relasi ekuivalensi. Menurut Barnier dan Feldman tahun 1990, relasi ekuivalensi merupakan relasi yang bersifat reflektif, simetris, dan transitif yang akan membentuk kelas-kelas ekuivalensi. Kelas ekuivalensi akan menentukan aproksimasi atas dan aproksimasi bawah suatu himpunan bagian dari himpunan semesta. Pasangan (U,θ) disebut ruang aproksimasi jika U merupakan suatu himpunan tak kosong dan θ adalah relasi ekuivalensi dari U. Jika X subhimpunan dari U, aproksimasi bawah dari X yang dinotasikan dengan $\underline{X}$, pada ruang aproksimasi (U,θ) merupakan gabungan dari kelas ekuivalensi yang terdapat dalam X, sedangkan aproksimasi atas dari X yang dinotasikan dengan $\overline{X}$ pada ruang aproksimasi (U,θ) merupakan gabungan dari kelas-kelas ekuivalensi yang irisannya dengan X

bukan merupakan himpunan kosong. Jika $\overline{X} - \underline{X} \neq \emptyset$, himpunan X disebut himpunan *rough*.

Penelitian ini akan membahas penerapan konsep himpunan *rough* pada struktur aljabar, yaitu struktur ideal pada suatu ring. Ring merupakan himpunan tak kosong R yang dilengkapi dua operasi biner "$+$" dan "$\cdot$" pada himpunan yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Dalam konsep ideal, dikatakan ideal di ring $\langle R, +, \cdot \rangle$ jika memenuhi sifat-sifat ideal kanan dan ideal kiri. Pada penelitian ini juga dibahas sifat-sifat dari struktur ideal *rough* pada ring *rough*.

1.2 Tujuan

Berdasarkan latar belakangnya, tujuan dari penelitian ini adalah menerapkan teori himpunan *rough* dalam mengkonstruksi struktur ideal suatu ring dari ruang aproksimasi. Selain itu, akan diselidiki sifat-sifat dari ideal *rough* dan kaitan antara ideal ring dan ideal *rough* pada ring *rough*.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini yang diharapkan dapat berguna bagi pembaca yaitu sebagai berikut:

1. memberikan pengetahuan mengenai konsep ideal *rough* serta sifat-sifatnya,
2. mengembangkan wawasan penerapan himpunan *rough* dalam membangun struktur ideal ring,
3. menjadikan tulisan ini sebagai referensi dan sarana pembelajaran untuk mempelajari penerapan himpunan *rough* dalam membangun struktur ideal ring.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Himpunan

Himpunan merupakan kumpulan benda-benda atau objek-objek yang dapat didefinisikan dengan jelas, sehingga dengan tepat dapat diketahui objek yang termasuk himpunan dan yang tidak termasuk dalam himpunan tersebut (Nuharini dan Wahyuni, 2008).

Selain itu, berikut diberikan definisi himpunan menurut Wibisono (2008).

Definisi 2.1.1 Himpunan merupakan kumpulan objek-objek yang berbeda tetapi dalam satu sisi dapat dikelompokkan menjadi suatu kesatuan. Objek-objek ini disebut anggota atau elemen himpunan. Himpunan dinotasikan dengan huruf kapital seperti A, B, C, … dan anggota himpunan dinotasikan dengan angka atau huruf kecil seperti a, b, c, …(Wibisono, 2008).

Berikut ini akan diberikan beberapa operasi terhadap himpunan (Setiadji, 2009).

a. Gabungan dari dua himpunan A dan B, dinotasikan dengan $A \cup B$ adalah $A \cup B = \{x \mid x \in A$ atau $x \in B\}$.
b. Irisan dari dua himpunan A dan B, dinotasikan dengan $A \cap B$ adalah $A \cap B = \{x \mid x \in A$ dan $x \in B\}$.
c. Selisih dari dua himpunan A dan B, dinotasikan dengan $A - B$ adalah $A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$.

Beberapa contoh sederhana dari himpunan antara lain: kumpulan bilangan bulat positif, kumpulan kabupaten di Provinsi Lampung, dan lain-lain. Adapun contoh yang bukan merupakan himpunan yaitu: kumpulan cerita-cerita komik yang menarik karena suatu karya mungkin dikatakan menarik oleh seseorang namun belum tentu menarik menurut orang lain. Berikut adalah contoh lain dari suatu himpunan.

Contoh 2.1.1

Misal A merupakan himpunan bilangan prima kurang dari 15. Himpunan A dapat ditulis $A = \{a|a < 15, a$ bilangan prima$\}$, sehingga $A = \{2,3,5,7,11,13\}$.

Selanjutnya akan diberikan definisi dan contoh mengenai macam-macam himpunan yaitu kardinalitas himpunan, himpunan kosong, himpunan semesta, himpunan bagian, dan himpunan kuasa.

Berikut definisi dari kardinalitas himpunan.

Definisi 2.1.2 Kardinalitas dari suatu himpunan adalah jumlah elemen di dalam himpunan tersebut. Kardinalitas dari himpunan A dinotasikan dengan (A) atau $|A|$ (Wibisono, 2008).

Selanjutnya diberikan contoh kardinalitas himpunan.

Contoh 2.1.2

Diberikan himpunan $A = \{2,3,5,7,11,13\}$. Kardinalitas dari himpunan A adalah 6, dinotasikan dengan $|A| = 6$.

Berikut ini diberikan definisi mengenai himpunan kosong (*null set*).

Definisi 2.1.3 Himpunan dengan kardinalitas 0 disebut dengan himpunan kosong. Himpunan kosong dinotasikan dengan $\emptyset$ atau { } (Wibisono, 2008).

Selanjutnya diberikan contoh himpunan kosong.

Contoh 2.1.3

Diberikan himpunan A, dengan A merupakan himpunan bilangan asli yang kurang dari 1. Karena bilangan asli mulai dari 1, dapat disimpulkan bahwa A merupakan himpunan kosong atau $A = \emptyset$.

Berikut ini didefinisikan himpunan semesta (*universal set*).

Definisi 2.1.4 Semua himpunan yang ditinjau adalah subhimpunan dari sebuah himpunan tertentu disebut himpunan semesta. Dengan kata lain himpunan semesta adalah himpunan dari semua objek yang berbeda. Himpunan semesta dinotasikan dengan U (Wibisono, 2008).

Selanjutnya, diberikan contoh himpunan semesta.

Contoh 2.1.4

Jika U merupakan himpunan seluruh tangga nada, maka $U = \{$Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si$\}$.

Definisi membahas mengenai himpunan bagian (*subset*) dari suatu himpunan.

Definisi 2.1.5 Himpunan A dikatakan himpunan bagian B jika dan hanya jika semua elemen-elemen di A adalah elemen himpunan B, dinotasikan dengan $A \subseteq B$ (Wibisono, 2008).

Selanjutnya, diberikan contoh himpunan bagian.

Contoh 2.1.5

Diberikan himpunan A yang merupakan himpunan bilangan asli dan B adalah himpunan bilangan asli positif. Himpunan B merupakan himpunan bagian dari A atau $B \subseteq A$.

Berikut adalah definisi himpunan kuasa (*power set*).

Definisi 2.1.6 Himpunan kuasa dari himpunan A adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian dari A, termasuk himpunan kosong dan himpunan A itu sendiri. Himpunan kuasa dari suatu himpunan A dinotasikan sebagai $P(A)$. Apabila himpunan A terdiri dari n anggota, maka banyaknya anggota dari himpunan kuasa dari himpunan A adalah 2^n (Munir, 2005).

Selanjutnya diberikan contoh himpunan kuasa.

Contoh 2.1.6

Diberikan himpunan $A = \{2,3,5\}$, diperoleh $|A| = 3$. Oleh karena itu, $P(A) = 2^3 = 8$. Dengan demikian, himpunan kuasa dari himpunan A yaitu:
$P(A) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{2,3\}, \{2,5\}, \{3,5\}, \{2,3,5\}\}$.

2.2 Grup

Untuk membahas definisi grup, sebelumnya dibahas terlebih dahulu mengenai definisi operasi biner sebagai dasar pembentukan grup. Berikut diberikan definisi operasi biner.

Definisi 2.2.1 Diberikan himpunan tak kosong S dan $a, b \in S$. Operasi biner "$*$" pada himpunan S merupakan pemetaan yang didefinisikan sebagai $*: S \times S \to S$ sehingga $(a * b) \in S \times S$ untuk setiap $a, b \in S$ (Ayres dan Jaisingh, 2004).

Untuk lebih memahami Definisi 2.2.1, diberikan contoh operasi biner sebagai berikut.

Contoh 2.2.1

Diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$. Operasi penjumlahan $(+)$ pada $\mathbb{Z}$ merupakan operasi biner, karena operasi $+$ dapat dinyatakan sebagai fungsi dari $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ yaitu untuk setiap $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ maka $a + b \in \mathbb{Z}$. Dengan kata lain, operasi $+$ tertutup di $\mathbb{Z}$.

Operasi pembagian $(:)$ bukan operasi biner pada $\mathbb{Z}$, karena terdapat $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sehingga $a : b \notin \mathbb{Z}$. Hal ini menunjukkan operasi biner $(:)$ tidak tertutup di $\mathbb{Z}$. Sebagai contoh $(4,7) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tetapi $4 : 7 \notin \mathbb{Z}$.

Menurut Herstein tahun 1975, sistem matematika merupakan himpunan yang dilengkapi dengan satu operasi biner. Sistem matematika menjadi pengantar dalam pembahasan pada grup. Berikut diberikan definisi dari semigrup.

Definisi 2.2.4 Himpunan tak kosong S bersama operasi biner $*$ disebut semigrup jika:

1. untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $a * b \in S$ (S bersifat tertutup di operasi biner $*$),
2. untuk setiap $a, b, c \in S$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$ (S bersifat asosiatif) (Howie, 1976).

Selanjutnya diberikan contoh semigrup.

Contoh 2.2.4

Sistem matematika $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ merupakan semigrup karena:

1. untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ berlaku $a + b \in \mathbb{Z}$ (memenuhi sifat tertutup),
2. untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$ berlaku $a + (b + c) = (a + b) + c$ (memenuhi sifat asosiatif).

Setelah memahami definisi dari operasi biner, selanjutnya akan diberikan definisi mengenai grup.

Definisi 2.2.2 Sistem matematika $\langle G,* \rangle$ disebut grup jika memenuhi:

1. untuk setiap $a, b \in G$, berlaku $a * b \in G$ (G bersifat tertutup terhadap operasi "$*$");
2. untuk setiap $a, b, c \in G$, berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$ (G bersifat asosiatif terhadap operasi "$*$");
3. untuk setiap $a \in G$, terdapat $e \in G$ yang memenuhi $a * e = e * a = a$, (e disebut elemen identitas di G);
4. untuk setiap $a \in G$ terdapat $-a$ di G yang memenuhi $a * (-a) = (-a) * a = e$ ($-a$ disebut invers dari a di G) (Herstein, 1975).

Grup dinotasikan dengan $\langle G,* \rangle$, dengan G merupakan himpunan tak kosong dan "$*$" merupakan operasi biner pada G.

Berikut ini diberikan contoh grup.

Contoh 2.2.2

Diberikan suatu himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dan $+$ merupakan operasi biner pada $\mathbb{Z}$, berikut akan ditunjukkan $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ merupakan grup.

1. Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$, berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$.
2. Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ terdapat $e = 0$, sehingga $a + e = a + 0 = 0 + a = e + a = a$. Oleh karena itu, 0 adalah elemen identitas terhadap operasi $+$ di $\mathbb{Z}$.
3. Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ terdapat $-a \in \mathbb{Z}$, sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$. Oleh karena itu, $-a$ adalah elemen invers di $\mathbb{Z}$.

Karena $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ memenuhi semua aksioma grup, maka $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ merupakan grup.

Setelah diberikan definisi dan contoh grup selanjutnya diberikan definisi grup komutatif.

Definisi 2.2.3 Diberikan grup $\langle G, * \rangle$. Jika untuk setiap $a, b \in G$, berlaku $a * b = b * a$, maka grup G dikatakan grup komutatif (Arifin, 2000).

Berikut diberikan contoh grup komutatif.

Contoh 2.2.3

Diketahui grup $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ dengan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat. Untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$, berlaku $a + b = b + a$. Oleh karena itu, $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ merupakan grup komutatif.

Selanjutnya diberikan definisi subgrup.

Definisi 2.2.5 Himpunan bagian tak kosong H dari suatu grup G dikatakan subgrup dari G jika H membentuk grup terhadap operasi yang sama pada grup G (Herstein, 1975).

Berikut diberikan contoh subgrup untuk lebih memahami Definisi 2.2.5.

Contoh 2.2.5

Diberikan grup $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$. Didefinisikan $7\mathbb{Z} = \{7n | n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}$, yaitu himpunan semua bilangan bulat kelipatan 7. Diperoleh $\langle 7\mathbb{Z}, + \rangle$ merupakan grup. Oleh karena itu, $7\mathbb{Z}$ merupakan subgrup dari $\mathbb{Z}$.

2.3 Ring

Setelah memahami definisi dari semigrup, grup dan subgrup, selanjutnya dibahas definisi dari ring dan diberikan contohnya agar dapat lebih memahami teori ring. Berikut diberikan definisi ring.

Definisi 2.3.1 Diberikan himpunan tak kosong R. Himpunan R bersama dengan dua operasi biner " $+$ " dan " $\cdot$ " disebut ring jika memenuhi aksioma berikut.

i. $\langle R, + \rangle$ merupakan grup komutatif, yaitu:
   1. untuk setiap $a, b \in R$, berlaku $a + b \in R$ (bersifat tertutup di operasi $+$);
   2. untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku $a + (b + c) = (a + b) + c$ (bersifat asosiatif di operasi $+$);
   3. untuk setiap $a \in R$, terdapat $e \in R$ sedemikian sehingga $a + e = e + a = a$ (e merupakan elemen identitas terhada operasi $+$ di R);
   4. untuk setiap $a \in R$ terdapat elemen $-a \in R$ sedemikian sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$ ($(-a)$ adalah elemen invers);
   5. untuk setiap $a, b \in R$, berlaku $a + b = b + a$.

ii. $\langle R, \cdot \rangle$ merupakan semigrup, yaitu:
   1. untuk setiap $a, b \in R$, berlaku $a \cdot b \in R$ (bersifat tertutup di operasi $\cdot$);
   2. untuk setiap $a, b, c \in R$, berlaku $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (bersifat asosiatif di operasi $\cdot$).

iii. Untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku:
   1. $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ (sifat distributif kiri)
   2. $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ (sifat distributif kanan) (Herstein, 1986).

Ring dinotasikan dengan $\langle R,+,\cdot\rangle$, dengan R merupakan himpunan tak kosong dan operasi " $+$ " , " $\cdot$ " merupakan operasi biner pada R.

Untuk lebih memahami definisi ring berikut diberikan contohnya.

Contoh 2.3.1

Diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dengan $(+)$ adalah operasi penjumlahan dan $(\cdot)$ adalah operasi perkalian, maka berdasarkan Definisi 2.3.1, dapat diselidiki bahwa:

i. $\langle \mathbb{Z},+\rangle$ merupakan grup komutatif, yaitu:
   1. untuk setiap $a,b \in \mathbb{Z}$, berlaku $a+b \in \mathbb{Z}$ (bersifat tertutup di operasi $+$);
   2. untuk setiap $a,b,c \in \mathbb{Z}$ berlaku $a+(b+c)=(a+b)+c$ (bersifat asosiatif di operasi $+$);
   3. untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$, terdapat $0 \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $a+0=0+a=a$ (0 merupakan elemen identitas terhada operasi $+$ di $\mathbb{Z}$);
   4. untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ terdapat elemen $-a \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $a+(-a)=(-a)+a=0$ ($(-a)$ adalah elemen invers);
   5. untuk setiap $a,b \in \mathbb{Z}$, berlaku $a+b=b+a$.

ii. $\langle \mathbb{Z},\cdot\rangle$ merupakan semigrup, yaitu:
   1. untuk setiap $a,b \in \mathbb{Z}$, berlaku $a \cdot b \in \mathbb{Z}$ (bersifat tertutup di operasi $\cdot$);
   2. untuk setiap $a,b,c \in \mathbb{Z}$, berlaku $(a \cdot b)\cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (bersifat asosiatif di operasi $\cdot$).

iii. Untuk setiap $a,b,c \in \mathbb{Z}$, berlaku:
   1. $a \cdot (b+c) = (a \cdot b)+(a \cdot c)$ (sifat distributif kiri)
   2. $(a+b)\cdot c = (a \cdot c)+(b \cdot c)$ (sifat distributif kanan)

Karena $\langle \mathbb{Z},+,\cdot\rangle$ memenuhi aksioma ring, $\mathbb{Z}$ merupakan ring.

Selanjutnya akan dibahas mengenai jenis-jenis ring yaitu ring dengan elemen satuan dan ring komutatif. Berikut definisi ring dengan elemen satuan.

Definisi 2.3.2 Diberikan ring $\langle R,+,\cdot\rangle$. Jika untuk setiap $a \in R$ dan terdapat $e \in R$, berlaku $a \cdot e = e \cdot a = a$. Oleh karena itu, e disebut identitas di R.

Dengan demikian, ring yang memuat elemen identitas disebut ring dengan elemen satuan (Arifin, 2000).

Berikut ini diberikan contoh ring dengan elemen satuan.

Contoh 2.3.2

Diberikan $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ ring dengan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat. Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ terdapat $1 \in \mathbb{Z}$, berlaku $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, yang berarti terdapat elemen identitas di $\mathbb{Z}$. Jadi, $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ merupakan ring dengan elemen satuan.

Berikut ini diberikan definisi ring komutatif.

Definisi 2.3.3 Suatu ring $\langle R, +, \cdot \rangle$ dikatakan ring komutatif jika dan hanya jika operasi kedua $(\cdot)$ bersifat komutatif di R (Arifin, 2000).

Diberikan contoh ring komutatif sebagai berikut.

Contoh 2.3.3

Diberikan ring $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ dengan $\mathbb{Z}$ merupakan himpunan bilangan bulat. Untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$, berlaku $a \cdot b = b \cdot a$. Oleh karena itu, operasi $(\cdot)$ bersifat komutatif di $\mathbb{Z}$. Dengan demikian, $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ merupakan ring komutatif.

2.4 Subring

Setelah diberikan definisi mengenai ring, selanjutnya diberikan definisi subring. Berikut diberikan definisi subring.

Definisi 2.4.1 Diberikan himpunan tak kosong $S \subseteq R$, dengan $\langle R, +, \cdot \rangle$ merupakan ring. S dikatakan subring dari R jika dan hanya jika S merupakan suatu ring terhadap operasi yang sama dengan R (Hartley dan Hawkes, 1970).

Definisi 2.4.2 Diberikan ring $\langle R, +, \cdot \rangle$ dan himpunan $S \subseteq R$. S disebut subring dari R apabila untuk setiap $a, b \in S$, berlaku:

1. $S \neq \emptyset$,

2. $a - b \in S$,
3. $a \cdot b \in S$.

Oleh karena itu, syarat-syarat tersebut sudah memenuhi syarat dari suatu subring. Karena S merupakan himpunan bagian dari R $(S \subseteq R)$, maka S merupakan subring dari R.

Berikut diberikan contoh subring.

Contoh 2.4.2

Diberikan $\langle \mathbb{Z}_6, +, \cdot \rangle$ merupakan suatu ring. Akan ditunjukkan bahwa $S = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ subring dari $\mathbb{Z}_6$.

1. $S \neq \emptyset$, syarat terpenuhi karena $S = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$.
2. Untuk setiap $a, b \in S$, berlaku $a -_6 b \in S$. Berdasarkan Tabel 2.4.1 dapat dilihat bahwa $a -_6 b \in S$. Oleh karena itu, untuk setiap $a, b \in S$, $a -_6 b \in S$.

Tabel 2.4.1. Tabel *Cayley* $a - b$ modulo 6 pada operasi penjumlahan

$a -_6 b$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$

3. Untuk setiap $a, b \in S$, berlaku $a \cdot_6 b \in S$. Berdasarkan Tabel 2.4.2 dapat dilihat bahwa $a \cdot_6 b \in S$. Oleh karena itu, untuk setiap $a, b \in S$, $a \cdot_6 b \in S$.

Tabel 2.4.2. Tabel *Cayley* perkalian modulo 6 pada S

$\cdot_6$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$

Dari (1),(2) dan (3) terbukti $S = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ adalah subring dari $\mathbb{Z}_6$.

Berikut diberikan sifat subring.

Teorema 2.4.3 Jika S_1 dan S_2 merupakan subring dari ring R maka $S_1 \cap S_2$ juga merupakan subring dari R.

Bukti.

Diketahui R merupakan ring, dan S_1, S_2 subring dari R. Akan ditunjukkan $S_1 \cap S_2 \subseteq R$.

1. Karena S_1 dan S_2 subring dari R maka $0 \in S_1$ dan $0 \in S_2$.
   Jadi, $0 \in S_1 \cap S_2$, sehingga $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$.
2. Diberikan sebarang $a, b \in S_1 \cap S_2$, sehingga $a \in S_1$, $a \in S_2$ dan $b \in S_1$, $b \in S_2$. Karena S_1 dan S_2 subring, maka $a - b \in S_1$ dan $a - b \in S_2$.
   Oleh karena itu, $a - b \in S_1 \cap S_2$, untuk setiap $a, b \in S_1 \cap S_2$.
3. Diberikan sebarang $a, b \in S_1 \cap S_2$, sehingga $a \in S_1$, $a \in S_2$ dan $b \in S_1$, $b \in S_2$. Karena S_1 dan S_2 subring, maka $ab \in S_1$ dan $ab \in S_2$.
   Oleh karena itu, $ab \in S_1 \cap S_2$, untuk setiap $a, b \in S_1 \cap S_2$.

Jadi, terbukti bahwa $S_1 \cap S_2$ merupakan subring dari R. ■

2.5 Ideal

Pembahasan selanjutnya adalah ideal pada suatu ring. Berikut definisi ideal pada ring.

Definisi 2.5.1 Diberikan $\langle R, +, \cdot \rangle$ suatu ring dan $I \subseteq R$ dengan $I \neq \emptyset$. Himpunan I dikatakan ideal kanan dan ideal kiri dari R jika:

i. I subgrup dari R terhadap operasi penjumlahan,
ii. untuk setiap $a \in I$ dan $r \in R$ berlaku $ar \in I$ dan $ra \in I$ (Herstein, 1975).

Berikut adalah contoh ideal pada ring.

Contoh 2.5.1

Misalkan $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ merupakan ring. Akan ditunjukkan bahwa $R = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ merupakan suatu ideal. Karena untuk setiap $a \in I$ dan $r \in R$ berlaku $ar \in I$ dan $ra \in I$, maka terbukti bahwa R merupakan ideal dari $\mathbb{Z}_4$.

Selanjutnya diberikan definisi ideal utama, ideal prima dan ideal maksimal. Berikut definisi ideal utama.

Definisi 2.5.2 Diberikan himpunan tak kosong U merupakan ideal pada ring R yang dibangun oleh satu elemen di R disebut ideal utama (Raisinghania dan Aggarwal, 1980).

Diberikan contoh ideal utama sebagai berikut.

Contoh 2.5.2

Diberikan ring $\mathbb{Z}$. Ideal $n\mathbb{Z}$ di $\mathbb{Z}$ merupakan ideal utama.

Berikut adalah definisi ideal prima.

Definisi 2.5.3 Diberikan himpunan tak kosong U merupakan ideal dari ring komutatif R, himpunan U disebut ideal prima jika untuk setiap $U \neq R$ dan $ab \in U$, maka $a \in U$ atau $b \in U$ (Raisinghania dan Aggarwal, 1980).

Diberikan contoh ideal prima sebagai berikut.

Contoh 2.5.3

Diketahui $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ merupakan ring dengan $\langle \{0\}, +, \cdot \rangle$ suatu ideal prima di $\mathbb{Z}$. $U = p\mathbb{Z}$ adalah ideal prima dengan p adalah bilangan prima. Diberikan $2\mathbb{Z}$ dan $3\mathbb{Z}$ merupakan ideal prima sedangkan $4\mathbb{Z}$ bukan merupakan ideal prima karena $4 = 2 \times 2 \in 4\mathbb{Z}$, tetapi $2 \notin 4\mathbb{Z}$.

Selanjutnya diberikan definisi mengenai ideal maksimal.

Definisi 2.5.4 Diberikan himpunan tak kosong U suatu ideal pada ring R. Ideal U disebut ideal maksimal R jika $U \neq R$ dan jika terdapat ideal sejati V dari R sehingga $U \subseteq V \subseteq R$ maka $V = U$ atau $V = R$ (Adkinds dan Weintraub, 1992).

Di bawah ini diberikan contoh ideal maksimal.

Contoh 2.5.4

Diberikan ring $R = \langle \mathbb{Z}_{12}, +, \cdot \rangle$ maka ideal maksimalnya adalah $\{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$ dan $\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\}$.

2.6 Relasi Ekuivalensi

Sebelum membahas definisi relasi ekuivalensi, terlebih dahulu dibahas mengenai definisi relasi. Secara bahasa, relasi merupakan hubungan. Namun dalam ilmu matematika, definisi dari relasi adalah sebagai berikut:

Definisi 2.6.1 Relasi θ dari suatu himpunan S adalah himpunan bagian dari $S \times S = \{(a, b) : a, b \in S\}$. Dengan kata lain, suatu relasi θ atas suatu himpunan S merupakan aturan yang menghubungkan elemen dari himpunan S ke elemen himpunan S itu sendiri (Suwilo dkk., 1987).

Berikut diberikan contoh relasi.

Contoh 2.6.1

Diberikan himpunan $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Relasi θ pada himpunan A didefinisikan sebagai berikut:

$\theta = \{(a, b) \in A \times A | a < b\}$, sehingga diperoleh $\theta = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (1,8), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (2,7), (2,8), (3,4), (3,5), (3,6), (3,7), (3,8), (4,5), (4,6), (4,7), (4,8), (5,6), (5,7), (5,8), (6,7), (6,8), (7,8)\}$.

Setelah memahami definisi relasi, selanjutnya dibahas definisi relasi ekuivalensi.

Definisi 2.6.2 Relasi θ pada himpunan A disebut relasi ekuivalensi jika dan hanya jika θ mempunyai sifat refleksif, simetris dan transitif.

a. Relasi θ pada himpunan A disebut refleksif jika dan hanya jika $a\theta a$ untuk setiap $a \in A$.
b. Relasi θ pada himpunan A disebut simetris jika dan hanya jika $a\theta b$ berakibat $b\theta a$, untuk setiap $a, b \in A$.
c. Relasi θ pada himpunan A disebut transitif jika dan hanya jika $a\theta b$ dan $b\theta c$ berakibat $a\theta c$, untuk setiap $a, b, c \in A$ (Barnier dan Feldman, 1990).

Hal yang dilakukan untuk menentukan relasi ekuivalensi adalah memeriksa apakah relasi tersebut memiliki sifat refleksif, simetris, dan transitif. Berikut merupakan contoh relasi ekuivalensi.

Contoh 2.6.2

Diberikan himpunan $U = \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Pada himpunan U didefinisikan relasi θ yaitu $a\theta b$ dimana $a, b \in U$ jika dan hanya jika $a - b = 2k$, dengan $k \in \mathbb{Z}$. Dengan kata lain, $a - b$ dapat dibagi oleh 2. Berikut akan dibuktikan bahwa θ merupakan relasi ekuivalensi pada U.

a. Untuk $a \in U$, berlaku $a\theta a$ karena $a - a = 0 = 2.0$ dan $0 \in \mathbb{Z}$. Oleh karena itu, relasi θ bersifat refleksif.
b. Untuk setiap $a, b \in U$, jika $a\theta b$ maka $a - b = 2k$ untuk $k \in \mathbb{Z}$. Hal ini berakibat $b - a = -2k = 2(-k)$, dengan $-k \in \mathbb{Z}$. Jadi, $b\theta a$. Oleh karena itu, relasi θ bersifat simetris.
c. Jika $a\theta b$ dan $b\theta c$ maka $a - b = 2k$ dan $b - c = 2j$ untuk suatu $k, j \in \mathbb{Z}$. Hal ini berakibat $a - c = (a - b) + (b - c) = 2k + 2j = 2(k + j)$, dengan $k + j = \mathbb{Z}$, sehingga dapat dikatakan bahwa $a\theta c$. Oleh karena itu, relasi θ bersifat transitif.

Dengan demikian, relasi θ adalah relasi yang bersifat refleksif, simetris, dan transitif. Jadi, θ merupakan relasi ekuivalensi.

2.7 Kelas Ekuivalensi (*Equivalence Class*)

Pada bagian ini dibahas mengenai definisi kelas ekuivalensi.

Definisi 2.7.1 Diberikan relasi θ merupakan relasi ekuivalensi pada himpunan A dan $a \in A$. Kelas ekuivalensi dari a pada θ adalah $[a]_\theta = \{x : x \in A$ dan $a\theta x\}$. Dengan kata lain, kelas ekuivalensi a pada θ memuat semua elemen dalam himpunan A yang mempunyai relasi dengan a (Barnier dan Feldman, 1990).

Berikut contoh dari kelas ekuivalensi.

Contoh 2.7.1

Berdasarkan Contoh 2.6.2, relasi θ adalah relasi ekuivalensi pada U. Kelas ekuivalensi dalam Contoh 2.6.2 adalah $[1] = \{1,3,5,7\}$ atau himpunan bilangan bulat ganjil dari himpunan U dan $[2] = \{2,4,6\}$ atau himpunan bilangan bulat genap dari himpunan U.

2.8 Ruang Aproksimasi (*Approximation Space*)

Setelah memahami definisi dan contoh mengenai relasi ekuivalensi, selanjutnya akan dibahas mengenai definisi dari ruang aproksimasi.

Definisi 2.8.1 Pasangan terurut (U, θ) dengan $U \neq \emptyset$ dan θ adalah relasi ekuivalensi pada U disebut ruang aproksimasi (Miao dkk., 2005).

Berikut diberikan contoh relasi ekuivalensi supaya lebih memahami definisinya.

Contoh 2.8.1

Berdasarkan Contoh 2.6.2, pasangan (U, θ) adalah ruang aproksimasi, dengan $U \neq \emptyset$ dan θ merupakan relasi ekuivalensi pada U.

2.9 Aproksimasi Atas dan Aproksimasi Bawah (*Upper Approximation and Lower Approximation*)

Setelah dibahas definisi ruang aproksimasi, selanjutnya dibahas aproksimasi atas dan aproksimasi bawah. Berikut adalah definisi aproksimasi atas dan aproksimasi bawah.

Definisi 2.9.1 Diberikan pasangan (U, θ) adalah ruang aproksimasi dan X adalah himpunan bagian dari U dengan pemetaan:

$$Apr : P(U) \to P(U) \times P(U)$$

Aproksimasi bawah dan aproksimasi atas didefinisikan sebagai berikut:

1. $\overline{X} = \{x \in U | [x]_\theta \cap X \neq \emptyset\}$,
2. $\underline{X} = \{x \in U | [x]_\theta \subseteq X\}$.

$\overline{X}$ disebut aproksimasi atas dari X dan $\underline{X}$ disebut aproksimasi bawah dari X di ruang aproksimasi (U, θ) (Davvaz, 2004).

Untuk memahami Definisi 2.9.1, diberikan contoh sebagai berikut.

Contoh 2.9.1

Diberikan ruang aproksimasi (U, θ) dengan himpunan $U = \{x_1, x_2, \ldots, x_{12}\}$ dan θ adalah relasi ekuivalensi pada U dengan kelas ekuivalensi sebagai berikut:

$E_1 = \{x_1, x_2\}$,

$E_2 = \{x_3, x_4\}$,

$E_3 = \{x_5\}$,

$E_4 = \{x_6, x_7\}$,

$E_5 = \{x_8, x_9\}$,

$E_6 = \{x_{10}, x_{11}, x_{12}\}$.

Jika dipilih $X = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$, maka aproksimasi atas X dan aproksimasi bawah X adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\overline{X} &= \{x_1, x_2\} \cup \{x_3, x_4\} \cup \{x_5\} \cup \{x_6, x_7\} \cup \{x_8, x_9\} \\ &= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\};\end{aligned}$$

$\underline{X} = \{x_3, x_4\} \cup \{x_5\} \cup \{x_6, x_7\}$
$\quad = \{x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}.$

Proposisi 2.9.2 Jika (U, θ) ruang aproksimasi dan $X, Y \subseteq U$, maka berlaku:

1. $\underline{X} \subseteq X \subseteq \overline{X}$
2. $\underline{\emptyset} = \overline{\emptyset} = \emptyset$, $\underline{U} = \overline{U} = U$
3. $\underline{(X \cap Y)} = \underline{X} \cap \underline{Y}$
4. $\overline{(X \cup Y)} = \overline{X} \cup \overline{Y}$
5. $X \subseteq Y$ berarti $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$ dan $\underline{X} \subseteq \underline{Y}$
6. $\underline{X} \cup \underline{Y} \subseteq \underline{(X \cup Y)}$
7. $\overline{(X \cap Y)} \subseteq \overline{X} \cap \overline{Y}$ (Isaac dan Neelima, 2013).

2.10 Himpunan *Rough* (*Rough Set*)

Menurut Pawlak (2002), metode *rough set* adalah suatu pendekatan matematis baru untuk menganalisis pola data yang bersifat samar atau tak pasti. Berikut diberikan definisi dari himpunan *rough*.

Definisi 2.10.1 Diberikan θ merupakan relasi ekuivalensi pada himpunan tak kosong U, pasangan (U, θ) adalah ruang aproksimasi. Diberikan suatu himpunan bagian $X \subseteq U$. Jika $\overline{X} - \underline{X} \neq \emptyset$, maka X disebut himpunan *rough* (Pawlak, 1982).

Berikut ini merupakan contoh himpunan *rough*.

Contoh 2.10.1
Berdasarkan Contoh 2.9.1, pasangan terurut aproksimasi bawah dan aproksimasi atas dari X yaitu $(\{x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\})$ merupakan himpunan *rough* di dalam ruang aproksimasi (U, θ).

2.11 Ring *Rough* (*Rough Ring*)

Setelah memahami definisi dari ring dan himpunan *rough*, berikut diberikan definisi dari ring *rough*.

Definisi 2.11.1 Diberikan ruang aproksimasi (U, θ) dan $(+,\cdot)$ adalah dua operasi biner pada U. Himpunan bagian R dari U disebut ring *rough* jika memenuhi sifat-sifat berikut:

i. (1) untuk setiap $x, y \in X, x + y \in \overline{R}$,

(2) untuk setiap $x, y, z \in \overline{R}, (x + y) + z = x + (y + z)$ sifat asosiatif berlaku di $\overline{R}$,

(3) untuk setiap $x \in R$, terdapat $e \in \overline{R}$ sedemikian hingga $x + e = x = e + x$, e disebut elemen identitas *rough* (*rough identity element*),

(4) untuk setiap, $x \in R$, terdapat $y \in R$ sedemikian hingga $x + y = e = y + x$, y disebut elemen invers *rough* (*rough inverse element*),

(5) untuk setiap, $x, y \in R, x + y = y + x$, $\langle R, + \rangle$ bersifat komutatif.

Dari lima kondisi pertama ini menunjukkan bahwa $\langle R, + \rangle$ adalah grup *rough* komutatif (*commutative rough group*).

ii. (1) Untuk setiap, $x, y \in R, xy \in \overline{R}$,

(2) untuk setiap $x, y, z \in \overline{R}, (xy)z = x(yz)$ sifat asosiatif berlaku di $\overline{R}$.

Dari dua kondisi ini menunjukkan bahwa $\langle R, \cdot \rangle$ adalah semigrup *rough* (*rough semigroup*).

iii. Untuk setiap $x, y, z \in R$, berlaku:

(1) $(x + y)z = (xz) + (yz)$,

(2) $x(y + z) = (xy) + (xz)$.

Dua sifat ini merupakan distributif di R (Isaac dan Neelima, 2013).

2.12 Ideal *Rough* (*Rough Ideal*)

Definisi 2.12.1 Himpunan bagian tak kosong I dari ring *rough* R dikatakan ideal kanan (kiri) *rough* jika:

i. I merupakan subgrup *rough* terhadap operasi penjumlahan
   (1) untuk setiap $a, b \in I, a + b \in \overline{I}$,
   (2) untuk setiap $a \in I, -a \in I$,

ii. untuk setiap $a \in I$ dan $r \in R, a * r \in \overline{I}$ $(r * a \in \overline{I})$.

Jika I adalah ideal kiri *rough* (*rough left ideal*) dan ideal kanan *rough* (*rough right ideal*) dari R, maka disebut ideal *rough* (*rough ideal*) atau disebut ideal dua sisi *rough* (*rough two-sided ideal*) (Isaac dan Neelima, 2013).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

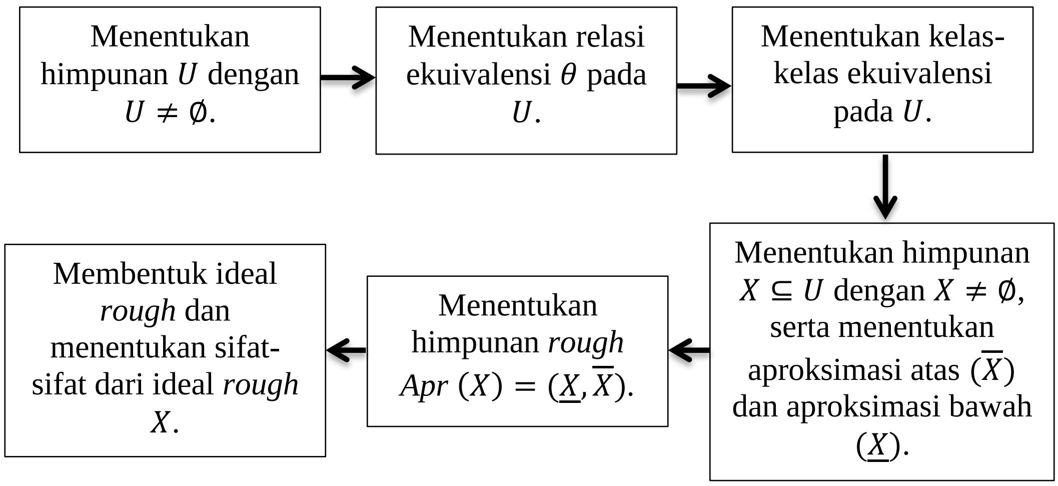
Penelitian ini dilakukan pada semester genap tahun 2021/2022, bertempat di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan studi literatur sebagai berikut:

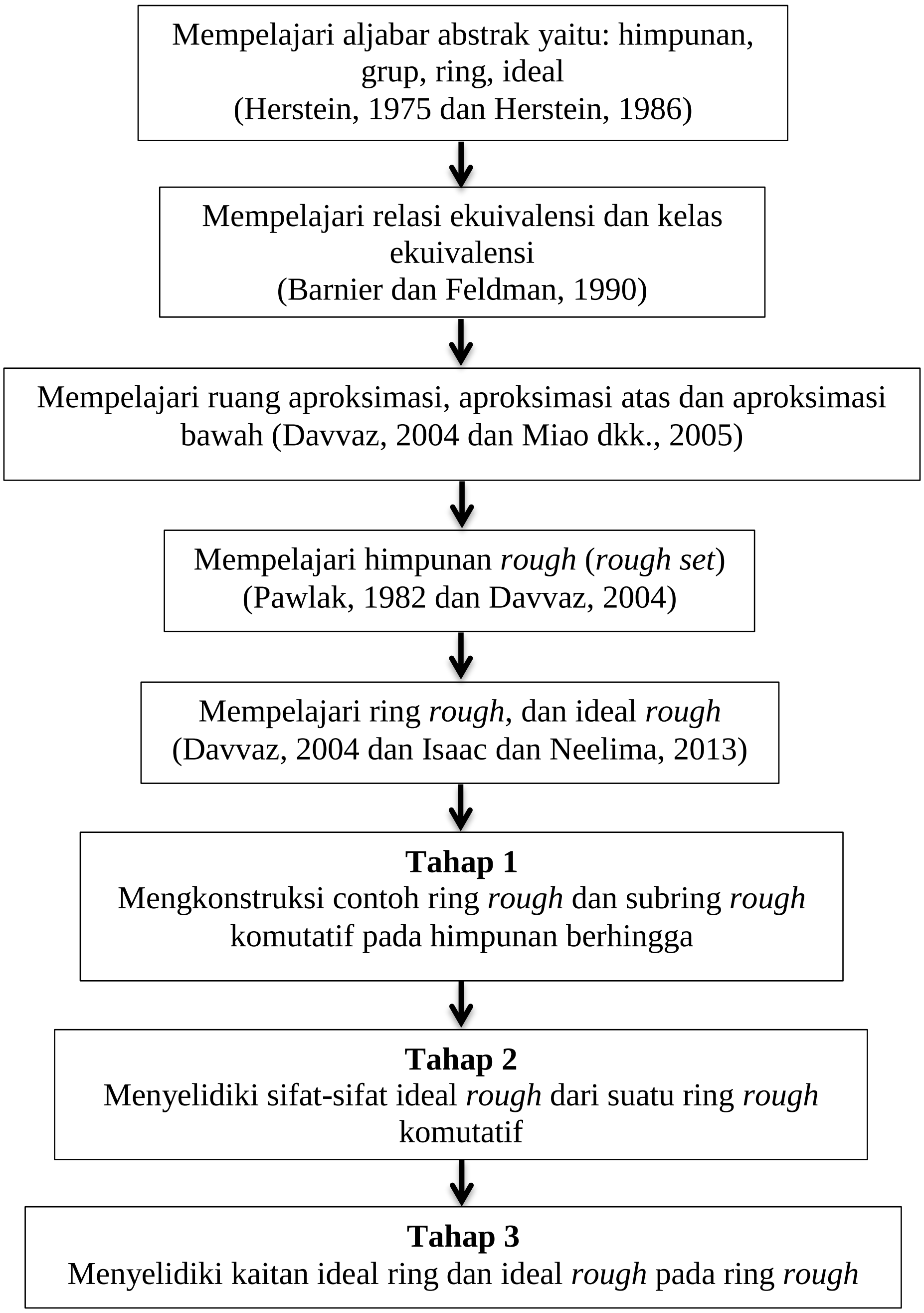
1. studi literatur dari jurnal, buku dan artikel ilmiah yang berhubungan dengan penelitian ini,
2. mempelajari definisi dan teorema yang berkaitan dengan permasalahan yang berhubungan dengan penelitian.

Langkah-langkah dalam mencapai tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:



Gambar 3.1. Gambar langkah-langkah mengkonstruksi himpunan berhingga

Berikut diberikan diagram metode penelitian.



Gambar 3.2. Gambar diagram penelitian

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada Bab IV diperoleh bahwa, pada teori ring *rough*, apabila R merupakan ring *rough* maka subring S akan membentuk subring *rough* pada ruang aproksimasi (U, θ) jika dibentuk dengan operasi biner yang sama dengan R dengan syarat-syarat yaitu untuk setiap $x, y \in S$, maka $S \neq \emptyset$, $x - y \in \overline{S}$ dan $xy \in \overline{S}$.

Berdasarkan pembahasan ideal *rough* yang telah dikonstruksi sebelumnya, dapat diambil kesimpulan bahwa setiap ideal sudah pasti merupakan ideal *rough*, tetapi setiap ideal *rough* belum tentu merupakan ideal dan setiap ideal *rough* sudah pasti merupakan subring *rough*. Jika I merupakan ideal *rough* pada ring *rough* R, diberikan n ideal *rough* maka irisan dari setiap n ideal *rough* yaitu $I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_n$ merupakan ideal *rough* pada ruang aproksimasi tertentu dengan syarat yaitu, $\overline{I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_n} = \overline{I_1} \cap \overline{I_2} \cap \ldots \cap \overline{I_n}$, dan gabungan dari n ideal *rough* yaitu $I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n$ juga merupakan ideal *rough* pada ruang aproksimasi tertentu dengan syarat yang sama yaitu, $\overline{I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n} = \overline{I_1} \cup \overline{I_2} \cup \ldots \cup \overline{I_n} = U$.

Berdasarkan pembahasan *cartesian product* ideal *rough*, jika terdapat ring *rough* R sebanyak n maka $R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_n$ merupakan ring *rough* pada ruang aproksimasi (U^n, θ^n). Jika $I_1, I_2, \ldots, I_n$ merupakan ideal *rough* dari ring *rough* $R_1, R_2, \ldots, R_n$ pada ruang aproksimasi (U^n, θ^n), maka $I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$ merupakan ideal *rough* dari ring *rough* $R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_n$.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil dan penelitian, dalam mengkonstruksi ideal *rough* pada ring *rough* masih sedikit ditemukan sifat-sifatnya, tidak menutup kemungkinan masih terdapat sifat-sifat lain dari ideal *rough* pada ring *rough*. Selain itu, dalam mengkonstruksi ideal *rough* pada ring *rough* ke dalam contoh-contoh dapat menggunakan himpunan yang bersifat non-komutatif atau himpunan universal lain selain yang ada pada penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

Adkinds, W.A dan Weintraub, S.H. 1992. *Algebra:An Approach via Module Theory*. New York:Springer-Verlag.

Arifin, A. 2000. *Aljabar*. Bandung: ITB Bandung.

Ayres, F dan Jaisingh, L.R. 2004. *Theory and Problems of Abstract Algebra 2nd edition*. New York: McGraw-Hill Publishing Company.

B. Davvaz. 2004. Roughness in rings. *Information Sciences*. 164, 147-163.

Barnier, W. Feldman, N. 1990. Introduction to advanced mathematics, *Prenticehall International*. New Jersey:116 -153.

Dummit, D. S. dan Foote, R. M. 2004. *Abstract Algebra Third Edition*. USA: John Wiley & Sons, Inc.

Grzymala-Busse, J. W. 2005. *Rough Set Theory with Applications to Data Mining*. USA: University of Kansas. 76-147.

Hartley, B dan Hawkes, T.O. 1970. *Rings, Modules and Linear Algebra*. London: Chapman dan Hall LTD.

Herstein, I. N. 1975. *Topics in Algebra*. New York: John Wiley & Sons.

Herstein, I. N. 1986. *Abstract Algebra*. New York: Macmillan.

Howie, J.M. 1976. *An Introduction to Semigroups Theory.* London: Academic Press.

Isaac, P dan C.A, N. 2013. Rough ideals and their properties. *Journal of Global Research in Mathematical Archives*. 1(6), 90-97.

Kuroki, N. 1997. Rough Ideals in Semigroups. *Information Sciences*. North Holland. 139-163.

Mas'oed, F. 2013. *Struktur Aljabar*. Jakarta: Akademia.

Miao, D. Han, S. Li, D dan Sun, L. 2005. Rough group, rough subgroup and their properties. *Lecture Notes in Artifical Intelegence.* 104-113.

Munir, R. 2005. *Matematika Diskrit*. Bandung: Penerbit Informatika.

Nuharini, D dan Wahyuni, T. 2008. *Matematika Konsep dan Aplikasinya*. Jakarta: Pusat Perbukuan Departemen Pendidikan Nasional.

Pawlak, Z. 1982. Rough set. *International Journal Comput Inform Sci*. 11(5), 341-356.

Raisinghania, M.D dan Aggarwal, R.S. 1980. *Modern Algebra.* New Delhi: S.Chand & Company Ltd.

Setiadji. 2009. *Himpunan Logika Samar serta Aplikasinya*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Setiawan. 2008. *Pembelajaran Fungsi, Persamaan, dan Pertidaksamaan Aljabar*. Yogyakarta: Pusat Pengembangan dan Peberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan Matematika.

Suwilo, S. Tulus dan Lubis, S. R. 1987. *Aljabar Abstrak Suatu Pengantar*. Medan: USU Press.

Wibisono, S. 2008. *Matematika Diskrit (Edisi Kedua).* Yogyakarta: Graha Ilmu.

Winton, R. 2012. Commutativity in permutation groups. *Journal of Mathematical Sciences & Mathematics Education*. 6(2): 1-7.