PENGGUNAAN ALGORITMA *PARTICLE SWARM OPTIMIZATION* PADA PENDUGAAN PARAMETER DISTRIBUSI GAMMA DUA PARAMETER

(Skripsi)

Oleh

OBIT AHMAD AL FALAH
NPM 1717031084

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2021

ABSTRACT

THE USAGE OF PARTICLE SWARM OPTIMIZATION ALGORITHM FOR ESTIMATING TWO-PARAMETERS GAMMA DISTRIBUTION

By

Obit Ahmad Al Falah

Parameter estimation is one of the most widely used topics in several studies. One of the parameter estimation methods that often to used is Maximum Likelihood Estimation (MLE) method. In the process of solving it, the MLE method produces non-linear equations that generally cannot be solved analytically. Therefore, in solving the solution used a numerical approach. Many methods are used to solve non-linear equations, including calculus-based and heuristic-based. Particle Swarm Optimization Algorithm (PSO) is a heuristic method used in solving population-based optimization problems. Gamma distribution is a probability density function distribution that is usually applied to the length of time in work. In this study, the application of the PSO algorithm to the estimation of the two-parameters Gamma distribution was studied. To compare the results from PSO, parameter estimates were also calculated using the *Newton-Raphson* method. Based on the results obtained with the data used, PSO obtains results close to the Newton-Raphson method. So the PSO algorithm is effectively used to estimate the two-parameters Gamma distribution.

Keywords : *Gamma distribution, estimating parameters, Particle Swarm Optimization*

ABSTRAK

PENGGUNAAN ALGORITMA *PARTICLE SWARM OPTIMIZATION* PADA PENDUGAAN PARAMETER DISTRIBUSI GAMMA DUA PARAMETER

Oleh

Obit Ahmad Al Falah

Pendugaan parameter merupakan salah satu topik yang banyak dipakai dalam beberapa penelitian. Salah satu metode pendugaan parameter yang sering digunakan adalah *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Dalam proses penyelesaiannya, metode MLE menghasilkan persamaan non-linier yang secara umum tidak bisa diselesaikan secara analitik. Oleh karena itu, dalam penyelesaian solusi persamaannya digunakan pendekatan numerik. Banyak metode yang sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan non-linier, diantaranya berbasis kalkulus dan berbasis heuristik. Algoritma *Particle Swarm Optimization* (PSO) merupakan salah satu metode heuristik yang digunakan dalam penyelesaian masalah optimasi berbasis populasi. Distribusi Gamma merupakan distribusi fungsi padat peluang yang biasa diaplikasikan dalam lamanya waktu dalam pekerjaan. Pada penelitian ini dikaji penerapan algoritma PSO pada pendugaan parameter distribusi Gamma dua parameter. Sebagai pembanding hasil dari PSO, penaksiran parameter juga dilakukan dengan metode Newton-Raphson. Berdasarkan hasil yang didapat dengan data yang digunakan, PSO mendapatkan hasil yang mendekati hasil dari metode Newton-Raphson. Sehingga algoritma PSO efektif digunakan untuk melakukan pendugaan parameter distribusi Gamma dua parameter.

Kata kunci : *distribusi Gamma, parameter penduga, Particle Swarm Optimization*

PENGGUNAAN ALGORITMA *PARTICLE SWARM OPTIMIZATION* PADA PENDUGAAN PARAMETER DISTRIBUSI GAMMA DUA PARAMETER

OBIT AHMAD AL FALAH

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat Untuk Mencapai Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2021

Judul Skripsi : **PENGGUNAAN ALGORITMA *PARTICLE SWARM OPTIMIZATION* PADA PENDUGAAN PARAMETER DISTRIBUSI GAMMA DUA PARAMETER**

Nama Mahasiswa : Obit Ahmad Al Falah

Nomor Pokok Mahasiswa : 1717031084

Program Studi : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.	**Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.**
NIP 19740316 200501 1 001	NIP 19720227 199802 1 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	: **Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.**	....
Sekretaris	: **Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	: **Dra. Dorrah Aziz, M.Si.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, M.T.
NIP 19740705 200003 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **14 Desember 2021**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: **Obit Ahmad Al Falah**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1717031084**
Jurusan	: **Matematika**
Judul Skripsi	: **Penggunaan Algoritma *Particle Swarm Optimization* pada Pendugaan Parameter Distribusi Gamma Dua Parameter**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung,   Desember 2021

Yang Menyatakan,

METERAI TEMPEL

9502BAJX544017823

Obit Ahmad Al Falah

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Obit Ahmad Al Falah yang lahir di Lampung Selatan pada tanggal 3 Agustus 1998. Penulis merupakan anak ketiga dari tiga bersaudara yang terlahir dari pasangan Bapak Azmi Aziz dan Ibu Umi Kalsum.

Penulis menempuh awal pendidikan di TK Al-Azhar 1 pada tahun 2002 sampai tahun 2003. Kemudian, penulis melanjutkan pendidikan di SD Negeri 1 Tanjung Bintang pada tahun 2005 sampai tahun 2011. Selanjutnya, penulis melanjutkan pendidikan di SMP IT Ar-Raihan Bandar Lampung pada tahun 2011 sampai tahun 2014. Penulis menempuh pendidikan di SMA IT Ar-Raihan Bandar Lampung pada tahun 2014 sampai tahun 2017.

Pada tahun 2017, penulis melanjutkan pendidikan di perguruan tinggi dan terdaftar sebagai mahasiswa S1 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung (Unila) melalui jalur Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN). Kemudian pada tahun 2019 penulis dipercaya menjadi Kepala Biro Dana dan Usaha Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA) FMIPA Unila.

Pada awal tahun 2020, penulis melakukan Kerja Praktik (KP) di Balai Riset Standardisasi Industri (Baristand) Kota Bandar Lampung. Kemudian pada pertengahan tahun 2020 sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat selama masa pandemi Covid-19, penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) Mandiri selama 40 hari di Kelurahan Sukajawa Baru, Kecamatan Tanjung Karang Barat, Kota Bandar Lampung.

KATA INSPIRASI

"Allah tidak membebani seseorang melainkan dengan kesanggupannya"

(Q.S. Al-Baqarah : 286)

"Usaha akan membuahkan hasil setelah seseorang tidak menyerah"

(Napoleon Hill)

"Satu-satunya sumber dari pengetahuan adalah pengalaman"

(Albert Einstein)

"Sebaik-baik manusia adalah yang paling bermanfaat bagi orang lain"

(HR. Ahmad, Tharbani, dan Daruqtni)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirobbil'alamin,

Puji dan syukur kita dihaturkan kepada Allah Subhanahu Wata'ala karena atas limpahan nikmat dan karunia-Nya yang diberikan, shalawat serta salam selalu tercurah kepada Nabi Muhammad Shallallahu 'Alaihi Wasallam yang telah menuntun manusia ke jalan yang terang benderang.

Kupersembahkan karya yang sederhana ini kepada:

Keluarga Tercinta

Terima kasih kepada Ayah, Ibu, dan kedua kakakku atas semua doa dan dukungan yang selalu diberikan kepadaku.

Sahabat-sahabatku

Terima kasih kepada sahabat-sahabatku atas semua doa, dukungan, kebahagiaan, canda dan tawa yang telah menyertai dalam setiap langkahku.

Almamater Tercinta Universitas Lampung

SANWACANA

Puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat, taufik dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Penggunaan Algoritma *Particle Swarm Optimization* pada Pendugaan Parameter Distribusi Gamma Dua Parameter" dengan baik. Shalawat serta salam tak lupa penulis agungkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Selama proses penyusunan skripsi ini penulis menyadari bahwa skripsi ini tidak dapat terselesaikan secara baik tanpa dukungan, bimbingan, serta doa dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada :

1. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung dan selaku Pembimbing I yang selalu bersedia memberikan arahan, bimbingan, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan dan dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.

3. Ibu Dra. Dorrah Aziz, M.Si. selaku dosen Penguji yang telah bersedia memberikan kritik, saran, dan evaluasi kepada penulis sehingga dapat menjadi lebih baik lagi.
4. Bapak Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, M.T. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
5. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Orang tua dan kakak-kakak tercinta serta seluruh keluarga besar yang selalu memberikan doa, dukungan, dan motivasi kepada penulis.
7. Sahabat-sahabat dari kelas C yang telah memberikan dukungan serta kenangan indah kepada penulis.
8. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2017.
9. HIMATIKA FMIPA Unila yang telah memberikan banyak pengalaman kepada penulis.
10. Seluruh pihak yang telah membantu penulis yang tidak bisa disebutkan satu per satu.
11. Almamater tercinta Universitas Lampung.

Bandar Lampung, Desember 2021

Penulis,

Obit Ahmad Al Falah

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Persamaan non-linier merupakan persamaan untuk mencari nilai akar x hingga $f(x) = 0$ yang tidak mengandung syarat seperti persamaan linier, sehingga untuk mendapatkan nilai akarnya digunakan metode pendekatan numerik. Metode numerik merupakan teknik penyelesaian permasalahan yang diformulasikan secara matematis dengan menggunakan operasi hitungan dan tidak bisa diselesaikan secara analitik. Salah satu metode yang sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan non-linier adalah metode *Newton-Raphson* dimana metode ini dilakukan dengan menggunakan konsep turunan. Selain menggunakan konsep turunan, beberapa penelitian juga mengembangkan cara lain untuk menyelesaikan persamaan non-linier. Salah satunya yaitu dengan menggunakan metode heuristik yaitu algoritma *Particle Swarm Optimization* (PSO). Algoritma PSO merupakan salah satu metode optimasi yang biasa digunakan untuk pengambilan keputusan yang dikembangkan didasarkan pada keadaan alam sekitar. Dimana metode ini terinspirasi dari sekawanan burung atau ikan yang bergerak untuk mencari makanan (Arora, 2015). Algoritma PSO banyak digunakan untuk menyelesaikan permasalahan optimasi, namun pada penelitian yang dilakukan oleh Azmi, dkk (2019), algoritma PSO digunakan untuk mencari solusi persamaan non-linier.

Dalam statistika, model persamaan non-linier muncul pada pendugaan parameter metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Pendugaan parameter merupakan prosedur yang dilakukan untuk menduga suatu parameter pada populasi yang tidak diketahui nilainya. Menurut Bickel dan Doskum (1977), MLE adalah metode penaksiran parameter yang dapat digunakan untuk menaksir parameter suatu model yang diketahui distribusinya. Metode MLE digunakan dalam pendugaan parameter dengan cara memaksimumkan fungsi *likelihood* dari L. Misalkan $f(x, \theta)$ merupakan fungsi densitas dari variabel random *X*, dan θ merupakan parameter dari fungsi densitas, maka fungsi *likelihood* adalah fungsi probabilitas bersama dari $x_1, x_2, \dots, x_n$ dan $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$.

Beberapa penelitian mengguanakan metode *Newton-Raphson* dan simulasi *Monte-Carlo* untuk menyelesaikan solusi persamaan non-linier yang ada pada MLE. Seperti pada penelitian yang dilakukan oleh Naji dan Rasheed (2019), dimana pendugaan parameter metode MLE pada distribusi Gamma dua parameter diterapkan dengan metode *Newton-Raphson*. Lalu pada penelitian Mazucheli, dkk (2017) yang menggunakan simulasi *Monte-Carlo* untuk mendapatkan nilai pendugaan parameter metode MLE pada distribusi Gamma dua parameter. Untuk mendapatkan nilai estimasi yang akurat, beberapa penelitian menggunakan metode heuristik seperti algoritma Genetika dan algoritma PSO dalam melakukan pendugaan parameter. Dalam penelitian Okafor dkk (2018), algoritma PSO diterapkan pada pendugaan parameter metode MLE pada distribusi Wreibull dua parameter. PSO mendapatkan hasil yang stabil dan tidak memerlukan syarat nilai awal. Jika dibandingkan dengan metode *Newton-Raphson*, algoritma PSO tidak memerlukan konsep turunan seperti yang ada pada metode *Newton-Raphson*, sehingga proses komputasi yang dilakukan menjadi lebih sedikit. Oleh karena itu dalam penelitan ini, akan dilakukan pendugaan parameter pada distribusi Gamma dua parameter dengan metode MLE menggunakan algoritma PSO. Sebagai perbandingannya, metode Newton-Raphson akan diterapkan pada permasalahan yang sama.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk melakukan pendugaan parameter pada distribusi Gamma dua parameter dengan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) menggunakan algoritma *Particle Swarm Optimization* (PSO).

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah menambah pengetahuan tentang metode lain selain metode numerik dalam mencari nilai estimasi parameter metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) pada distribusi Gamma dua parameter.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Distribusi Gamma

Distribusi Gamma adalah distribusi fungsi padat yang terkenal luas dalam bidang matematika. Distribusi gamma banyak diaplikasikan dalam lamanya waktu untuk menyelesaikan pekerjaan. Distribusi gamma sering diterapkan dalam teori antrian dan teori reabilitas. Distribusi gamma berasal dari fungsi gamma (Γ) dimana :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} \, dy$$

Dengan sifat $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$, sehingga untuk $\alpha = n$ dimana n berupa bilangan bulat positif, maka $\Gamma(n) = (n - 1)!$

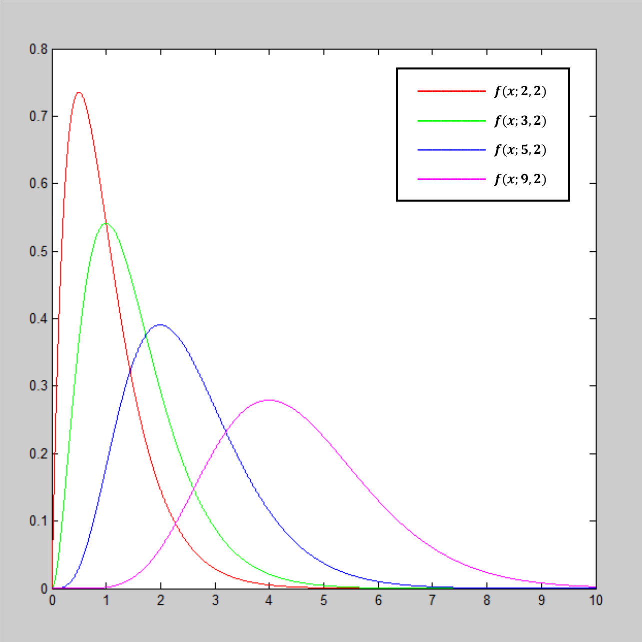
Suatu peubah acak X berdistribusi gamma dengan fungsi densitas peluang (fdp) X adalah sebagai berikut :

$$f(x|\alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \quad ; x > 0 \tag{2.1}$$

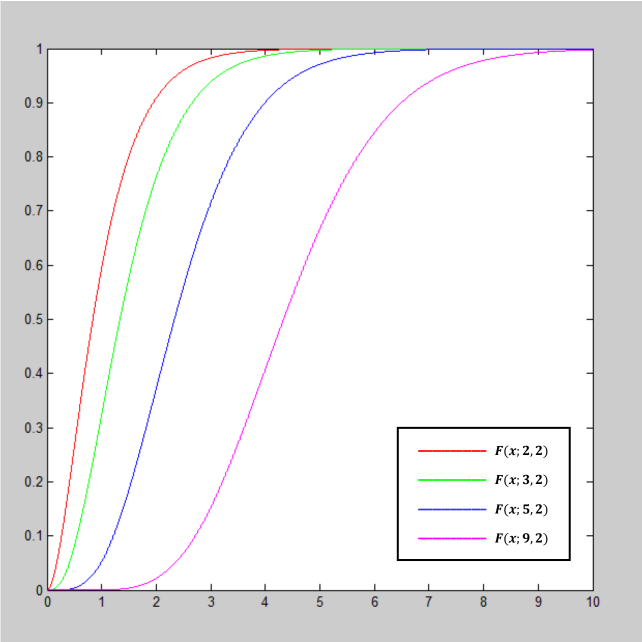
Distribusi Gamma memiliki fungsi distribusi kumulatif (fdk) sebagai berikut :

$$F(x|\alpha, \beta) = \int_0^x \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\beta x} \, dt \tag{2.2}$$

dimana $\alpha > 0$ dan $\beta > 0$.



Gambar 1. Plot fungsi densitas peluang distribusi Gamma



Gambar 2. Plot fungsi distribusi kumulatif distribusi Gamma

2.2 *Maximum Likelihood Estimation* (MLE)

Misalkan $x_1,\ x_2, \ldots\ , x_n$ disebut sampel acak berukuran n dari suatu distribusi dengan fungsi kepekatan peluang $f(x; \boldsymbol{\Theta})$; $\boldsymbol{\Theta} \in \Omega$, dimana $\boldsymbol{\Theta}$ adalah suatu parameter yang tidak diketahui dan Ω disebut sebagai semesta dari parameter. Karena $x_1,\ x_2, \ldots\ , x_n$ merupakan sampel acak, maka fungsi kepekatan peluang dapat ditulis sebagai berikut:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \boldsymbol{\Theta}) = f(x_1; \boldsymbol{\Theta})\, f(x_2; \boldsymbol{\Theta}) \ldots .\, f(x_n; \boldsymbol{\Theta}) \tag{2.3}$$

Menurut Hogg dan Craig (1995), jika fungsi kepekatan peluang bersama tersebut dinyatakan sebagai fungsi terhadap $\boldsymbol{\Theta}$, maka dinamakan sebagai fungsi *likelihood* yang dinotasikan $L(\boldsymbol{\Theta}; x_1,\ x_2, \ldots\ , x_n) = L(\boldsymbol{\Theta})$ sehingga dapat ditulis:

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\Theta}) &= f(x_1,\ x_2, \ldots\ , x_n; \boldsymbol{\Theta}) \\ &= f(x_1; \boldsymbol{\Theta})\, f(x_2; \theta) \ldots f(x_n; \boldsymbol{\Theta}) \\ &= \prod_{i=1}^{n} f(x_n; \boldsymbol{\Theta}) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Akan dicari nilai penduga $\boldsymbol{\Theta}$ yang diperoleh dari dengan cara memaksimumkan fungsi *likelihood*. Untuk mencari nilai $\boldsymbol{\Theta}$, fungsi *likelihood* dapat dimodifikasi ke dalam bentuk logaritma natural. Sehingga persamaan (2.3) dapat ditulis:

$$\begin{aligned} \ln L(\boldsymbol{\Theta}) &= \ln[\prod_{i=1}^{n} f(x_n; \boldsymbol{\Theta})] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_n; \boldsymbol{\Theta}) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Nilai penduga dari $\boldsymbol{\Theta}$ yang dimaksimumkan $\ln L(\boldsymbol{\Theta})$ diperoleh dengan mencari nilai turunan dari $\ln L(\boldsymbol{\Theta})$ terhadap parameternya dan menyamakannya dengan 0.

$$\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\Theta})}{\partial(\boldsymbol{\Theta})} = 0$$

Menurut Ilmma (2009), nilai $\boldsymbol{\Theta}$ yang dimaksimumkan dengan ln $L(\boldsymbol{\Theta})$ disebut sebagai taksiran *maximum likelihood* dari $\boldsymbol{\Theta}$ sehingga dapat dinotasikan sebagai $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}$.

2.3 Uji Kolmogorov-Smirnov

Menurut Olofsson & Andesson (2012) uji *Kolomogorov-Smirnov* merupakan alat uji statistik yang biasa digunakan untuk mengetahui jika sampel dari suatu populasi berasal dari distribusi kontinu tertentu. Misalkan $x_1, x_2, \dots, x_n$ merupakan sampel acak dengan $F(x_n)$ merupakan fungsi distribusi kumulatif tertentu, langkah-langkah untuk melakukan uji *Kolomogorov-Smirnov* yaitu sebagai berikut :

1) Membentuk Hipotesis :
   a) H_0 : Data mengikuti berdistribusi tertentu
   b) H_1 : Data tidak berdistribusi tertentu
2) Mengurutkan nilai sampel $x_1, x_2, \dots, x_n$ dari yang terkecil hingga terbesar.
3) Menentukan fungsi distribusi yang diamati.
4) Uji statistik dengan memaksimumkan persamaan :

$$D = \max_{1<n<N}\left(\left|\frac{n-1}{N} - F(x_n)\right|, \left|\frac{n}{N} - F(x_n)\right|\right) \quad (2.6)$$

   dimana N merupakan banyaknya sampel.
5) Membentuk kaidah keputusan :
   a) Jika $D < D_{N,a}$ maka H_0 diterima
   b) Jika $D > D_{N,a}$ maka H_0 ditolak

$D_{N,\alpha}$ merupakan nilai kritis pada *Kolmogorov-Smirnov* dimana secara umum yang biasa digunakan adalah dengan tingkat signifikansi $a = 0{,}05$ sehingga $D_{N,a} = \frac{1{,}358}{\sqrt{N}}$.

2.4 Persamaan Non-Linier

Persamaan non-linier merupakan persamaan yang tidak mengandung syarat seperti persamaan linier. Sehingga, persamaan non-linier merupakan persamaan yang memiliki pangkat selain satu dan mempunyai dua variabel. Menurut Basuki (2004), beberapa fungsi yang termasuk dalam persamaan non-linier adalah fungsi transenden seperti $\sin 2x - \sec^{-1} x = 5$ dan fungsi non transenden yang merupakan polinomial seperti $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, dimana polinomial merupakan suku-suku banyak dengan banyak terhingga yang disusun dari peubah dan konstanta. Dalam penyelesaian persamaan non-linier, akan ditenentukan akar-akar persamaan non-linier dengan cara menentukan nilai x yang menyebabkan nilai $f(x) = 0$.

Pada umumnya penyelesaian persamaan non-linier sulit untuk diselesaikan secara analitik. Oleh karena itu, untuk mencari nilai solusinya dibutuhkan hampiran numerik. Metode numerik adalah teknik untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang diformulasikan secara matematis dengan menggunakan operasi hitungan (*arithmetic*). Penyelesaian non-linier dengan hampiran numerik dapat diselesaikan dengan beberapa metode pendekatan. Dalam penelitian ini metode yang digunakan adalah algoritma *Particle Swarm Optimization* (PSO) dan metode *Newton-Raphson*.

2.4.1 Metode Newton-Raphson

Menurut Yang, dkk (2005), metode *Newton-Raphson* merupakan metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan non-linier satu variabel, hanya jika turunan pertama dari $f(x)$ ada dan kontinu pada seluruh solusinya. Metode *Newton-Raphson* digunakan dengan menggunakan satu titik awal dan mendekatinya dengan memperhatikan *slope* atau gradien pada titik tersebut. Untuk menentukan gradien garis kurva $f'(x)$ yaitu sebagai berikut :

$$f'(x_n) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_n)-0}{x_n - x_{n+1}} \tag{2.7}$$

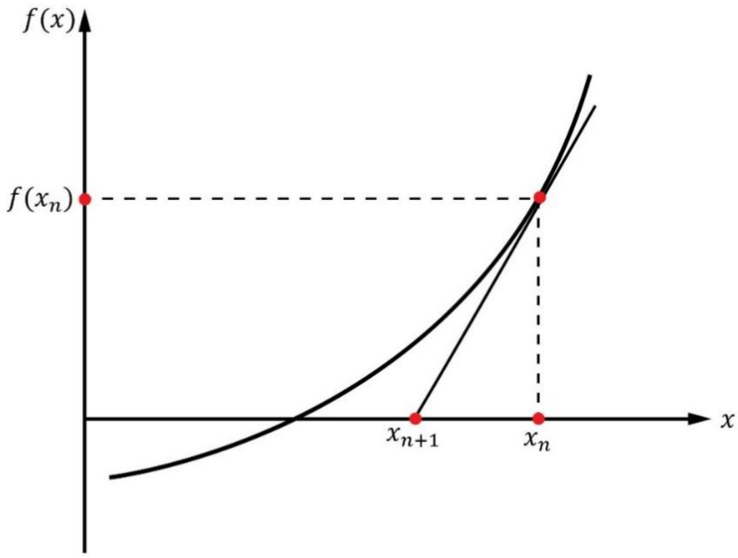
Atau dapat ditulis

$$0 - f(x_n) = f'(x_n)(x_n - x_{n+1}) \tag{2.8}$$

Sehingga rumus metode *Newton-Raphson* adalah :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2.9}$$

Metode *Newton-Raphson* dapat digambarkan pada gambar sebagai berikut :



Gambar 3. Grafik Metode *Newton-Raphson*

Metode *Newton-Raphson* dapat diperluas untuk menyelesaikan sistem persamaan non-linier dengan lebih dari satu variabel atau parameter. Misal $\boldsymbol{\Theta}_1, \boldsymbol{\Theta}_2, \dots, \boldsymbol{\Theta}_p$ adalah parameter yang tidak diketahui nilainya, maka iterasinya adalah sebagai berikut :

$$\boldsymbol{\Theta}_{i+1} = \boldsymbol{\Theta}_i - [H(\boldsymbol{\Theta}_\mathrm{i})^{-1}\mathbf{G}(\boldsymbol{\Theta}_i)]$$

Dengan $\boldsymbol{\Theta}_{i+1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Theta}_{i+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Theta}_{p+1} \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{\Theta}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Theta}_{1i} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Theta}_{pi} \end{bmatrix}$

Vektor gradien dan vektor turunan pertama terhadap parameternya dan dilambangkan dengan $\mathbf{G}(\boldsymbol{\Theta})$ yaitu :

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{\Theta}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \ln \mathrm{L}(\boldsymbol{\Theta})}{\partial \theta_1} \\ \dfrac{\partial \ln \mathrm{L}(\boldsymbol{\Theta})}{\partial \theta_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \ln \mathrm{L}(\boldsymbol{\Theta})}{\partial \theta_n} \end{bmatrix}$$

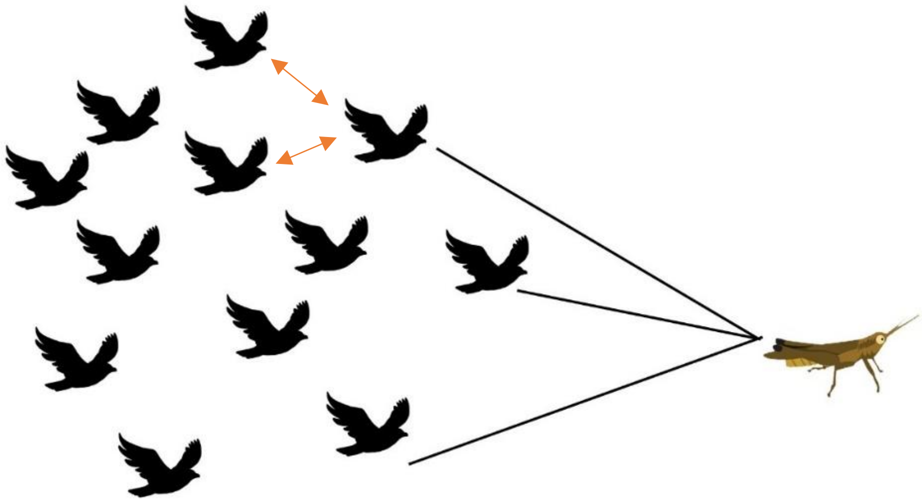
Menurut Seber dan Wild (2003), matriks Hessien atau matriks turunan kedua terhadap parameternya dilambangkan dengan $H(\mathbf{\Theta})$ yaitu :

$$H(\mathbf{\Theta}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ln \mathrm{L}(\mathbf{\Theta})}{\partial \theta_1^2} & \frac{\partial^2 \ln \mathrm{L}(\mathbf{\Theta})}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \ln \mathrm{L}(\mathbf{\Theta})}{\partial \theta_1 \partial \theta_n} \\ \frac{\partial^2 \ln \mathrm{L}(\mathbf{\Theta})}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 \ln \mathrm{L}(\mathbf{\Theta})}{\partial \theta_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \ln \mathrm{L}(\mathbf{\Theta})}{\partial \theta_2 \partial \theta_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \ln \mathrm{L}(\mathbf{\Theta})}{\partial \theta_n \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 \ln \mathrm{L}(\mathbf{\Theta})}{\partial \theta_n \partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \ln \mathrm{L}(\mathbf{\Theta})}{\partial \theta_n^2} \end{bmatrix}$$

2.4.2 Algoritma *Particle Swarm Optimization* (PSO)

Algoritma PSO merupakan metode yang terinspirasi dari kondisi alam sekitar. Algoritma PSO adalah algoritma berbasis populasi yang mengeksplorasi individu dalam pencarian. Dalam PSO populasi disebut *swarm* dan individu disebut *particle*. Menurut Arora (2015), teknik PSO terinspirasi dari kebijaksanaan kolektif dari sekelompok individu seperti sekawanan burung atau sekelompok ikan yang bergerak bersama dalam mencari makanan. Misalnya, sekelompok burung sedang terbang secara acak mencari makanan di sebuah area tetapi hanya ada satu potong makanan pada area tersebut. Semua burung tidak mengetahui dimana lokasi makanan yang sebenarnya, hanya saja mereka dapat mengetahui seberapa jauh letak makanan yang ada pada setiap pencarian. Strategi terbaik yang dapat digunakan untuk mencari makanan adalah dengan cara mengikuti burung yang lokasinya paling dekat dengan makanan tersebut. Satu burung menyatakan satu solusi di dalam ruang masalah dan burung tersebut direpresentasikan sebagai partikel sementara populasi burung direpresentasikan sebagai *swarm*. Semua partikel memiliki nilai *fitness* yang yang akan dioptimalkan, dan memiliki kecepatan (*velocity*). Setiap partikel berpindah dengan kecepatan yang diadaptasi dari daerah pencarian dan disimpan sebagai posisi terbaik yang pernah dicapai.

Algoritma *Particle Swarm Optimization* dapat diilustrasikan sebagai berikut :



Gambar 4. Ilustrasi *Particle Swarm Optimization* (PSO) dari sekawanan burung

Sejumlah burung terbang secara acak dan mencari makanan dalam suatu area yang luas. Semua burung tidak mengetahui dimana letak makanan, tetapi mereka mengetahui seberapa jauh mereka dalam setiap iterasi. Ketika seekor burung mendekati target atau makanan (berdasarkan minimum atau maksimum suatu fungsi objektif) maka burung tersebut secara cepat mengirim informasi kepada burung-burung lain dalam kawanan tertentu, sehingga burung lain akan mengikuti arah menuju makanan secara tidak langsung.

Berdasarkan skenario kumpulan burung tersebut kemudian digunakan untuk memecahkan masalah optimasi. Nilai *fitness* disebut $Pbest$. Ketika partikel mengambil semua populasi sebagai tetangga topologinya, posisi terbaik adalah global terbaik yang disebut $Gbest$. Melalui $Pbest$ dan $Gbest$, partikel memperbarui diri untuk menghasilkan generasi berikutnya dari kawanan.

Langkah-langkah algoritma *Particle Swarm Optimization* (PSO) dapat dijabarkan sebagai berikut:

1) Inisialisasi nilai posisi awal partikel dan membangkitkan kecepatan secara random. Setiap inisialisasi partikel, populasi awal (x_i^k) dibangkitkan berupa matriks partikel dikali dengan dimensi. Pembangkitan nilai kecepatan awal v_i memiliki ukuran yang sama yaitu di atur sama dengan 0.
2) Evaluasi nilai fungsi tujuan untuk setiap partikel $(f(x_i^k))$ dengan cara membandingkan nilai *fitness*.
3) Menentukan $Pbest$ dan $Gbest$ awal. *Fitness* terbaik untuk setiap individu $(Pbest)$ adalah nilai $(f(x_i^k))$ itu sendiri dimana $Pbest_i = f(x_i^k)$. Sementara nilai *fitness* $Gbest$ adalah nilai minimum dari $Pbest$.
4) Memperbarui kecepatan (v_i^k) dan posisi partikel dari penjumlahan momentum dan pengalaman yang diambil dari $Gbest$ dan $Pbest$. Momentum didapatkan dengan cara mengkalikan bobot inersia dan kecepatan sebelumnya. Untuk menentukan nilai kecepatan yang diperbarui dapat dilihat dari persamaan sebagai berikut:

$$v_i^{k+1} = wv_i^k + c_1u_i\left(Pbest_i - x_i^k\right) + c_2u_i\left(Gbest_i - x_i^k\right) \qquad (2.10)$$

dengan:

v_i^k = kecepatan pada dimensi ke-i pada iterasi ke-k

w = bobot inersia

c_1 = nilai konstanta pembelajaran ke-1

c_2 = nilai konstanta pembelajaran ke-2

u_i = nilai random pada interval [0,1]

x_i^k = posisi dimensi ke-i pada iterasi ke-k

$Pbest_i$ = nilai $Pbest$ pada dimensi ke-i

$Gbest_i$ = Nilai $Gbest$ pada dimensi ke-i

dimana fungsi perbarui bobot inersia:

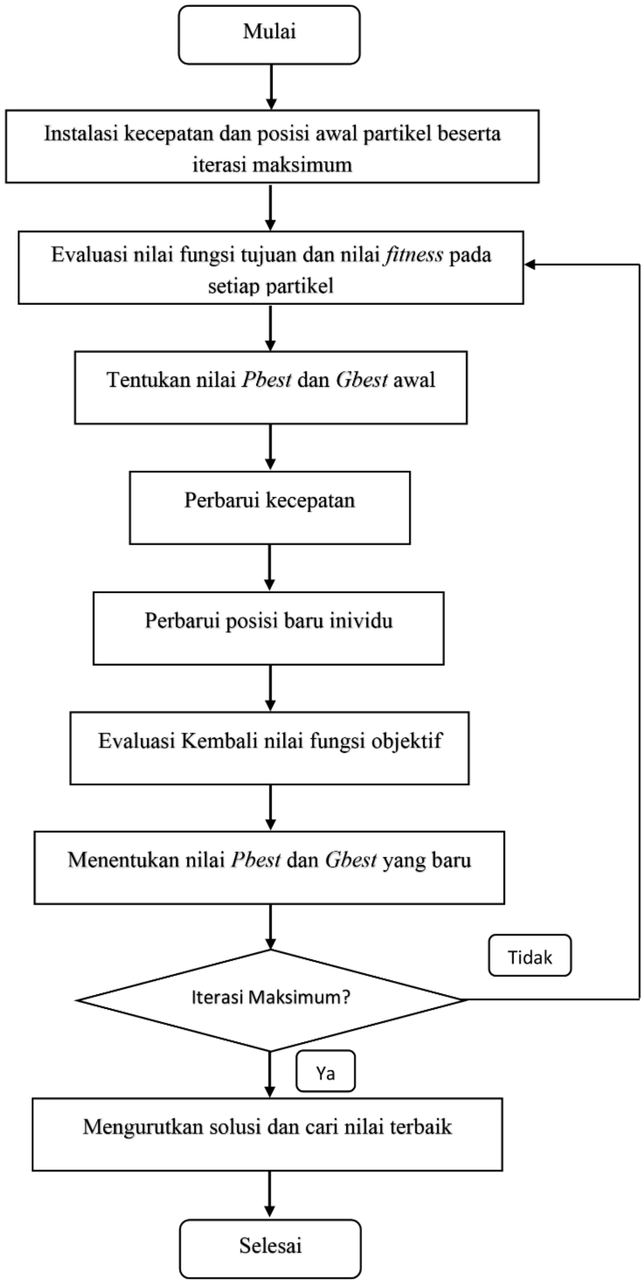
$$w = w_{max} - iterasi \frac{w_{max} - w_{min}}{Maksimum\ iterasi}$$

Perbarui posisi individu dengan persamaan:

$$x_i^{k+1} = x_i^k + v_i^{k+1} \tag{2.11}$$

5) Evaluasi Kembali $f(x_i^k)$, jika $f\left(x_i^k\right) \leq f(Pbest_i)$ maka $Pbest_i = x_i^k$, setelah mendapatkan $Pbest_i$ baru, maka didapatkan $f(Pbest_i)$ baru.
6) Jika iterasi sudah maksimum maka Algoritma berhenti, jika belum maka kembali ke Langkah no 4.

Berikut adalah *flowchart* langkah-langkah algoritma *Particle Swarm Optimization* (PSO):



Gambar 5. Flowchart Algoritma *Particle Swarm Optimization* (PSO)

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian dilakukan pada semester Genap Tahun Ajaran 2020/2021, bertempat di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Data Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data simulasi yang dibangkitkan dengan menggunakan *software* R i386 versi 4.0.4 dengan model distribusi Gamma (α, β) dan data Indeks Kedalaman Kemiskinan Provinsi Lampung Tahun 2016-2020 yang didapat dari *website* www.lampung.bps.go.id.

3.3 Metode Penelitian

Adapun Langkah-langkah yang akan dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut :

1) Membentuk fungsi *likelihood* pada metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dari fungsi kepekatan peluang distribusi Gamma (α, β) .
2) Membangkitkan data simulasi pada distribusi Gamma (α, β) dengan nilai masing-masing parameter dan ukuran sampel yang sudah ditentukan.
3) Mencari nilai dugaan parameter dari fungsi *likelihood* pada distribusi Gamma (α, β) dengan menggunakan metode *Newton-Raphson.*
4) Mencari nilai dugaan parameter dari fungsi *likelihood* pada distribusi Gamma (α, β) dengan menggunakan algoritma *Particle Swarm Optimization* (PSO).
5) Membandingkan hasil dari algoritma *Particle Swarm Optimization* (PSO) dengan metode *Newton-Raphson.*

V. KESIMPULAN

Pada penelitian ini telah dikaji pendugaan parameter distribusi Gamma dua parameter dengan metode MLE menggunakan algoritma PSO. Berdasarkan hasil yang diperoleh, nilai dugaan parameter yang didapat menggunakan PSO menghasilkan nilai yang mendekati hasil pada metode *Newton-Raphson.* Sehingga dapat disimpulkan bahwa algoritma PSO sangat efektif untuk melakukan pendugaan parameter distribusi Gamma dua parameter. Hasil yang didapat dengan algoritma PSO yaitu sebagai berikut :

1. Hasil pendugaan parameter menggunakan algoritma PSO berdasarkan data bangkitan :

Ukuran Sampel	α	β	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$
10	3	5	3,15222	5,29487
	4	6	7,01584	9,90885
	5	7	3,65933	4,67509
50	3	5	3,96076	6,62041
	4	6	5,14474	7,31619
	5	7	5,10829	6,81228
100	3	5	3,18550	5,50912
	4	6	4,11398	6,34618
	5	7	5,20695	7,48251

2. Hasil aplikasi pendugaan parameter distribusi Gamma (α, β) pada data Indeks Kedalaman Kemiskinan Provinsi Lampung Tahun 2016-2020 pada algortima PSO mendapatkan nilai dugaan parameter $\hat{\alpha} = 6.78687$ dan $\hat{\beta} = 3{,}41461.$

DAFTAR PUSTAKA

Arora, R. K. 2015. *Optimization : Algorithms and Applications.* Chapman and Hall/CRC, New York.

Azmi, A. U., Hidayat, R., & Arif, M. Z. 2019. Perbandingan Algoritma Particle Swarm Optimization (PSO) dan Algoritma Glowworm Swarm Optimization (GSO) dalam Penyelesaian Sistem Persamaan Non Linier. *Majalah Matematika dan Statistika.* 19(1) : 1411-6669.

Basuki, A. & Ramadijanti, N. 2004. *Metode Numerik dan Algoritma Komputasi.* Andi, Yogyakarta.

Bickel, P. & Doksum, K. 1977. *Mathematical Statistics : Basic Ideas and Selected Topics.* Holden-day, San Francisco.

Hogg, R.V. & Craig, A. T. 1995. *Introduction to Mathematical Statistics.* 4^{th} Edition. Macmillan inc, New York.

Ilmma, A. 2009. Taksiran Maksimum Likelihood pada Model Persamaan Struktural Nonlinear. Skripsi. Departemen Matematika FMIPA Universitas Indonesia, Depok.

Mazucheli, J., Menezes, A. F. B., & Dey, S. 2017. Improved Maximum Likelihood Estimators for the Parameters of the Unit Gamma Distribution. *Universidade Estadualade de Maringa*. 0(0) : 1-12

Naji, L.F. & Rasheed, H. A. 2019. Estimate the Two Parameters of Gamma Distributions Under Entropy Loss Function. *Iraqi Journal of Science.* 60(1) : 127-134.

Okafor,E. G., *et al.* 2018. Weibull Parameter Estimation Using Particle Swarm Optimization Algorithm. 7(3.32) : 7-10.

Olofsson, P. dan Andersson, M. 2012. *Probability, Statistics, and Stochastic Processes.* 2nd Edition. John Wiley & Sons, New Jersey.

Seber, G.A.F. dan Wild, C.J. 2003. *Non Linear Regression*. Departement of Statistic University Auckland, New Zealand.

Yang, W. Y., Cao, W., Chug, T., & Morris, J. 2005. *Applied Numerical Method Using MATLAB.* New Jersey : John Wiley & Sons, Inc.