TRANSFORMASI MATRIKS DARI RUANG BARISAN SELISIH TINGKAT DUA DELTA SATU, DELTA DUA, DAN DELTA TIGA KE RUANG BARISAN TINGKAT DUA

(Skripsi)

Oleh

Nadya Aristiawati Sitorus

NPM 1817031012

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS LAMPUNG

BANDAR LAMPUNG

2022

ABSTRACT

MATRIX TRANSFORMATION FROM THE SECOND DIFFERENCE SEQUENCE SPACE DELTA ONE, DELTA TWO, AND DELTA THREE TO THE SECOND SEQUENCE SPACE

by

NADYA ARISTIAWATI SITORUS

In this study, the necessary and sufficient conditions are presented so that the transformation of the matrix is linearly continuous from the second difference sequence space delta one, delta two, and delta three to the sequence space of a second-order sequence. Furthermore, some examples are given as an application.

Key words: *matrix transformation, difference sequence space* $\ell_2(\Delta_1), \ell_2(\Delta_2), \ell_2(\Delta_3)$, *second sequence space* (ℓ_2).

ABSTRAK

TRANSFORMASI MATRIKS DARI RUANG BARISAN SELISIH TINGKAT DUA DELTA SATU, DELTA DUA, DAN DELTA TIGA KE RUANG BARISAN TINGKAT DUA

oleh

NADYA ARISTIAWATI SITORUS

Pada kajian ini disajikan syarat perlu dan cukup supaya transformasi matriks bersifat linear kontinu dari ruang barisan selisih tingkat dua delta satu, delta dua, dan delta tiga ke ruang barisan barisan tingkat dua. Selanjutnya diberikan beberapa contoh sebagai penerapannya.

Kata kunci: *transformasi matriks, ruang barisan selisih* $\ell_2(\Delta_1), \ell_2(\Delta_2), \ell_2(\Delta_3)$, *ruang barisan tingkat dua* (ℓ_2).

TRANSFORMASI MATRIKS DARI RUANG BARISAN SELISIH TINGKAT DUA DELTA SATU, DELTA DUA, DAN DELTA TIGA KE RUANG BARISAN TINGKAT DUA

Oleh

Nadya Aristiawati Sitorus

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2022

Judul Skripsi : **TRANSFORMASI MATRIKS DARI RUANG BARISAN SELISIH TINGKAT DUA DELTA SATU, DELTA DUA, DAN DELTA TIGA KE RUANG BARISAN TINGKAT DUA**

Nama Mahasiswa : *Nadya Aristiawati Sitorus*

Nomor Pokok Mahasiswa : **1817031012**

Jurusan : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.	**Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.**
NIP 19720227 199802 1 001	NIP 19760411 200012 2 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

   Ketua : **Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.** ....

   Sekretaris : **Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.** ....

   Penguji
   Bukan Pembimbing : **Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, S.Si., M.T.
NIP 19740705 200003 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **26 April 2022**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama mahasiswa : **NADYA ARISTIAWATI SITORUS**

Nomor Pokok Mahasiswa : **1817031012**

Jurusan : **Matematika**

Judul Skripsi : **Transformasi Matriks Dari Ruang Barisan Selisih Tingkat Dua Delta Satu, Delta Dua, Dan Delta Tiga Ke Ruang Barisan Tingkat Dua**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, Mei 2022

Yang menyatakan,

SEPULUH RIBU RUPIAH 10000 METERAI TEMPEL C88AJX631123176

Nadya Aristiawati Sitorus

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Nadya Aristiawati Sitorus lahir di Bandar Lampung pada 02 Juni 2000. Penulis merupakan anak ketiga dari empat bersaudara pasangan Bapak Rudi Armayn Sitorus dan Ibu Retno Anggraeni Sukardi. Penulis menempuh pendidikan Taman Kanak-kanak di TK Amalia pada tahun 2005-2006. Kemudian melanjutkan sekolah dasar di SD Al-Azhar 1 Bandar Lampung pada tahun 2006-2012. Kemudian melanjutkan pendidikan SMP di MTsN 2 Bandar Lampung pada tahun 2012-2015. Kemudian melanjutkan pendidikan SMA di SMA Al-Kautsar Bandar Lampung pada tahun 2015-2018.

Penulis melanjutkan pendidikan di perguruan tinggi dan terdaftar sebagai mahasiswa S1 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung (Unila) melalui jalur Penerimaan Undangan pada tahun 2018. Kemudian pada tahun 2019, penulis terdaftar sebagai anggota Bidang Eksternal Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA).

Pada awal tahun 2021, penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) selama 40 hari di Kelurahan Pematang Wangi, Bandar Lampung. Kemudian pada pertengahan tahun 2021, penulis melakukan Kerja Praktik (KP) di Badan Pengelola Pajak dan Retribusi Daerah (BPPRD) Kota Bandar Lampung.

KATA INSPIRASI

"Allah tidak membebani seorang hamba melainkan sesuai dengan kemampuannya"
(Q.S. Al-Insyirah : 5)

"Boleh jadi kamu tidak menyenangi sesuatu, padahal itu baik bagimu, dan boleh jadi kamu menyenangi sesuatu, padahal itu tidak baik bagimu. Allah mengetahui, sedang kamu tidak mengetahui."
(Q.S Al Baqarah : 216)

" Ketahuilah bahwa kemenangan bersama kesabaran, kelapangan bersama kesempitan, dan kesulitan bersama kemudahan."
(HR Tirmidzi)

"Barangsiapa yang bersandar kepada baiknya pilihan Allah untuknya, maka dia tidak akan mengangan-angankan sesuatu selain keadaan yang Allah pilihkan untuknya. Inilah batasan sikap selalu ridha terhadap semua ketentuan takdir dalam semua keadaan yang Allah berlakukan bagi hamba-Nya."
(Al- Hasan bin Ali bin Abi Thalib)

" Live your own world, no one can be you or take your world."

" Trust the timing, things happen for a reason."

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirabbil'alamin,

Puji dan syukur saya haturkan kepada Allah Subhanahu Wata'ala atas nikmat dan karunia-Nya,
Shalawat serta salam selalu tercurah kepada baginda Nabi Muhammad
Shallallahu 'Alaihi Wasallam yang telah memberikan kabar gembira kepada umat manusia.

Kupersembakan karya ini kepada:

Bapak dan Ibu

Orang tua tercinta Bapak Rudi Armayn Sitorus dan Ibu Retno Anggraeni atas doa, dukungan dan kasih sayang yang terus diberikan serta kerja keras dalam merawat, membesarkan penulis hingga sekarang.

Kakak dan Adikku

Rulita Maharani Sitorus, Rahmat Prayogi Sitorus dan Arief Wardana Sitorus yang selalu menjadi penyemangat.

Para pendidik, guru – guru, serta dosen yang telah meluangkan waktu untuk
menurunkan ilmunya kepada penulis.

Semua sahabat terbaik yang terus mendukung, menolong, memberikan kebahagiaan, canda , tawa serta memberikan semangat dalam proses hidup penulis.

Almamater Unila dan Negriku Indonesia.

SANWACANA

Puji Syukur kehadirat Allah SWT atas limpahan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Skripsi yang berjudul “Transformasi Matriks dari Ruang Barisan Selisih Tingkat Dua Delta Satu, Delta Dua, dan Delta Tiga ke Ruang Barisan Tingkat Dua” disusun untuk memenuhi salah satu syarat guna memperoleh gelar Sarjana Matematika (S.Mat.) di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini tidak terlepas dari bimbingan, dukungan, saran dan do’a dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dengan ketulusan hati penulis ingin menyampaikan terimakasih kepada:

1. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si. selaku pembimbing I yang selalu bersedia memberikan arahan, bimbingan, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Ibu Asmiati, S.Si., M.Si. selaku pembimbing II yang telah memberikan bimbingan dan saran serta dukungan kepada penulis.
3. Ibu Notiragayu, S.Si., M.Si. selaku penguji yang telah memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis sehingga dapat lebih baik lagi.
4. Ibu Widiarti, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing Akademik penulis.

5. Bapak Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Bapak Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, M.T., selaku dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Seluruh dosen, staf, dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
8. Terkhusus Orang Tua, kakak dan adik yang selalu memberikan kasih sayang, dukungan, nasehat, motivasi serta do’a yang selalu diberikan.
9. Sahabat-sahabat SMP, Hendun dan Elshin terimakasih telah memberikan dukungan, pelajaran hidup dan kenangan kepada penulis.
10. Para sahabat Nane, Mutia, Caca, Shabe, Zahwa, Pia, Sopi yang telah mendoakan, mendukung, dan memberikan kenangan indah selama perkuliahan.
11. Afif Al Hakim yang selalu memberikan semangat serta perhatiannya selama menyelesaikan skripsi ini.
12. Sahabat seperjuangan dalam mengerjakan skripsi, Anggelia, Riska, Muhfida.
13. Teman-teman angkatan 2018 jurusan matematika yang tidak bisa disebutkan satu persatu.
14. Almamater tercinta, Universitas Lampung.

Bandar Lampung,   Mei 2022
Penulis

Nadya Aristiawati Sitorus

DAFTAR SIMBOL DAN NOTASI

(u_k)	= Barisan bilangan dengan $k \in \mathbb{N}$
$\tilde{u}$	= Barisan bilangan tak hingga dengan $\tilde{u} = (u_k) \in \mathbb{R}$
$\tilde{u}^{(i)}$	= Barisan Cauchy dengan $\tilde{u}^{(i)} = \left(\tilde{u}_k{}^{(i)}\right)$
ℓ_p	= Himpunan barisan bilangan dengan $1 \leq p < \infty$
Δ_k	= Selisih ke –k dengan $k \in \mathbb{N}$
$\Delta_k\tilde{u}$	= Barisan selisih ke –k terhadap barisan $\tilde{u} = (u_k)$
$\ell_p(\Delta_k)$	= Himpunan barisan bilangan selisih ke –n dengan $n \in \mathbb{N}$
A	= $[a]_{mn}$ adalah matriks dengan $a_{mn} \in \mathbb{R}$
$\lvert u \rvert$	= Mutlak u
$\lVert\cdot\rVert$	= Norm
{ }	= Himpunan
$\xrightarrow{A}$	= Pemetaan oleh A

DAFTAR ISI

Halaman

I. PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang dan Masalah

Pesatnya perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi mempengaruhi berbagai aspek, tidak lain ilmu matematika yang memiliki peranan penting dalam prosesnya. Teori dasar matematika digunakan sebagai acuan pemikiran sebagai bahan pertimbangan dan pengambilan keputusan. Bidang kajian matematika mengenai analisis ini diantaranya membahas tentang konsep ruang barisan. Salah satu topik mengenai ruang barisan adalah transformasi linear, khususnya transformasi matriks.

Transformasi matriks dapat dilakukan melalui perkalian matriks sehingga, transformasi linear dari $\mathbb{R}^m$ ke $\mathbb{R}^n$ dapat disebut sebagai transformasi matriks. Misalkan matriks $A_{m\times n}$ sebagai transformasi linear dari $\mathbb{R}^m$ ke $\mathbb{R}^n$. Dalam hal ini matriks memetakan barisan $\tilde{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \in \mathbb{R}^m$ ke barisan $\tilde{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\} \in \mathbb{R}^n$. Penelitian ini akan difokuskan pada matriks tak hingga dan mengkaji transformasi pada ruang barisan ke ruang barisan tertentu. Sebagai contoh, misalkan $A = [a_{nk}], n, k = 1,2, \dots$ dan diketahui X dan Y adalah ruang barisan, selanjutnya A dapat dihubungkan dengan suatu transformasi $T_A: X \to Y$, dengan $x = \{x_k\} \in X$ oleh T_A di petakan ke $A(x) \in Y$, maka

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots \\ \vdots \end{bmatrix} \in Y$$

Sehingga $[Ax]_n \equiv A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k$,dengan $A_n(x)$ suatu deret konvergen untuk setiap n. Jadi barisan $\{A_1(x), A_2(x), \ldots\} \in Y$ adalah peta barisan $\{x_1, x_2, \ldots\}$ terhadap transformasi T_A. Matriks tak hingga pada transformasi linear dalam penelitian ini harus memenuhi beberapa syarat agar dapat dilakukan pemetaan tersebut.

Berdasarkan uraian diatas, akan dikaji dan dipelajari syarat transformasi ruang barisan untuk barisan ℓ_2 pada ruang barisan selisih tingkat dua delta satu, delta dua, dan delta tiga mengenai syarat ruang barisan selisih tingkat dua serta mencari bentuk matriks tak hingga seperti apa yang memenuhi. Selanjutnya, dibatasi masalah dalam model penelitian ini adalah $U = \ell_2(\Delta)$, $U = \ell_2(\Delta_2)$, $U = \ell_2(\Delta_3)$ dan $V = \ell_2$.

1.2. Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah mengkaji syarat mentransformasi matriks A yang memetakan dari ruang barisan $U = \ell_2(\Delta)$, $U = \ell_2(\Delta_2)$, $U = \ell_2(\Delta_3)$ ke $V = \ell_2$.

1.3. Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian ini adalah:

1. Mengetahui konsep dan penerapan dari transformasi matriks pada ruang barisan selisih.
2. Dapat memberi referensi untuk meneliti lebih lanjut mengenai transformasi matriks pada ruang barisan selisih lainnya.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Barisan

Definisi 2.1.1

Jika $X : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ adalah barisan bilangan real maka nilai fungsi X di $n \in \mathbb{N}$ dinotasikan sebagai (x_n) (Bartle dan Sherbert, 2000).

Contoh:
Diberikan barisan $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ dengan $n = 1,2,3, \dots$.

Sehingga $\left(\frac{1}{n}\right) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$ merupakan barisan real.

Definisi 2.1.2

Barisan bilangan real $(x_n : n \in \mathbb{N})$ dikatakan konvergen ke $x \in \mathbb{R}$, limit dari $(x_n : n \in \mathbb{N})$, apabila $\forall\, \varepsilon > 0$ ada bilangan asli $\mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall\, n \geq \mathbb{N}$ maka $|x_n - x| < \varepsilon$. Pernyataan barisan bilangan real X konvergen atau menuju x dapat dinyatakan sebagai

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ atau } x_n \to x$$

Titik x disebut titik limit barisan (x_n) (Bartle dan Sherbert, 2000).

2.2. Ruang Barisan

Definisi 2.2.1

Menurut Darmawijaya (2007), diberikan X yaitu koleksi semua barisan bilangan real, $X = \{\tilde{u} = (u_k) : u_k \in \mathbb{R}\}$ $\forall\, p \in \mathbb{R}$ dengan $1 \leq p < \infty$ didefinisikan:

$$\ell_p = \left\{ \tilde{u} = (u_k) \subset \mathbb{R} : \left(\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

dan norm pada ℓ_p yaitu

$$\|\tilde{u}\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Definisi 2.2.2

Himpunan dari barisan bilangan disebut ruang barisan ℓ_p apabila memenuhi syarat berikut:

$$\ell_p = \{\tilde{x} = (x_n) \subset \mathbb{R} : \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$$

ℓ_p koleksi barisan bilangan yang $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$.

$$\ell_p(\Delta) = \left\{ \tilde{x} = (x_n) : \Delta x \in \ell_p \right\}$$

$\ell_p(\Delta)$ koleksi barisan bilangan yang $\Delta x \in \ell_p$.

$$\ell_p(\Delta_2) = \left\{ \tilde{x} = (x_n) : \Delta_2 x \in \ell_p \right\}$$

$\ell_p(\Delta_2)$ koleksi barisan bilangan yang $\Delta_2 x \in \ell_p$

(H.Kizmaz, 1981).

2.3. Ruang Vektor

Definisi 2.3.1

Ruang vektor atau ruang linear adalah himpunan tak kosong vektor V yang dapat dijumlahkan dan dikalian skalar dengan suatu bilangan menghasilkan vektor yang memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. $r + s \in V$
2. $r + s = s + r$
3. ada $0 \in V$, sehingga $0 + s = s + 0 = s$
4. $r + (s + t) = (r + s) + t$
5. ada $-s \in V$, sehingga $s + (-s) = (-s) + s = 0$
6. $kr \in V$
7. $k(r + s) = kr + ks$
8. $(k + 1)r = kr + 1r$
9. $k(mr) = (km)r$
10. $1r = r$

2.4. Ruang Bernorm

Definisi 2.4.1

Ruang linear dikatakan bernorm jika terdapat fungsi $\|\cdot\| : U \to \mathbb{R}$ yang memenuhi aksioma:

1. $\|u\| \geq 0$ $\quad\forall\, u \in U$;
   $\|u\| = 0$ $\quad$jika dan hanya jika $u = 0$
2. $\|\alpha u\| = |\alpha| \cdot \|u\|$ $\quad\forall\, \alpha$ dan $u \in U$;
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ $\quad\forall\, u, v \in U$

sehingga bilangan non negatif $\|x\|$ disebut norm vektor x, dengan notasi $(X, \|\cdot\|)$ (Darmawijaya, 2007).

Teorema 2.4.2

Ruang bernorm terhadap norm $\|\cdot\|_p$ merupakan ruang barisan $\ell_p (1 \leq p < \infty)$ (Darmawijaya, 2007).

Bukti:

Diberikan sebarang $\tilde{x} = (x_n), \tilde{y} = (y_n) \in \ell_p$ dengan $1 \leq p < \infty$ dan skalar α sehingga diperoleh:

1. $\|\tilde{x}\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \geq 0$ karena $|x_n| \geq 0$ untuk setiap n.

   $\|\tilde{x}\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} = 0 \Leftrightarrow |x_n| \geq 0 \ \ \forall\, n \Leftrightarrow \tilde{x} = \{0\} = \tilde{0}$
2. $\|\alpha\tilde{x}\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha x_n|^p)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \|x\|_p$

   Jelas bahwa $\|\alpha x\|_p < \infty$.
3. $\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_p \leq \|\tilde{x}\|_p + \|\tilde{y}\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty$

Berdasarkan 1,2 dan 3 terbukti bahwa ℓ_p merupakan ruang linear dan norm $\|\cdot\|_p$ pada norm ℓ_p. Jadi, $\left(\ell_p\, , \|\cdot\|_p\right)$ ruang bernorm.

Definisi 2.4.3

Barisan Cauchy adalah barisan (x_n) di ruang bernorm $(X, \|\cdot\|)$ jika $\forall\, \varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$, sedemikian sehingga $\forall\, m, n \geq n_0$ berlaku $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ (Bartle dan Sherbert, 2000).

Contoh:

Misalkan $\left(\frac{1}{n}\right)$ merupakan barisan Cauchy. Diberikan $\varepsilon > 0$, pilih $n_0 \in \mathbb{N}$.

Maka $\forall\, m, n \geq n_0$ berlaku $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$.

Bukti:

Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, jika $m, n \geq n_0$ maka $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_0}$, $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}$

Tinjau:

$\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \left|\frac{1}{m}\right| + \left|-\frac{1}{n}\right|$

$$\leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} = \frac{2}{n_0} < \varepsilon$$

Pilih $n_0 > \frac{2}{\varepsilon}$ sehingga jika $m, n \geq n_0$ maka

$$\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} = \frac{2}{n_0} < \varepsilon$$

Teorema 2.4.4

Barisan Cauchy merupakan barisan yang konvergen di dalam ruang bernorm $(X, \|\cdot\|)$ (Bartle dan Sherbert, 2000).

Bukti:

Diberikan $(x_n) \in X$ dengan $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ dan $\varepsilon < 0$ maka $\exists\, n \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga berlaku $d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall\, n \geq \mathbb{N}$, akibatnya $m, n \geq \mathbb{N}$ berlaku $d(x_m, x_n) \leq d(x, x_m) + d(x, x_n) < \varepsilon$.

Definisi 2.4.5

Jika setiap barisan Cauchy konvergen maka dapat disebut ruang bernorm yang lengkap (Bartle dan Sherbert, 2000).

Teorema 2.4.6

Ketaksamaan Young; diberikan $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dan $p > 0$, $q < \infty$. Sehingga untuk skalar α dan β benar untuk $|\alpha\beta| \leq \frac{|\alpha|^p}{p} + \frac{|\beta|^q}{q}$ (Darmawijaya, 2007).

Bukti:

Benar bahwa $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ kemudian $+q = pq$,$\frac{p}{q} = \frac{1}{q-1}$ dan $\frac{q}{p} = \frac{1}{p-1}$, diambil kurva $y = x^{p-1}$; jadi $x = y^{q-1}$. Diperoleh $|\alpha\beta| =$ L persegi panjang $\leq$ L I + L II yaitu

$$|\alpha\beta| \leq \int_0^{|\alpha|} x^{p-1}dx + \int_0^{|\beta|} y^{q-1}dy = \frac{|\alpha|^p}{p} + \frac{|\beta|^q}{q}$$

Teorema 2.4.7 (Ketaksamaan Ho'lder)

1. Jika $\tilde{u} = (u_k) \in \ell_1$ dan $\tilde{v} = (v_k) \in \ell_\infty$ maka

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |u_k v_k| \leq \|\tilde{u}\|_1 \cdot \|\tilde{v}\|_\infty$$

2. Diketahui $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dan $p \geq 1, q < \infty$ maka

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |u_k v_k| \leq \|\tilde{u}\|_p \cdot \|v\|_q$$

(Darmawijaya, 2007).

Bukti:

1. Jika $\tilde{u} = (u_k) \in \ell_1$ dan $\tilde{v} = (v_k) \in \ell_\infty$ cukup jelas bahwa

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |u_k v_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |u_k| \cdot |v_k|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} |u_k| \cdot \sup_{k\geq 1} |v_k| = \|\tilde{u}\|_1 \cdot \|\tilde{v}\|_\infty$$

Terbukti.

2. Jika $\tilde{u} = (u_k) \in \ell_p$ dan $\tilde{v} = (v_k) \in \ell_p$ cukup jelas bahwa

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |u_k v_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |u_k| \cdot |v_k|$$

Karena $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dapat kita buktikan bahwa

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k| \cdot |v_k| \leq \|\tilde{u}\|_p \cdot \|\tilde{v}\|_q \text{ atau } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u_k|}{\|\tilde{u}\|_p} \cdot \frac{|v_k|}{\|\tilde{v}\|_q} \leq 1$$

dengan Teorema Young diperoleh

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u_k|}{\|\tilde{u}\|_p} \cdot \frac{|v_k|}{\|\tilde{v}\|_q} \leq \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p}\left(\frac{|u_k|}{\|\tilde{u}\|_p}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{|v_k|}{\|\tilde{v}\|_q}\right)^q\right)$$

$$= \frac{1}{p}\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|u_k|}{\|\tilde{u}\|_p}\right)^p + \frac{1}{q}\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|v_k|}{\|\tilde{v}\|_q}\right)^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Terbukti.

Teorema 2.4.8

Ketaksamaan Minkowski ialah jika $1 \leq p < \infty$ maka $\forall\, \tilde{u} = (u_k),\ \tilde{v} = (v_k) \in \ell_p$ benar bahwa:

$$\|u_k + v_k\|_p \leq \|\tilde{u}\|_p + \|\tilde{v}\|_p$$

Bukti:

Jika $p = \infty$, diperoleh

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u} + \tilde{v}\|_\infty &= sup_{k\geq 1}|u_k + v_k| \\
&\leq sup_{k\geq 1}\{|u_k| + |v_k|\} \\
&\leq sup_{k\geq 1}|u_k| + sup_{k\geq 1}|v_k| \\
&= \|\tilde{u}\|_\infty + \|\tilde{v}\|_\infty
\end{aligned}$$

Jika $p = 1$, diperoleh

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u} + \tilde{v}\|_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} |u_k + v_k| \\
&\leq \textstyle\sum_{k=1}^{\infty}|u_k| + \sum_{k=1}^{\infty}|v_k| \\
&= \|\tilde{u}\|_1 + \|\tilde{v}\|_1
\end{aligned}$$

Jika $1 \leq p < \infty$, diperoleh

$$\begin{aligned}
|u_k + v_k|^p &= |u_k + v_k| \cdot |u_k + v_k|^{p-1} \\
&\leq |u_k| \cdot |u_k + v_k|^{p-1} + |v_k||u_k + v_k|^{p-1}
\end{aligned}$$

$\forall n$ dijumlahkan untuk seluruh n dan kemudian diperoleh:

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{k=1}^{\infty}|u_k + v_k|^p &\leq \textstyle\sum_{k=1}^{\infty}|u_k| \cdot |u_k + v_k|^{p-1} + \sum_{n=1}^{\infty}|v_k| \cdot |u_k + v_k|^{p-1} \\
&\leq \|\tilde{u}\|_p \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} (|u_k + v_k|^{p-1})^q\right)^{\frac{1}{q}} + \|\tilde{v}\|_p \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} (|u_k + v_k|^{p-1})^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\|\tilde{u}\|_p + \|\tilde{v}\|_p\right) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (|u_k + v_k|^p)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned}
\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_p &= \left(\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}(|x_n + y_n|^{p-1})^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|\tilde{x}\|_p + \|\tilde{y}\|_p
\end{aligned}$$

2.5. Ruang Banach

Definisi 2.5.1

Ruang banach adalah suatu ruang vektor bernorm yang lengkap (Darmawijaya, 2007).

Teorema 2.5.2

Ruang banach dengan $1 \leq p < \infty,\ p \in \mathbb{R}$, maka $\left(\ell_p, \|\cdot\|_p\right)$ (Darmawijaya, 2007).

Bukti:

Sudah terbukti $\left(\ell_p, \|\cdot\|_p\right)$ merupakan ruang Bernorm, sehingga akan dibuktikan bahwa ruang Bernorm itu lengkap. Akan ditunjukkan untuk $1 \leq p < \infty$, diambil sebarang barisan Cauchy $\tilde{u}^{(j)} \subset \ell_p$ dengan

a) $\tilde{u}^{(j)} = \left(\tilde{u}_k{}^{(j)}\right) = \left\{\tilde{u}_1{}^{(j)}, \tilde{u}_2{}^{(j)}, \tilde{u}_3{}^{(j)}, \ldots\right\}$

Untuk sebarang $\varepsilon > 0\ \exists\ n_0$ sehingga $\forall\ i, j \geq n_0$ berlaku

b) $\left\|\tilde{u}^{(i)} - \tilde{u}^{(j)}\right\|_p < \frac{\varepsilon}{4}$ atau $\sum_{k=1}^{\infty}\left|\tilde{u}_k{}^{(i)} - \tilde{u}_k{}^{(j)}\right|^p < \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^p$

Hal ini mengakibatkan $\forall\ i, j > 0$ diperoleh $\left|\tilde{u}_k{}^{(i)} - \tilde{u}_k{}^{(j)}\right| < \frac{\varepsilon}{4},\ \ \forall\ k.$ Sehingga diperoleh barisan Cauchy $\tilde{x}_k{}^{(j)}\ \ \forall\ k.$ Jadi terdapat bilangan x_k sehingga $\lim\limits_{j\to\infty} \tilde{u}_k{}^{(j)} = u_k$ atau $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\tilde{u}_k{}^{(j)} - x_k\right| = 0.$

c) $\left(\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|u_k - u_k{}^{(j)} + u_k{}^{(j)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

$$= \lim_{i\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|u_k{}^{(i)} - u_k{}^{(j)} + u_k{}^{(j)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \lim_{i\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|u_k{}^{(i)} - u_k{}^{(j)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|u_k{}^{(j)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

yang berarti $\tilde{u} = (u_k) \in \ell_p$.

d) $\|\tilde{x}-\tilde{x}^{(j)}\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty}|u_k - u_k{}^{(j)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|u_k - u_k{}^{(j)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{4}$ maka barisan $\left(\tilde{x}^{(j)}\right)$ konvergen ke $\tilde{x}$.

Berdasarkan hasil c) dan d), terbukti bahwa barisan Cauchy $\left(\tilde{x}^{(j)}\right) \subset \ell_p$ konvergen ke $\tilde{u} = (u_k) \in \ell_p$ atau terbukti bahwa $\left(\ell_p, \|\cdot\|_p\right), 1 \le p < \infty$ merupakan ruang Banach.

2.6. Operator Linear

Definisi 2.6.1

Operator merupakan suatu pemetaan pada ruang linear khususnya ruang bernorm (Kreyszig, 1989).

Definisi 2.6.2

Diberikan ruang bernorm X dan Y atas lapangan yang sama (Kreyszig, 1989).

1. Misalkan X dipetakan Y, maka pemetaan tersebut dinamakan operator.
2. Jika $\forall\, x, y \in X$ dan $\forall$ skalar c berlaku $A(cx) = cAx$ dan $A(x+y) = Ax + Ay$ terpenuhi, maka dapat didefinisikan operator $A : X \to Y$ bersifat linear.

Definisi 2.6.3

Misal diberikan $(X, \|\cdot\|)$ dan $(Y, \|\cdot\|)$ masing-masing ruang bernorm.

1. Jika $\exists\, M \in \mathbb{R}$ dengan $M \ge 0$ sehingga $\forall x \in X$ berlaku $\|Ax\| \le M\|x\|$ terpenuhi, maka operator $A : X \to Y$ terbatas.
2. Diberikan $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sehingga $\forall\, x, y \in X$ dengan $\|x - y\| \le \delta$ berlaku $\|Ax - Ay\| \le \varepsilon$. Jadi operator A dikatakan kontinu di $x \in X$.

Jika A kontinu di setiap $x \in X$, maka A disebut kontinu pada X.
(Kreyszig 1989).

2.7. Ruang Barisan Selisih

Definisi 2.7.1

Misalkan $\tilde{x} = (x_n)$ dan $\Delta\tilde{x} = (x_{n+1} - x_n)\ \forall\ n \in \mathbb{N}$,

$\Delta\tilde{x}$ disebut barisan selisih pertama terhadap barisan $\tilde{x} = (x_n)$

$$\vdots$$

$\Delta_m\tilde{x} = \left(\Delta_m\tilde{x}_n = \sum_{i=0}^{m}(-1)^i \binom{m}{i} x_{n+m-i}\right)$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

$\Delta_m\tilde{x}$ disebut barisan selisih ke-m terhadap barisan $\tilde{x} = (x_n)$.

Dari uraian di atas sehingga terbentuklah barisan bilangan selisih pertama $\Delta\tilde{x} = (\Delta x_n)$, barisan selisih kedua $\Delta_2\tilde{x} = (\Delta_2 x_n)$, dan seterusnya sampai barisan selisih ke-m $\Delta_m x_m = (\Delta_m x_n)$ (H.Kizmaz, 1981).

Contoh:

1. Misal $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$

   didefinisikan $(x_n) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}\right\}$

   untuk setiap $n = 1,2,3,4, \dots$

   akan dicari $\Delta_2\tilde{x}$

   $\Delta_2\tilde{x} = \{(x_3 - 2x_2 + x_1), (x_4 - 2x_3 + x_2), \dots\}$

   $\Delta_2\tilde{x} = \left\{\left(\frac{1}{3} - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1\right), \left(\frac{1}{4} - 2\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\right), \dots\right\}$

   $\Delta_2\tilde{x} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \dots\right\}$

Kemudian didapat barisan selisih yang kedua yaitu

$$\Delta_2\tilde{x} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \dots\right\}$$

2.8. Transformasi Linear

Definisi 2.8.1

Pemetaan dari suatu ruang vektor V ke ruang vektor W, $T : V \to W$ disebut transformasi linear apabila semua vektor r dan s pada V dan semua skalar c memenuhi:

1. $T(r + s) = T(r) + T(s)$
2. $T(cr) = cT(r)$

Terdapat suatu dimana $V = W$, sehingga transformasi linear $T : V \to W$ dikatakan operator linear pada V (Anton dan Rorres, 2004).

Contoh:

Diberikan suatu matriks $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ dan didefinisikan suatu fungsi transformasi $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ oleh $T_A(r) = A_r$ untuk setiap $r \in \mathbb{R}^n$.
Dengan sifat perkalian matriks, maka $\forall\, r, s \in \mathbb{R}^n$ dan $k \in \mathbb{R}$ diperoleh:
$T_A(kr + s) = A(kr + s) = A(kr) + A(s) = k(Ar) + (As) = kT_A(r) + T_A(s).$
Sehingga T_A merupakan transformasi linear dan dinamakan transformasi matriks.

Setelah diberikan definisi dari transformasi linear, berikut diberikan definisi mengenai matriks takhingga.

Definisi 2.8.2

Menurut Berberian (1996),

a. $A = [a]_{ij}$ dengan $a_{ij} \in \mathbb{R}$ adalah matriks tak terhingga apabila elemen pada baris dan kolom nya sebanyak tak terhingga.
b. $A = [a]_{ij}$ dan $B = [b]_{ij}$ merupakan matriks takhingga dan skalar α, berlaku $A + B = [a_{ij} + b_{ij}], \alpha A = [\alpha a_{ij}]$ dan $AB = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} b_{jk}\right)$ dengan $\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} b_{jk}\right) \in \mathbb{R}$.

III. METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun akademik 2021/2022 di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan ialah studi pustaka, yaitu mempelajari jurnal dan buku terkait sebagai acuan dasar pada proses penelitian. Adapun langkah yang dilakukan dalam penelitian ini antara lain:

1. Memaparkan beberapa sifat ruang barisan $\ell_2, \ell_2(\Delta), \ell_2(\Delta_2)$ dan $\ell_2(\Delta_3)$ yang merupakan ruang linear, ruang bernorm dan ruang banach.
2. Menyelidiki $A : \ell_2(\Delta) \to \ell_2$
3. Menyelidiki $A : \ell_2(\Delta_2) \to \ell_2$
4. Menyelidiki $A : \ell_2(\Delta_3) \to \ell_2$
5. Membuktikan transformasi matriks dari $A : x \to y$

V. KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dilakukan sebelumnya, dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Operator $A : \ell_2(\Delta_1) \to \ell_2$ bersifat linear kontinu jika dan hanya jika ada matriks takhingga $[a_{mn}]$ dengan
$$\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|a_{mn}|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$
dan $A(u) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{mn}\, u_n\right) \in \ell_2$ untuk setiap $\tilde{u} \in \ell_2(\Delta_1) \subset \ell_2$ dengan komponen $u_1 = 0$.
2. Operator $A : \ell_2(\Delta_2) \to \ell_2$ bersifat linear kontinu jika dan hanya jika ada matriks takhingga $[a_{mn}]$ dengan
$$\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|a_{mn}|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$
dan $A(u) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{mn}\, u_n\right) \in \ell_2$ untuk setiap $\tilde{u} \in \ell_2(\Delta_2) \subset \ell_2$ dengan komponen $u_1 = 0, u_2 = 0$.
3. Operator $A : \ell_2(\Delta_3) \to \ell_2$ bersifat linear kontinu jika dan hanya jika ada matriks takhingga $[a_{mn}]$ dengan
$$\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|a_{mn}|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$
dan $A(u) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{mn}\, u_n\right) \in \ell_2$ untuk setiap $\tilde{u} \in \ell_2(\Delta_3) \subset \ell_2$ dengan komponen $u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 0$.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. & Rorres, C. 2004. *Aljabar Linear Elementer.* Ed ke-8. Terjemahan Refina Indiasari, Irzam Harmein. Jakarta. Erlangga.

Bartle, R.G. & Sherbert, D.R. 2000. *Introduction to Real Analysis*. John Wilwey & Sons, Inc. Third Edition.

Berberian, S.K. 1961. *Introduction to Hilbert Space*. Oxford University Press, New York.

Darmawijaya, S. 2007. *Pengantar Analisis Abstrak.* Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.

Kizmaz, H.1981. On Certain Sequence Space. *Journals Canadian Mathematical Bulletin*. 24(2): 169-176.

Kreyszig, E. 1989. *Introductory Function Analysis with Application.* Willey Classic Library, New York.

Puspita, D.A. 2020. Transformasi Matriks Pada Ruang Barisan Selisih Tingkat Dua. Skripsi. Jurusan Matematika FMIPA Unila, Bandar Lampung.