REGRESI NONPARAMETRIK METODE KERNEL DENGAN ESTIMATOR GASSER-MULLER PADA DATA CURAH HUJAN DI PROVINSI LAMPUNG

(Skripsi)

Oleh

SHOFIYYAH FAUZIAH SAYUTI

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2022

ABSTRACT

THE NONPARAMETRIC REGRESSION OF KERNEL METHOD USING GASSER-MULLER ESTIMATOR ON RAINFALL DATA IN LAMPUNG PROVINCE

By

SHOFIYYAH FAUZIAH SAYUTI

Parametric regression and nonparametric regression are two methods used in regression analysis. In parametric regression, there are several assumptions that must be met, such as the normality of the, the distribution of data that forms a certain pattern, and others, while in nonparametric regression it does not depend on these assumptions. To estimate the nonparametric regression function, smoothing techniques are needed, one of which is the kernel method. This study aims to estimate the nonparametric regression curve using the Gasser-Muller kernel estimator method with the Epanechnikov kernel function using the optimal bandwidth (h) for rainfall data in Lampung Province and to compare the models using Mean Square Error (MSE), Mean Absolute Percentage Error (MAPE), and Coefficient of Determination (R^2). From the calculation of the window width formula (bandwidth) from Silvermen, the optimal bandwidth (h) value is $hopt_2 =$ 3.995 and by using the Generalized Cross Validation (GCV) method, the optimal bandwidth (h) value is $hopt_2 =$ 5.564. In addition, by looking at the values of MSE, MAPE, and R^2, it is found that the bandwidth value (h) $hopt_1 =$ 3.995 is better in estimating the curve than $hopt_2 =$ 5.564..

Keywords: Regression Analysis, Kernel Method, Gasser-Muller Estimator, Epanechnikov Kernel Function, Bandwidth, Rainfall Data

ABSTRAK

REGRESI NONPARAMETRIK METODE KERNEL DENGAN ESTIMATOR GASSER-MULLER PADA DATA CURAH HUJAN DI PROVINSI LAMPUNG

Oleh

SHOFIYYAH FAUZIAH SAYUTI

Regresi parametrik dan regresi nonparametrik merupakan dua metode yang digunakan dalam analisis regresi. Pada regresi parametrik ada asumsi-asumsi yang perlu dipenuhi seperti kenormalan data, data yang sebarannya membentuk pola tertentu, dan lain sebagainya sedangkan pada regresi nonparametrik tidak bergantung pada asumsi-asumsi tersebut. Untuk mengestimasi fungsi regresi nonparametrik diperlukan teknik pemulusan, salah satunya adalah metode kernel. Penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan estimasi kurva regresi nonparametrik dengan metode kernel estimator Gasser-Muller fungsi kernel Epanechnikov menggunakan bandwidth (h) optimal pada data curah hujan di Provinsi Lampung, serta membandingkan model yang telah dibentuk menggunakan Mean Square Error (MSE), Mean Absolute Percentage Error (MAPE), dan Koefisien Determinasi (R^2). Dari hasil perhitungan rumus lebar jedela (bandwidth) dari Silvermen diperoleh nilai bandwidth (h) optimal yaitu $\mathrm{hopt}_1 =$ 3,995 dan diperoleh nilai bandwidth (h) optimal yaitu $\mathrm{hopt}_2 =$ 5,564 dengan memakai metode Generalized Cross Validation (GCV). Selain itu dengan melihat nilai MSE, MAPE, dan R^2, didapat bahwa nilai bandwidth (h) $\mathrm{hopt}_1 =$ 3,995 lebih baik dalam mengestimasi kurva dibandingkan $\mathrm{hopt}_2 =$ 5,564.

Kata kunci: Analisis Regresi, Metode Kernel, Estimator Gasser-Muller, Fungsi Kernel Epanechnikov, Bandwidth, Data Curah Hujan

REGRESI NONPARAMETRIK METODE KERNEL DENGAN ESTIMATOR GASSER-MULLER PADA DATA CURAH HUJAN DI PROVINSI LAMPUNG

Oleh

Shofiyyah Fauziah Sayuti

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2022

Judul Skripsi	: **REGRESI NONPARAMETRIK METODE KERNEL DENGAN ESTIMATOR GASSER-MULLER PADA DATA CURAH HUJAN DI PROVINSI LAMPUNG**
Nama Mahasiswa	: Shofiyyah Fauziah Sayuti
Nomor Pokok Mahasiswa	: 1817031030
Program Studi	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Ir. Netti Herawati, M.Sc., Ph.D.
NIP 196501251990032001

Subian Saidi, S.Si., M.Si.
NIP 19800821200812100

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Ir. Netti Herawati, M.Sc., Ph.D.** ....

Sekretaris : **Subian Saidi, S.Si., M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Dr. Khoirin Nisa, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, S.Si., M.T.
NIP 19740705 200003 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : 08 Juni 2022

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama mahasiswa	: **SHOFIYYAH FAUZIAH SAYUTI**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1817031030**
Jurusan	: **Matematika**
Judul Skripsi	: **Regresi Nonparametrik Metode Kernel dengan Estimator Gasser-Muller pada Data Curah Hujan di Provinsi Lampung**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung,   Juni 2022

Yang menyatakan,

Shofiyyah Fauziah Sayuti

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Shofiyyah Fauziah Sayuti, anak terakhir dari tiga bersaudara yang dilahirkan di Bandar Lampung pada tanggal 21 Maret 2001 dari pasangan Bapak Ayub Suhada Sayuti dan Ibu Sri Elyani. Penulis menyelesaikan pendidikan sekolah dasar di SD Taman Siswa Teluk Betung pada tahun 2006 s.d. 2012, sekolah menengah pertama di MTsN 1 Bandar Lampung pada tahun 2012 s.d. 2015, dan sekolah menengah atas di SMA Negeri 10 Bandar Lampung pada tahun 2015 s.d. 2018.

Pada tahun 2018 penulis terdaftar sebagai mahasiswa S1 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur SNMPTN. Selama menjadi mahasiswa, penulis ikut serta dalam Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA) sebagai anggota Bidang Eksternal.

Pada tahun 2021, sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu di dunia kerja, penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Badan Pusat Statistik Kota Bandar Lampung dan sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat, penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Kelurahan Keteguhan, Kota Bandar Lampung.

KATA INSPIRASI

"*Allah tidak membebani seorang hamba melainkan sesuai dengan kemampuannya*"

(Q.S. Al-Insyirah: 5)

"Apa yang melewatkanku tidak akan pernah menjadi takdirku, dan apa yang ditakdirkan untukku tidak akan pernah melewatkanku."

(Umar bin Khattab)

"Sesungguhnya jarak antara masalah dan jalan keluar, seperti jarak antara dahimu dan bumi (tanah). Maka sujudlah dan mendekatlah"

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirabbil'alamin,
Puji dan syukur tiada hentinya terhaturkan kepada Allah SWT
Kupersembakan karya ini kepada:

Diri Sendiri

Terima kasih untuk tetap selalu berusaha di segala keadaan untuk mengembangkan diri dan menjadi pribadi yang lebih baik .

Ayah, Ibu, dan Kakak

Orang tuaku tercinta, Bapak Ayub Suhada Sayuti dan Ibu Sri Elyani serta kakak-kakakku tersayang, Yusiani Zahara Sayuti dan Azizah Zubaidah Sayuti yang selalu memberikan doa, dukungan dan kasih sayang.

Dosen

Dosen-dosen pembimbing dan pembahas yang sangat berjasa dalam membimbing dan memberikan masukan yang membangun serta menyampaikan ilmu kepadaku.

Sahabat-sahabatku

Para sahabat tersayang yang terus saling mendukung, menolong, serta memberikan warna dalam hidupku.

Almamater kebanggaan, Universitas Lampung.

SANWACANA

Puji dan syukur penulis ucapkan kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Regresi Nonparametrik Metode Kernel dengan Estimator Gasser-Muller pada Data Curah Hujan di Provinsi Lampung”.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini tidak terlepas dari bimbingan, dukungan, bantuan dan doa dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dengan ketulusan hati penulis ingin menyampaikan terimakasih kepada:

1. Ibu Ir. Netti Herawati, M.Sc., Ph.D. selaku Dosen Pembimbing I sekaligus Dosen Pembimbing Akademik yang senantiasa selalu membimbing dan memberikan arahan, kritik, dan saran serta dukungan kepada penulis selama proses perkuliahan dan pembuatan skripsi ini.
2. Bapak Subian Saidi, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing II yang telah memberikan bimbingan serta saran yang membantu kepada penulis dalam proses penyelesaian skripsi ini..
3. Dr. Khoirin Nisa, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembahas atas ketersediaannya untuk membahas serta memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis dalam penyelesaian skripsi ini.

4. Bapak Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
5. Bapak Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, M.T., selaku dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Seluruh dosen, staf, dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Ayah, ibu, kakak dan seluruh keluarga besar yang selalu memberikan kasih sayang, dukungan, nasihat, motivasi serta doa kepada penulis.
8. Sahabat-sahabat seperjuangan: Caca, Lutfia, Shabrina, Nadya, Nanda, Mutia, dan Zahwa yang telah saling mendoakan, mendukung, dan memberikan kenangan indah selama menjalani masa perkuliahan.
9. Sahabat-sahabat terbaikku: Naufal, Noly, Mila, Nabilah, Eksya. Windi, dan Getar yang selalu memberikan semangat serta perhatiannya selama menyelesaikan skripsi ini.
10. Teman-teman Matematika 2018, terima kasih atas kebersamaannya.
11. Almamater tercinta, Universitas Lampung.
12. Seluruh pihak yang telah membantu yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Bandar Lampung, Juni 2022
Penulis

Shofiyyah Fauziah Sayuti

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Analisis regresi adalah ilmu statistika yang berguna dalam melakukan analisis korelasi antara variabel prediktor (X) dan variabel respon (Y). Kurva regresi merupakan kurva yang nantinya akan menjelaskan korelasi antara dua variabel atau lebih tersebut (Sukarsa & Srinadi, 2012). Pada analisis regresi terdapat dua metode yang digunakan yaitu parametrik dan nonparametrik. Terdapat beberapa asumsi yang perlu dipenuhi saat menggunakan regresi parametrik, seperti kenormalan data, data yang sebarannya membentuk pola tertentu, dan lain sebagainya sedangkan pada penggunaan regresi nonparametrik asumsi yang digunakan hanya sedikit bahkan pendekatan ini dikatakan sebagai media analisis data yang berdistribusi bebas atau *free distribution*. Sehingga dapat dikatakan bahwa regresi nonparametrik ini tidaklah bergantung pada beberapa asumsi yang diperlukan seperti dalam regresi parametrik. Untuk mengestimasi fungsi regresi nonparametrik diperlukan teknik pemulusan yang terdiri dari beberapa metode antara lain histogram, estimator kernel, estimator spline, deret fourier, dan wavelet (Eubank, 1998).

Dalam regresi nonparametrik, metode kernel merupakan metode yang cukup sering digunakan. Metode ini disebut sebagai pengembangan dari estimator histogram. Metode ini memiliki sifat fleksibel dan memiliki perhitungan matematis yang mudah diselaraskan serta memiliki nilai rataan memusat yang relatif cepat. Kelebihan lain dari metode ini yaitu mampu memodelkan data yang tidak memiliki pola tertentu dengan baik. Penggunaan *bandwidth* atau penghalus yang lebih khusus menjadi letak perbedaan metode kernel dengan metode regresi nonparametrik lainnya (Hardle, 1994). Dalam pengoperasiannya, pemilihan fungsi kernel dan *bandwidth* yang optimal sangat dibutuhkan karena langkah tersebut sangat penting dilakukan dalam teknik pemulusan. Metode yang sering kali digunakan untuk mencari *bandwidth* yang optimal diantaranya adalah menggunakan rumus lebar jendela (*bandwidth*) dari Silvermen dan *Generalized Cross Validation* (CGV).

Untuk mendapatkan output yang optimal dari penelitian yang dilakukan, tidak sedikit peneliti yang menggunakan regresi nonparametrik metode kernel. Seperti pada penelitian yang dilakukan oleh Dedeh Kurniasih yang mengulas tentang peramalan USD terhadap JYP menggunakan estimator Nadaraya-Watson fungsi kernel Gaussian dengan estimator polinomial (Kurniasih, dkk., 2013). Penelitian lain juga dilakukan oleh Agni Horti Maharani, dkk. yang membahas tentang regresi nonparametrik metode kernel dengan fungsi kernel Gaussian dalam memodelkan berat badan balita berdasarkan umur (Maharani, dkk., 2015). Lalu penelitian lainnya juga dilakukan oleh Subian Saidi, dkk. yang melakukan estimasi terhadap data Covid-19 di Indonesia tahun 2020 menggunakan pemodelan regresi nonparametrik metode kernel (Saidi, dkk., 2021).

Berdasarkan penelitian-penelitian sebelumnya, peneliti pun tertarik untuk melakukan penelitian terhadap data curah hujan di Provinsi Lampung menggunakan regresi nonparametrik kernel. Curah hujan didefinisikan sebagai jumlah air yang turun ke permukaan bumi. Banyak curah hujan pada satuan waktu digunakan untuk menyatakan derajat curah hujan. Satuan yang biasanya digunakan adalah mm/jam (Sinurat, dkk., 2016). Menurut Wilson (1993), kelembaban udara adalah salah satu faktor yang mempengaruhi banyaknya curah hujan. Dipilihnya data curah hujan dikarenakan data ini merupakan data deret waktu yang bergerak secara tren, sehingga pola sebaran data ini diasumsikan tidak memiliki pola sebaran yang normal sehingga dalam penelitian ini digunakan metode regresi nonparametrik untuk mendekati pola sebaran data curah hujan di Provinsi Lampung.

Pada penelitian-penelitian sebelumnya estimator pada estimator kernel yang kerap kali digunakan adalah Nadaraya-Watson, tetapi pada penelitian ini akan dilakukan estimasi kurva regresi nonparametrik kernel menggunakan estimator Gasser-Muller dengan fungsi Kernel Epanechnikov serta melakukan pemilihan *bandwidth* yang optimal menggunakan rumus lebar jendela (*bandwidth*) dari Silvermen dan G*eneralized Cross Validation* (CGV) pada data curah hujan di Provinsi Lampung.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menentukan *bandwidth* (h) optimal pada estimator Gasser-Muller dengan rumus lebar jendela (*bandwidth*) dari Silvermen dan fungsi kernel Epanechnikov menggunakan *Generalized Cross Validation* (CGV) pada data curah hujan di Provinsi Lampung..
2. Mengestimasi kurva regresi nonparametrik menggunakan estimator Gasser-Muller dengan fungsi kernel Epanechnikov pada data curah hujan di Provinsi Lampung.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Dapat menambah ilmu pengetahuan bagi peneliti dan memperoleh pemahaman yang lebih spesifik mengenai metode statistika yaitu metode regresi nonparametrik kernel memanfaatkan estimator Gasser-Muller.
2. Menambah referensi mengenai regresi nonparametrik kernel menggunakan estimator Gasser-Muller dengan fungsi kernel Epanechnikov.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Analisis Regresi

Menurut Hosmer & Lemeshow (2000), analisis regresi adalah teknik statistik yang umum digunakan untuk menentukan hubungan kausal antara antara variabel tak bebas (*dependent variable*) atau disebut juga variabel respon dengan satu atau lebih variabel bebas (*independent variable*) atau disebut juga variabel prediktor. Analisis regresi terdiri dari dua jenis yaitu analisis regresi linear sederhana untuk data dengan satu variabel respon dan satu variabel prediktor serta analisis regresi linear berganda untuk data dengan satu variabel respon dan lebih dari satu variabel prediktor.

Secara matematis, bentuk hubungan antara satu variabel respon dengan satu variabel prediktor dapat dituliskan dalam persamaan regresi sebagai berikut:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \qquad (2.1)$$

dengan,

Y_i = variabel tidak bebas pada pengamatan ke-i
X_i = variabel bebas pada pengamatan ke-i
β_i = parameter-parameter yang tidak diketahui
ε_i = galat (kesalahan)

Sedangkan untuk bentuk hubungan antara satu variabel respon dengan dua atau lebih variabel prediktor secara matematis dituliskan dalam persamaan regresi sebagai berikut:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \cdots + \beta_n X_n \qquad (2.2)$$

dengan,

Y_i = variabel tidak bebas pada pengamatan ke-i

X_i = variabel bebas pada pengamatan ke-i

β_i = parameter-parameter yang tidak diketahui

Selain digunakan untuk mengetahui hubungan antara variabel tak bebas dan variabel bebas, fungsi lain dari regresi adalah untuk melakukan prediksi secara matematis (Green & Silverman, 2000). Analisis regresi juga dapat dilakukan dengan tujuan guna mendapatkan estimasi parameter yang sesuai seperti bentuk kurva regresinya. Misalkan X merupakan variabel prediktor dan Y merupakan variabel respon untuk n pengamatan berpasangan $\{X_i, Y_i\}_{i=1}^{n}$, maka secara matematis hubungan linear antara kedua variabel dapat diketahui dengan model umum regresi yaitu:

$$y_i = m(x_i) + \varepsilon_i \tag{2.3}$$

dengan,

y_i = variabel respon dari data ke-i ($i = 1,2,3, \dots, n$)

$m(x_i)$ = fungsi regresi atau kurva regresi

ε_i= galat ke-i yang saling bebas diasumsikan menyebar $N \sim (0, \sigma^2)$

($i = 1,2,3, \dots, n$)

Analisis regresi terbagi menjadi tiga macam yaitu parametrik, nonparametrik, dan semiparametrik. Jika bentuk kurva regresi diketahui, maka pendekatan model regresi yang digunakan adalah pendekatan model regresi parametrik (Islamiyati, dkk., 2017). Jika bentuk kurva regresi tidak diketahui atau tidak terdapat informasi masa lalu yang lengkap tentang bentuk pola datanya, maka pendekatan model regresi yang dapat digunakan adalah pendekatan model regresi nonparametrik (Lestari, dkk., 2018). Dalam beberapa kasus terdapat sebagian bentuk pola data diketahui sedangkan untuk sebagian yang lain bentuk pola datanya tidak diketahui. Pada kasus seperti ini, pendekatan model regresi yang disarankan adalah pendekatan model regresi nonparametrik (Wahba, 1990).

2.2 Regresi Nonparametrik

Semenjak akhir tahun 1990-an, model regresi nonparametrik menjadi metode analisis data yang sangat ramai digunakan. Teknik ini banyak digunakan karena dalam analisis data dibutuhkan teknik yang dapat menganalisis jenis data yang bervariasi serta asumsi parametriknya tidak selalu terpenuhi. Karena memiliki sifat fleksibel, pendekatan model regresi nonparametrik juga memiliki peran penting dalam memeriksa data longitudinal (Wu & Zhang, 2006).

Regresi nonparametrik dikatakan sebagai fleksibel karena asumsi-asumsi tertentu yang ada pada regresi parametrik tidak perlu dipenuhi. Menurut Eubank (1998), regresi nonparametrik merupakan pendekatan metode regresi dilakukan ketika bentuk kurva dari fungsi regresinya tidak diketahui dan kurva regresi diasumsikan tercatat dalam ruang tertentu.

Pada persamaan (2.3) $m(x_i)$ diasumsikan tercatat pada suatu ruang fungsi tertentu, dimana pemilihan ruang fungsi tersebut biasanya didorong oleh sifat kemulusan (*smoothing*) yang dimiliki oleh fungsi. Selain itu data diharapkan dapat mencari sendiri bentuk estimasinya agar memiliki fleksibilitas yang tinggi (Silverman & Green, 1994).

Terdapat beberapa teknik pendugaan dalam regresi nonparametrik $m(x_i)$ yang digunakan berdasarkan data dengan menggunakan teknik pemulusan tertentu, yaitu kernel, spline, dan deret orthogonal. Salah satu teknik pemulusan yang sering digunakan adalah metode kernel (Puspitasari, dkk., 2012).

2.2.1 Uji Normalitas Kolmogorov-Smirnov

Menurut Ghozali (2016), uji normalitas bertujuan untuk menilai apakah sebaran data berdistribusi normal atau tidak. Jika data yang digunakan tidak berdistribusi normal, maka pendekatan nonparametrik dapat digunakan. Terdapat beberapa uji untuk mengetahui data berdistribusi normal atau tidak, contohnya menggunakan uji Kolmogorov-Smirnov, Chi-Square, Jarque-Bera, dan lainnya. Uji Kolmogorov-Smirnov merupakan salah satu uji yang kerap kali digunakan (Ayuningtyas, 2018).

Langka-langkah pengujian Kolmogorov-Smirnov yaitu:

a. Tentukan statistik uji

$$D_{hitung} = maks|F(x) - S(x)| \quad (2.4)$$

Keterangan:

$F(x)$ = fungsi distribusi kumulatif

$S(x)$ = fungsi distribusi kumulatif sampel

b. Tentukan kriteria penolakan

Adapun tahap-tahap pengujian Uji Kolmogorov-Smirnov sebagai berikut:

- Tetapkan hipotesis awal

  H_0: Data penelitian berdistribusi normal $(0, \sigma^2)$

  H_1: Data penelitian tidak berdistribusi normal $(0, \sigma^2)$
- Tetapkan taraf signifikan ($\alpha = 0{,}05$)
- Tentukan daerah penolakan

  H_0 ditolak apabila $D_{hitung} > D_{tabel}$ atau $p - value < \alpha$

  H_0 tidak tolak apabila $D_{hitung} < D_{tabel}$ atau $p - value > \alpha$
- Hitung statistika uji

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{n} \quad (2.5)$$

Keterangan:

x_i = nilai tengah

f_i = frekuensi

n = jumlah sampel yang digunakan

Selanjutnya menentukan distribusi normal standar dengan cara:

$$Z = \frac{x-\bar{x}}{\sigma} \quad (2.6)$$

Keterangan:

Z = distribusi normal standar

x = nilai tengah

$\bar{x}$ = rata-rata

σ = standar deviasi dari distribusi

Nilai Z dari tabel berdistribusi normal yang telah didapatkan digunakan untuk menemukan nilai $F(x)$. Sedangkan nilai $S(x)$ didapatkan melalui nilai frekuensi kumulatif dari setiap nilai x_i yang dibagi dengan jumlah sampel.

- Buat kesimpulan yaitu dengan cara membandingan antara nilai D_{hitung} dengan $q_{(1-\alpha)}$ atau D_{tabel}, dimana q adalah nilai berdasarkan tabel Kolmogorov-Smirnov apabila nilai $D_{hitung} > D_{tabel}$ maka H_0 ditolak dan apabila nilai $D_{hitung} < D_{tabel}$ maka H_0 diterima (Pratama, 2017). Selain itu juga dapat melalui nilai $p-value$, dimana H_0 ditolak jika $p-value < \alpha$ dan H_0 diterima jika $p-value > \alpha$.

2.3 Metode Kernel

Metode ini disebut juga dengan densitas kernel Rosenblatt-Parzen karena diperkenalkan oleh Rosenblatt (1956) dan Parzen (1962). Dalam model pendekatan nonparametrik, metode kernel sangat umum digunakan. Hal ini disebabkan karena metode ini memiliki beberapa keunggulan, yaitu:

a. Memiliki bentuk yang fleksibel dan secara matematik mudah dikerjakan.

b. Memiliki rata-rata kekonvergenan yang relatif cepat (Hardle, 1994)

Secara umum fungsi densitas kernel untuk fungsi densitas $\hat{f}_h(x)$ dinyatakan sebagai berikut:

$$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_h(x - x_i) \tag{2.7}$$

Lalu secara umum kernel *K* dengan parameter pemulus (*bandwidth*) atau *h* didefinisikan sebagai

$$K_h(x) = \frac{1}{h}K\left(\frac{x}{h}\right) \qquad \text{untuk } -\infty < x < \infty \text{ dan } h > 0 \tag{2.8}$$

Sehingga fungsi densitas kernel dari $\hat{f}_h(x)$ dapat dinyatakan dengan

$$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x-x_i}{h}\right) \tag{2.9}$$

Dimana *K* merupakan fungsi kernel kontinu. *K* biasanya diasumsikan untuk memenuhi kondisi keteraturan seperti batasan (Schucany, 1989). Secara grafik, suatu fungsi dikatakan kontinu di $x\epsilon[a,b]$ jika suatu grafik fungsi f tidak terpotong dititik (a,b). Sedangkan penghalus kernel menggunakan *bandwidth* (h) yang berperan mendefinisikan dan menentukan variansi serta biasnya.

Menurut Hayati (2010), jika $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ adalah sampel acak dari suatu distribusi densitas *f* dan *K* suatu fungsi terbatas dan positif maka terdapat beberapa syarat yang harus terpenuhi, yaitu:

(i) $K(x) \geq 0$, untuk semua x

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} K(x)dx = 1$

(iii) $\int_{-\infty}^{\infty} x^2K(x)dx = \sigma^2 > 0$

(iv) $\int_{-\infty}^{\infty} x_iK(x)dx = \begin{cases} 1, & i = 0 \\ 0, & 1 \leq i < r, \\ \neq 0, & i = r \end{cases}$ untuk suatu bilangan r

(v) $K(x)$ bersifat simetris di sekitar nol.

Bentuk grafik terdapat di sekitar garis vertikal Y yang membentuk lonceng dari beberapa nilai variabel acak dengan adanya jarak tertentu pada satu sisi yang sama dengan sisi lain dari nilai tersebut. Menurut Saidi, dkk. (2021), metode kernel terbagi menjadi tiga macam estimator, antara lain:

1. Estimator Nadaraya-Watson

$$\widehat{m}(x_i) = \frac{\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x-x_i}{h}\right) Y_i}{\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x-x_i}{h}\right)} \tag{2.10}$$

2. Estimator Priestley-Chao

$$\widehat{m}(x_i) = \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n}(x - x_{i-1}) Y_i\, K\left(\frac{x-x_i}{h}\right) \tag{2.11}$$

3. Estimator Gasser-Muller

$$\widehat{m}(x_i) = \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n} Y_i \int_{s_{i-1}}^{s_i} K\left(\frac{x-x_i}{h}\right) dx \tag{2.12}$$

2.4 Estimator Gasser-Muller

Berbagai jenis metode nonparametrik ada untuk mengestimasi fungsi $m(x_i)$ yang tidak diketahui dan yang paling cukup sering digunakan adalah metode kernel. Salah satunya jenis estimator pada metode kernel adalah adalah estimator Gasser-Muller.

Mari kita tinjau dari model regresi

$$y_i = m(x_i) + \varepsilon_i$$

Untuk *i*= 1, 2, …, n. Dimana $m(x_i)$ adalah fungsi regresi yang tidak diketahui bentuknya dan didefinisikan pada interval $[0,1]$, y_i adalah *n* pengamatan di titik-titik tetap $x_1, x_2, \dots, x_n$, dan ε_i adalah galat regresi dengan mean 0 dan varians σ^2, dan Y_i adalah *n* pengamatan di titik-titik tetap x_i.

Untuk mengestimasi fungsi regresi $m(x_i)$ yang tidak diketahui, Gasser & Muller (1979) mengusulkan sebuah estimator yaitu estimator Gasser dan Muller. Mengingat fungsi kernel *K* sebagai fungsi kepadatan peluang dan *h* merupakan *bandwidth*, sehingga estimator Gasser dan Muller didefinisikan dengan

$$\widehat{m}(x_i) = \sum_{i=1}^{n}\left[\int_{s_{i-1}}^{s_i} K_h(x - x_i) dx\right] Y_i \tag{2.13}$$

Untuk $x \in [0,1]$. Dengan $s_0 = 0$, $s_n = 1$, $x_i \leq s_i \leq x_{i+1}$, dan $s_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ untuk $i = 1, 2, \dots, n-1$. Pada persamaan (2.5) fungsi kernel secara umum dinyatakan sebagai $K_h(x - x_i) = \frac{1}{h} K\left(\frac{x - x_i}{h}\right)$ (Moon, 2011).

Menurut Babilua, et al. (2014), estimator Gasser-Muller dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\widehat{m}(x) = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{n} \left[\int_{s_{i-1}}^{s_i} K_h\left(\frac{x - x_i}{h}\right) dx\right] Y_i \qquad (2.14)$$

Keterangan:

$\widehat{m}(x)$ = fungsi taksiran regresi

Y_i = variabel tidak bebas pada data ke-*i*

x_i = variabel bebas pada data ke-*i*

K = fungsi kernel

n = ukuran sampel atau banyak pengamatan

h = *bandwidth* atau parameter penghalus

Menurut Chu (1993), beberapa sifat menarik dari estimator Gasser-Muller adalah kekonsistenan dan asimtotik normalitas ketika galat (ε_i) dari modelnya independen. Menurut Chu & Marrion (1991), pada rancangan acak estimator Gasser-Muller memiliki varians asimtotik 1,5 kali lebih besar dari estimator Nadaraya-Watson. Estimator Gasser-Muller memiliki bias yang lebih sederhana dibandingkan dengan estimator Nadaraya-Watson yang menghasilkan bias yang lebih besar. Dengan kata lain estimator Gasser-Muller lebih unggul dari estimator Nadaraya-Watson. Dalam menggunakan metode kernel estimator Gasser-Muller diperlukan fungsi kernel untuk menentukan bentuk bobot kernel.

2.5 Fungsi Kernel

Dalam metode kernel, sifat simetris kontinu, terbatas, dan bernilai riil harus dimiliki oleh fungsi kernel. Fungsi umum kernel *K* dengan parameter pemulus *bandwidth* (*h*) didefinisikan sebagai (Wand & Jones, 1995):

$$K_h(x) = \frac{1}{h}K\left(\frac{x}{h}\right), \text{ untuk } -\infty < x < \infty, h > 0$$

dimana:

K = fungsi kernel

h = *bandwidth*

Menurut Sukarsa & Srinadi (2012), beberapa macam fungsi kernel antara lain:

a. Kernel Uniform: $K(x) = \frac{1}{2}I$, untuk $|x| \leq 1$
b. Kernel Triangle: $K(x) = (1 - |x|)I$, untuk $|x| \leq 1$
c. Kernel Epanechnikov: $K(x) = \frac{3}{4}(1 - x^2)I$, untuk $|x| \leq 1$
d. Kernel Kuartik: $K(x) = \frac{15}{16}(1 - x^2)^2$, untuk $|x| \leq 1$
e. Kernel Triweight: $K(x) = \frac{35}{32}(1 - x^2)^3 I$, untuk $|x| \leq 1$
f. Kernel Cosinus: $K(x) = \frac{\pi}{4}cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, untuk $|x| \leq 1$
g. Kernel Gaussian: $K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp^{\left(-\frac{1}{2}(x^2)\right)}$, untuk $-\infty < x < \infty$

Dengan *I* adalah sebagai fungsi indikator

$$I(x) = \begin{cases} 1, & jika|x| \leq 1 \\ 0, & jika\ |x| > 1 \end{cases}$$

Pada penelitian ini fungsi kernel *K* yang digunakan adalah fungsi kernel Epanechnikov. Bentuk umum dari fungsi kernel Epanechnikov didefinisikan sebagai berikut:

$$K(x) = \frac{3}{4}(1 - x^2)I \qquad (2.15)$$

Pada metode kernel estimator Gasser-Muller dengan fungsi kernel Epanechnikov diperlukan nilai *bandwidth* (h) untuk mengatur kemulusan dari kurva yang akan diestimasi.

2.6 Pemilihan *Bandwidth* Optimal

Menurut Fitriani, dkk. (2015), yang paling penting dalam metode kernel adalah melakukan pemilihan parameter pemulus (*bandwidth*). *Bandwidth* (*h*) merupakan parameter pemulus yang berfungsi untuk mengatur kemulusan dari kurva yang diestimasi. Kurva yang sangat kasar atau *under-smoothing* dan sangat fluktuatif akan dihasilkan jika *bandwidth* yang digunakan terlalu kecil dan sebaliknya kurva yang sangat mulus atau *over-smoothing* tetapi tidak sesuai dengan pola data akan dihasilkan jika *bandwidth* yang digunakan terlalu lebar.

Estimasi kurva tidak hanya bertujuan untuk mendapatkan kurva yang mulus tetapi juga memiliki tingkat kesalahan yang tidak terlalu tinggi. Oleh karena itu pemilihan nilai *bandwidth* yang optimal perlu dilakukan sehingga didapatkan kurva yang mulus dengan kesalahan yang minimum (Gujarati, 2004). Dalam penerapannya, pemilihan *bandwidth* umumnya dilakukan dengan cara *trial and error*. Silvermen (1986), memberikan lebar jendela (*bandwidth*) dengan rumus sebagai berikut:

$$h = 0.9\ x\ min\left\{S, \frac{IQR}{1.34}\right\} x\ n^{-1/5} \tag{2.16}$$

dengan $S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$, IQR adalah *Inter Quartil Range* ($IQR = Q3 - Q1$), dan n adalah banyaknya data.

Dibutuhkan *bandwidth* yang optimal untuk memperoleh kurva yang optimal. Salah satu cara untuk mendapatkan nilai *bandwidth* yang optimal adalah dengan menggunakan kriteria *Generalized Cross Validation* (GCV). Untuk memperoleh nilai GCV dapat digunakan persamaan berikut (Indrayanti, 2014):

$$GCV(h) = \frac{MSE}{\left(1 - \frac{trace\,(W)}{n}\right)^2} \quad (2.17)$$

Dengan $MSE = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{n}$ dan W merupakan *Hat Matrix* berukuran $n\ x\ n$ yang memenuhi $[m_h(x_1), m_h(x_2), \dots, m_h(x_n)]^t = WY$. Nilai *bandwidth* optimal akan diperoleh jika menghasilkan *Generalized Cross Validation* minimum (Craven & Wahba, 1979).

2.7 Ukuran Kebaikan Model

2.7.1 *Mean Square Error*

Dengan melihat tingkat kesalahannya, kebaikan suatu penduga dapat ditentukan. Terdapat beberapa ukuran untuk memutuskan nilai kebaikan suatu model, seperti *Mean Square Error* (MSE). MSE merupakan perhitungan rata-rata selisih yang dikuadratkan di antara nilai yang diprediksi dengan yang aktualnya. Semakin kecil nilai MSE yang dihasilkan, maka semakin baik hasil akurasinya. Adapun MSE dapat didefinisikan dalam persamaan (2.18) yaitu

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{n} \quad (2.18)$$

dimana,

y_i = data aktual ke-*i*

$\hat{y}_i$ = data hasil prediksi ke-*i*

n = jumlah data

2.7.2 *Mean Absolute Percentage Error*

Mean Absolute Percentage Error (MAPE) ditentukan dengan menghitung selisih absolut pada tiap periode dibagi dengan nilai data yang aktual untuk periode itu. Kemudian merata-rata kesalahan persentase absolut tersebut (Heizer, dkk., 2015).

Semakin kecil nilai MAPE yang dihasilkan, maka semakin baik hasil akurasinya. Adapun MAPE dapat didefinisikan dalam persamaan (2.19) yaitu

$$MAPE = \sum_{0=1}^{n} \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right| x100\% \qquad (2.19)$$

dimana,

y_i = data aktual ke-*i*

$\hat{y}_i$ = data hasil prediksi ke-*i*

Menurut Lewis (1982) bahwa hasil nilai MAPE memiliki interpretasi sebagai berikut:

a. MAPE $< 10\%$, dapat diartikan hasil prediksi sangat akurat.
b. $10\% \leq$ MAPE $< 20\%$, dapat diartikan hasil prediksi baik.
c. $20\% \leq$ MAPE $< 50\%$, dapat diartikan hasil prediksi cukup.
d. MAPE $\geq 50\%$, dapat dikatakan hasil prediksi tidak akurat.

2.7.3 Koefisien Determinasi

Koefisien determinasi adalah salah satu ukuran sederhana yang umum dipakai dalam menguji kualitas suatu persamaan regresi (Gujarati, 2004). Koefisien determinasi dinotasikan dengan R^2 merupakan alat untuk mengukur total keragaman di sekitar nilai tengah *y* yang dapat dijelaskan dengan model regresi. Perhitungan nilai R^2 didefinisikan sebagai berikut:

$$R^2 = \frac{JKR}{JKT} = \frac{\sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2} \qquad (2.20)$$

dimana,

$\hat{y}_i$ = nilai prediksi peubah respon ke-*i*

$\bar{y}$ = rata-rata peubah respon

y_i = nilai peubah respon ke-*i*

Sifat dari R^2 adalah:

a. Merupakan besaran yang non-negatif.

b. Batasnya adalah $0 \leq R^2 \leq 1$.

Semakin besar nilai R^2, maka semakin besar pula kemampuan semua variabel prediktor dalam menjelaskan variabel respon, sehingga untuk mengetahui metode estimasi mana yang memberikan hasil yang lebih baik, maka kriteria yang digunakan adalah dengan cara membandingkan nilai R^2. (Ghozali, 2013).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun akademik 2021/2022 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Data Penelitian

Data yang digunakan pada penelitian ini adalah data curah hujan di Provinsi Lampung pada bulan Januari 2018 s.d. bulan Desember 2020 yang diperoleh dari situs resmi Badan Pusat Statistik (BPS) Provinsi Lampung, dengan variabel prediktor pertama (X) adalah rata-rata kelembaban udara dan variabel respon (Y) yaitu jumlah curah hujan.

3.3 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode estimator Gasser-Muller dengan fungsi kernel Epanechnikov. *Bandwidth* (h) ditentukan dengan menggunakan rumus lebar jendela (*bandwidth*) dari Silvermen serta dengan melihat nilai *Generalized Cross Validation* (GCV) minimum. Data diolah menggunakan aplikasi *R Studio*. Langkah-langkah yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Melakukan standarisasi data.
2. Mendeskripsikan data.
3. Membuat diagram pencar antara variabel prediktor (X) dengan variabel respon (Y) untuk mengetahui pola bentuk data.
4. Melakukan uji normalitas data.
5. Membentuk estimator Gasser-Muller menggunakan fungsi kernel Ephanecnikov.
6. Membentuk *Generalized Cross Validation* (GCV) pada estimator Gasser-Muller
7. Menentukan *bandwidth* (h) optimal estimator Gasser-Muller dengan fungsi kernel Epanechnikov yang ditentukan menggunakan rumus lebar jedela (*bandwidth*) dari Silvermen dan metode GCV yang memenuhi kriteria minimum.
8. Membentuk model regresi kernel estimator Gasser-Muller fungsi kernel Epanechnikov menggunakan *bandwidth* (h) optimal yang telah diperoleh.
9. Menghitung nilai prediksi data curah hujan menggunakan model regresi kernel estimator Gasser-Muller fungsi kernel Epanechnikov yang telah dibentuk.
10. Melakukan estimasi kurva regresi nonparametrik menggunakan *bandwidth* (h) optimal yang telah diperoleh.
11. Menguji kebaikan model dengan menghitung nilai MSE, MAPE, dan R^2.
12. Membuat kesimpulan.

V. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian estimasi kurva regresi data curah hujan di Provinsi Lampung menggunakan metode regresi nonparametrik kernel dengan estimator Gasser-Muller fungsi kernel Epanechnikov diambil kesimpulan bahwa dengan menggunakan perhitungan rumus lebar jedela (*bandwidth*) dari Silvermen diperoleh nilai *bandwidth* (h) optimal yaitu $hopt_1 = 3{,}995$ dan dengan menggunakan metode *Generalized Cross Validation* (GCV) diperoleh nilai *bandwidth* (h) optimal yaitu $hopt_2 = 5{,}564$. Selain itu nilai *bandwidth* (h) $hopt_1 = 3{,}995$ lebih baik dalam mengestimasi kurva dibandingkan $hopt_2 = 5{,}564$.

DAFTAR PUSTAKA

Ayuningtyas, T. 2018. Regresi Nonparametrik Kernel Nadaraya-Watson dalam Data Time Series (Studi Kasus: Indeks Harga Saham Gabungan Terhadap KURS, Inflasi, dan Tingkat Suku Bunga Periode Januari 2015-Maret 2018) (Tesis). Jurusan Matematika. Universitas Islam Indonesia. Yogyakarta.

Babilua, P., Nadaraya, E., & Sokhadze, G. 2014. Functionals of Gasser–Muller Estimators. *Turkish Journal of Mathematics*. **38**(1): 1090–1101.

Chu, C.K. 1993. A New Version of the Gasser-Mueller Estimator. *Journal of Nonparametric Statistics*. **3**(2): 187–193.

Chu, C.K & Marron, J.S. 1991. Choosing a Kernel Regression Estimator. *Statistical Science*. **6**(4): 404-436.

Eubank, R.L. 1988. *Spline Smoothing and Nonparametric Regression*. Mercel Dekker, New York.

Fitriani, A., Srinadi, I.G., & Susilawati, M. 2015. Estimasi Model Regresi Semiparametrik Menggunakan Estimator Kernel Uniform pada Pasien DBD di RS Puri Raharja. *Jurnal Matematika.* **4**(4): 176-180.

Ghozali, I. 2013. *Aplikasi Analisis Multivariate dengan Program IBM SPSS 21*. Badan Penerbit Universitas Diponegoro, Semarang.

Green, P.J. & Silverman, B.W. 1994. *Nonparametric Regression and Generalized Linear Models a Roughness Penalty Approach*. Chapman & Hall, London.

Gujarati, D.N. 2004. *Basic Econometrics*. 4^{th} Edition. McGraw-Hill Companie, New York.

Halim, S. & Bisono, I. 2006. Fungsi-Fungsi Kernel pada Metode Regresi Nonparametrik dan Aplikasinya pada Priest River Experimental Forests Data. *Jurnal Teknik Industri* **8**(1): 73-81.

Hardle, W. 1994. *Applied Nonparametric Regression*. Cambridge University Press, New York.

Hayati, L. 2010. Pendekatan Estimator Kernel untuk Estimasi Densitas Mulus. *Jurnal Pijar MIPA*. **5**(2): 81–85.

Heizer, J. & Render, B. 2015. *Manajemen Operasi*. Salemba Empat, Jakarta.

Hosmer, D.W. & Lemeshow, S. 2000. *Applied Logistic Regression*. 2^{nd} Edition. John Wiley & Sons, New York.

Indrayanti, A.I. 2014. Estimator Kernel Cosinus dan Kernel Gaussian dalam Model Regresi Nonparametrik pada Data Butterfly Diagram Sikulus Aktivitas Matahari Ke-23 (Studi Kasus di BPD LAPAN Watukosek) (Skripsi). Jurusan Matematika. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim. Malang.

Islamiyati, A. 2017. Spline Polynomial Truncated dalam Regresi Nonparametrik. *Jurnal Matematika. Statistika. & Komputasi*. **14**(1): 54-60.

Kurniasih, D., Mariani, S., & Sugiman. 2013. Efisiensi Relatif Estimator Fungsi Kernel Gaussian Terhadap Estimator Polinomial dalam Peramalan USD Terhadap JPY. *UNNES Journal of Mathematics*. **2**(2): 79-84.

Lestari, B., Budiantara, I.N., & Chamidah. N. 2018. Estimation of Regression Function in Multi-Response Nonparametric Regression Model Using Smoothing Spline and Kernel Estimators. *Journal of Physics: Conference Series*. **1097**(1): 1-9.

Lewis, C.D. 1982. *International and Business Forecasting Methods*. Butterworths, London.

Maharani, A.H., Yozza, H., & Asdi, Y. 2015. Pemodelan Berat Badan Balita dengan Menggunakan Regresi Kernel. *Jurnal Matematika UNAND*. **4**(3): 31-40.

Puspitasari, I., Suparti, & Wilandari, Y. 2012. Analisis Indeks Harga Saham Gabungan (IHSG) dengan Menggunakan Model Regresi Kernel. *Jurnal Gaussian*. **1**(1): 93–102.

Saidi, S., Herawati, N., Nisa, K., Setiawan, E. 2021. Nonparametric Modeling Using Kernel Method for the Estimation of the Covid-19 Data in Indonesia During 2020. *International Journal of Mathematics Trends and Technology*. **67**(6): 136-144.

Schucany, W.R. 1989. On Nonparametric Regression with Higher-Order Kernels. *Statistical Planning and Inference Journal*. **23**(2): 145–151.

Sinurat, N., Sugianto, & Harjupa, W. 2015. Analisa Arah Angin Terhadap Curah Hujan Menggunakan Equatorial Atmosphere Radar (Ear) Dan Optical Rain Gauge (Org) Di Atas Kototabang Sumatera Barat. *Repository FMIPA*. **1**(1): 1-8.

Sukarsa, I.K. & Srinadi, I.G. 2012. Estimator Kernel dalam Model Regresi Nonparametrik. *Jurnal Matematika*. **2**(1): 19-30.

Wahba, G. 1990. *Spline Models for Observational Data*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.

Wand, M.P. & Jones, M.C. 1995. *Kernel Smoothing*. Chapman & Hall, London.

Wilson, E.M. 1993. *Hidrologi Teknik*. Erlangga, Jakarta.

Wu, H, & Zhang, J.T. 2006. *Nonparametric Regression Method for Longitudinal Data Analysis: Mixed Effects Modeling Approaches*. John Wiley and Sons, New York.