BANYAKNYA GRAF TAK TERHUBUNG BERLABEL TITIK BERORDE ENAM TANPA *LOOP* DAN MEMUAT GARIS PARALEL YANG MENGHUBUNGKAN PASANGAN TITIK YANG BERBEDA SEJUMLAH GANJIL

(Skripsi)

Oleh

JANI SUPARMAN
1817031015

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG

2022

ABSTRACT

THE NUMBER OF DISCONNECTED VERTEX LABELED GRAPH OF ORDER SIX WITHOUT LOOP AND MAY CONTAIN PARALLEL EDGES WHICH CONNECT ODD DIFFERENT PAIRS OF VERTICES

By

JANI SUPARMAN

A disconnected graph G is a graph that consists of two or more connected graphs. A graph G is called a connected graph if there is at least one path that connects every pair of vertices in G. In a graph, an edge with the same initial and end vertex called a loop, while two or more edges that connect the same vertices are called parallel edges. If given *n* vertex and *m* edge and each vertex is labeled, then many graphs that can constructed (both connected or disconnected, simple or not). In this research, we will discuss the formula to determine the number of disconnected vertex labeled graph of order six without loop and may contain parallel edges which connect odd different pairs of vertices.

Keywords: graph, unconnected graph, loop, and parallel edges.

ABSTRAK

BANYAKNYA GRAF TAK TERHUBUNG BERLABEL TITIK BERORDE ENAM TANPA *LOOP* DAN MEMUAT GARIS PARALEL YANG MENGHUBUNGKAN PASANGAN TITIK YANG BERBEDA SEJUMLAH GANJIL

Oleh

JANI SUPARMAN

Suatu graf tak terhubung G merupakan graf yang terdiri dari dua atau lebih graf terhubung. Suatu graf G disebut graf terhubung jika terdapat sekurang-kurangnya ada satu *path* yang menghubungkan setiap pasangan titik di G. Dalam suatu graf garis yang titik awal dan akhirnya sama disebut *loop*, sedangkan dua garis atau lebih yang menghubungkan titik- titik yang sama disebut garis paralel. Jika diberikan n titik dan m garis serta setiap titik diberi label maka banyak graf yang terbentuk (baik graf terhubung maupun tak terhubung, graf sederhana maupun tidak). Pada penelitian ini akan didiskusikan rumus untuk menentukan banyaknya graf tak terhubung berlabel titik berorde enam tanpa *loop* dan memuat garis paralel yang menghubungkan pasangan titik yang berbeda sejumlah ganjil.

Kata kunci: graf, graf tak terhubung, *loop*, dan garis paralel.

BANYAKNYA GRAF TAK TERHUBUNG BERLABEL TITIK BERORDE ENAM TANPA *LOOP* DAN MEMUAT GARIS PARALEL YANG MENGHUBUNGKAN PASANGAN TITIK YANG BERBEDA SEJUMLAH GANJIL

Oleh

JANI SUPARMAN

(Skripsi)

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2022

Judul	:	**BANYAKNYA GRAF TAK TERHUBUNG BERLABEL TITIK BERORDE ENAM TANPA *LOOP* DAN MEMUAT GARIS PARALEL YANG MENGHUBUNGAN PASANGAN TITIK YANG BERBEDA SEJUMLAH GANJIL**
Nama Mahasiswa	:	Jani Suparman
NPM	:	1817031015
Jurusan	:	Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Bandar Lampung, 12 Januari 2022

Menyetujui,

1. Komisi Pembimbing

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP.196311081989022001

Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.
NIP. 198406272006042001

Mengetahui,

2. Ketua Jurusan Matematika
FMIPA Universitas Lampung

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 197403162005011001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.** .....

Sekretaris : **Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.** .....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.** .....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, M.T.
NIP. 197407052000031001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: 27 Mei 2022

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: **Jani Suparman**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1817031015**
Jurusan	: **Matematika**
Judul Skripsi	: **BANYAKNYA GRAF TAK TERHUBUNG BERLABEL TITIK BERORDE ENAM TANPA *LOOP* DAN MEMUAT GARIS PARALEL YANG MENGHUBUNGKAN PASANGAN TITIK YANG BERBEDA SEJUMLAH GANJIL**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 27 Mei 2022

Yang Menyatakan,



Jani Suparman

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama Jani Suparman, lahir di Pringsewu pada tanggal 29 Desember 1999, dan merupakan anak ketiga dari lima bersaudara dari pasangan Bapak Suparman dan Ibu Fajar Suami.

Penulis menenempuh pendidikan Sekolah Dasar di SD Negeri 2 Yogyakarta Gadingrejo Pringsewu pada tahun 2006 sampai dengan 2012. Kemudian melanjutkan pendidikan Sekolah Menengah Pertama di SMP Negeri 3 Gadingrejo Pringsewu pada tahun 2012 sampai dengan 2015. Selanjutnya, penulis menempuh pendidikan Sekolah Menengah Atas di SMA Negeri 1 Gadingrejo Pringsewu pada tahun 2015 sampai dengan 2018.

Pada tahun 2018 penulis melanjutkan pendidikan Strata Satu (S1) Program Studi S1 Matematika Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung (Unila) melalui jalur Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SNMPTN).

Sebagai bentuk penerapan ilmu perkuliahan, penulis telah melaksanakan Kerja Praktik (KP) selama 30 hari di Badan Pusat Statistik (BPS) Kabupaten Pringsewu pada tahun 2021, dan pada tahun yang sama penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Wonodadi Kecamatan Gadingrejo Kabupaten Pringsewu.

KATA INSPIRASI

“Pengetahuan tentang segala hal adalah sebuah kemungkinan”

(Leonardo da Vinci)

“Setelah Anda menghilangkan hal yang tidak mungkin, apa pun yang tersisa, tidak peduli betapa tidak mungkinnya, haruslah kebenaran.”

(Sir Arthur Conan Doyle)

"Belajar dari matematika, lakukanlah dulu apapun yang kau bisa lakukan karena sesulit apapun masalahnya selalu ada banyak cara yang mungkin untuk menyelesaikannya dan dibalik semua kemungkinan itu setidaknya selalu ada satu kebenaran."

(penulis)

PERSEMBAHAN

Puji dan syukur tiada hentinya kepada Allah Subhanahu Wata'ala atas segala nikmat dan hidayah-Nya untuk kita semua. Penulis persembahkan sebuah karya sederhana ini untuk:

Bapak dan Mama, terimakasih atas kasih sayang, pengorbanan, doa, dan motivasi yang telah diberikan di setiap langkah penulis. Karena atas doa dan ridho kalian, Allah memudahkan setiap perjalanan hidup ini.

Mbak, Mas, dan Adek, terimakasih untuk selalu membantu, dan menemani penulis dalam keadaan suka maupun duka.

Sahabat dan teman-teman ku, terimakasih atas kebersamaan, keceriaan, canda dan tawa serta doa dan semangat yang telah diberikan kepadaku.

Almamater Universitas Lampung.

SANWACANA

Puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT karena berkat limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul "*Banyaknya Graf Tak Terhubung Berlabel Titik Berorde Enam tanpa Loop dan Memuat Garis Paralel yang Menghubungkan Pasangan Titik yang Berbeda Sejumlah Ganjil*" disusun sebagai salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Matematika di Universitas Lampung.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, motivasi, serta saran sehingga skripsi ini dapat diselesaikan. Untuk itu penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D. selaku Pembimbing I yang selalu bersedia memberikan arahan, bimbingan, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan dan dukungan kepada penulis.
3. Ibu Dr. Asmiati, S.Si., M.Si. selaku Penguji yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis sehingga dapat lebih baik lagi.
4. Bapak Ir. Warsono, M.S., Ph.D. selaku Pembimbing Akademik.

5. Bapak Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, M.T. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Orang tua tercinta serta kakak dan adek yang selalu memotivasi dan mendukung penulis dalam memberikan yang terbaik, selalu mendoakan untuk kesuksesan penulis.
8. Badan Pusat Statistik (BPS) Kabupaten Pringsewu, Teman-teman Kuliah Kerja Nyata (KKN) dan masyarakat Desa Wonodadi yang telah memberikan pengalaman baik kepada penulis.
9. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2018 dan pihak yang membantu dalam pengerjaan skripsi ini yang tidak dapat disebutkan satu-persatu.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih memiliki banyak kekurangan, sehingga kritik dan saran yang membangun diharapkan untuk penyempurnaan skripsi ini. Penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi pembaca.

Bandar Lampung, 27 Mei 2022
Penulis

Jani Suparman

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL xiv

DAFTAR GAMBAR.....xv

I. PENDAHULUAN.....1
1.1. Latar Belakang.....1
1.2. Tujuan Penelitian.....2
1.3. Manfaat Penelitian.....3

II. TINJAUAN PUSTAKA.....4
2.1. Konsep Dasar Teori Graf.....4
2.2. Konsep Dasar Barisan.....7
2.3. Konsep Dasar Teknik Pencacahan.....8

III. METODE PENELITIAN.....11
3.1. Penelitian yang Telah Dilakukan Berkaitan dengan Perhitungan Graf....11
3.2. Waktu dan Tempat Penelitian.....13
3.3. Metode Penelitian.....13

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN.....15
4.1. Konstruksi Graf Tak Terhubung Berlabel Titik Berorde Enam tanpa *Loop* dan Memuat Garis Paralel yang Menghubungkan Pasangan Titik yang Berbeda Sejumlah Ganjil.....16
4.2. Pengelompokan Graf Tak Terhubung Berlabel Titik Berorde Enam tanpa *Loop* dan Memuat Garis Paralel yang Menghubungkan Pasangan Titik yang Berbeda Sejumlah Ganjil Berdasarkan m dan t....22
4.3. Rumus Untuk Menentukan Banyaknya Graf Tak Terhubung Berlabel Titik Berorde Enam tanpa Loop dan Memuat Garis Paralel yang Menghubungkan Pasangan Titik yang Berbeda Sejumlah Ganjil Berdasarkan m dan t.....26

V. KESIMPULAN DAN SARAN.....34
5.1. Kesimpulan.....34
5.2. Saran.....35

DAFTAR PUSTAKA.....36

LAMPIRAN.....38

DAFTAR TABEL

Tabel Halaman

4.1.1. Hasil deteksi graf yang sama tak terhubung berlabel titik berorde enam tanpa *loop* dan memuat garis paralel yang menghubungkan pasangan titik yang berbeda sejumlah ganjil 16

4.1.2. Hasil pola-pola graf tak terhubung berlabel titik berorde enam tanpa *loop* dan memuat garis paralel yang menghubungkan pasangan titik yang berbeda sejumlah ganjil dengan $1 \leq t \leq 10$ dan $m \geq 2$ 18

4.2.1 Hasil pengelompokan pola banyaknya graf tak terhubung berlabel titik tanpa *loop* dan memuat garis paralel yang menghubungkan pasangan titik yang berbeda sejumlah ganjil berdasarkan m dan t, $n = 6$ dan $m \geq 2$ serta $1 \leq t \leq 5$ 22

4.2.2 Hasil pengelompokan pola banyaknya graf tak terhubung berlabel titik tanpa *loop* dan memuat garis paralel yang menghubungkan pasangan titik yang berbeda sejumlah ganjil berdasarkan m dan t, $n = 6$ dan $m \geq 7$ serta $6 \leq t \leq 10$ 23

4.2.3 Hasil pengelompokan pola perkalian banyaknya graf tak terhubung berlabel titik tanpa *loop* dan memuat garis paralel yang menghubungkan pasangan titik yang berbeda sejumlah ganjil berdasarkan m dan t, $n = 6$ dan $m \geq 2$ serta $1 \leq t \leq 5$ 23

4.2.4 Hasil pengelompokan pola perkalian banyaknya graf tak terhubung berlabel titik tanpa *loop* dan memuat garis paralel yang menghubungkan pasangan titik yang berbeda sejumlah ganjil berdasarkan m dan t, $n = 6$ dan $m \geq 7$ serta $6 \leq t \leq 10$ 24

DAFTAR GAMBAR

Gambar Halaman

2.1 Graf dengan 5 titik dan 7 garis 4

2.2 (a) Graf dengan garis paralel (b) Graf dengan *loop* 5

2.3 (a) Graf Sederhana (b) Graf tidak sederhana..... 5

2.4 Graf dengan 1 titik terasing dan 1 titik *pendant*..... 6

2.5 Contoh graf yang saling isomorfik..... 7

4.1 Contoh graf-graf yang dihitung.....15

4.2 Contoh graf-graf yang tidak dihitung.....15

I. PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu cabang dari ilmu matematika yang digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit serta hubungan antara objek-objek tersebut. Representasi visual dari graf yaitu dengan menyatakan objek menjadi noktah, bulatan, *vertex* atau titik, sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan garis atau *edge*.

Konsep teori graf diperkenalkan pertama kali oleh Leonard Euler di tahun 1736, saat menyelesaikan permasalahan jembatan Konigsberg, Kaliningrad, Rusia. Di kota tersebut terdapat sungai Pregal yang membelah kota menjadi empat daratan terpisah dan daratan hanya dihubungkan oleh tujuh jembatan. Permasalahannya yaitu warga kota tersebut ingin melewati setiap jembatan tepat satu kali serta kembali lagi ke tempat awal. Dengan permodelan tertentu Euler menyatakan bahwa hal tersebut tidak mungkin terjadi sebab hal tersebut hanya dapat terjadi jika banyaknya jembatan berjumlah genap. Bentuk permodelan tersebutlah yang kemudian menjadi latar belakang munculnya konsep teori graf yang ada saat ini.

Penerapan teori graf dalam kehidupan sehari-hari sangatlah luas, sebagai akibatnya teori graf semakin berkembang. Banyak cabang ilmu pengetahuan yang menggunakan aplikasi teori graf diantaranya kimia, biologi, ilmu komputer, ekonomi dan lain-lain.

Pada tahun 2007 Agnarsson dan Raymond memberikan rumus untuk menentukan banyaknya graf sederhana untuk $0 \leq m \leq \binom{n}{2}$ dengan $n, m \in \mathbb{N}$. Selanjutnya, Wamiliana dkk. (2016) melakukan penelitian untuk menentukan banyaknya graf tak terhubung berlabel titik berorde lima tanpa garis paralel. Pada tahun berikutnya, Amanto dkk. (2017) memberikan rumus untuk menentukan banyaknya graf tak terhubung berlabel titik berorde maksimal empat. Selanjutnya, Amanto dkk. (2018) memberikan rumus untuk menghitung graf takterhubung berlabel titik berorde lima dengan maksimum enam sisi 3-paralel tanpa *loop*. Pada tahun yang sama, Indrawan dkk. (2018) melakukan penelitian untuk menghitung banyaknya graf terhubung berlabel titik berorde lima dengan garis paralel atau *loop* maksimal dua serta garis non paralel maksimal enam. Pada tahun berikutnya, Wamiliana dkk. (2019) memberikan rumus untuk menghitung banyaknya graf berlabel titik berorde lima dengan maksimal lima garis paralel dan tanpa *loop*. Selanjutnya, Amanto dkk. (2020) melakukan penelitian untuk menentukan banyaknya graf terhubung berlabel titik tanpa *loop* berorde lima dengan $5 \leq m \leq 10$. Puri dkk. (2021) memberikan rumus untuk menghitung banyaknya graf terhubung berlabel titik berorde 6 dengan maksimal 30 garis tanpa *loop*, dan Putri dkk. (2021) melakukan penelitian untuk menentukan banyaknya graf tak terhubung berlabel titik berorde 6 dengan maksimal 20 garis paralel dan tanpa *loop* untuk $n = 6$, $1 \leq m \leq 20$, $1 \leq t \leq 10$. Pada penelitian ini akan didiskusikan tentang banyaknya graf tak terhubung berlabel titik berorde enam tanpa *loop* dan memuat garis paralel yang menghubungan pasangan titik yang berbeda sejumlah ganjil.

1.2. Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan banyaknya graf tak terhubung berlabel titik berorde enam tanpa *loop* dan memuat garis paralel yang menghubungan pasangan titik yang berbeda sejumlah ganjil untuk n = 6 serta $m \geq 2$.

1.3. Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah:

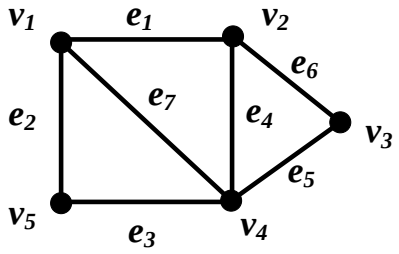
1. memperluas pengetahuan pengembangan keilmuan khususnya dalam bidang ilmu matematika mengenai perkembangan dari teori graf, yaitu tentang graf tak terhubung;
2. sebagai rujukan atau sumber referensi bagi pembaca untuk penelitian selanjutnya serta memberikan motivasi dalam mempelajari dan mengembangkan ilmu matematika khususnya pada bidang teori graf.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diberikan beberapa definisi dan teorema yang berhubungan dengan penelitian yang akan dilakukan.

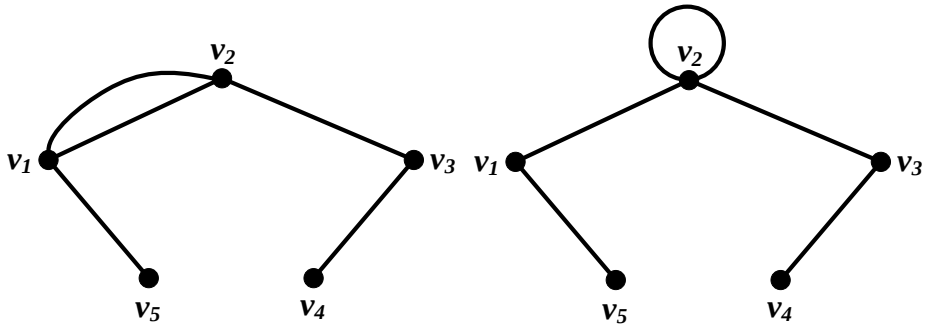
2.1. Konsep Dasar Teori Graf

Istilah-istilah dan definisi yang digunakan pada subbab ini merujuk dari Deo (1989). Graf $G = (V, E)$ didefinisikan sebagai pasangan terurut suatu himpunan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots\}$ merupakan himpunan titik, $V(G) \neq \emptyset$, dan $E(G) = \{e_1, e_2, \dots\}$ merupakan himpunan garis dari pasangan tak terurut titik titik di $V(G)$.



Gambar 2.1 Graf dengan 5 titik dan 7 garis

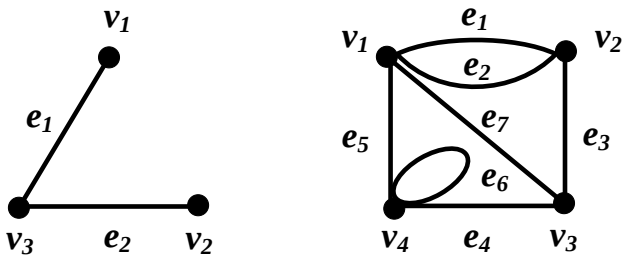
Suatu garis yang titik awal dan titik akhirnya sama disebut *loop*, sedangkan garis paralel adalah dua garis atau lebih yang menghubungkan titik- titik yang sama. Graf sederhana adalah graf yang tidak memuat *loop* atau garis paralel, sedangkan jika memuat *loop* atau garis paralel, maka disebut graf tak sederhana.



(a) (b)

Gambar 2.2. (a) Graf dengan garis paralel (b) Graf dengan *loop*

Pada Gambar 2.3 dapat dilihat bahwa pada Gambar 2.3 (a) merupakan contoh graf sederhana dengan tiga titik dan dua garis, sedangkan pada Gambar 2.3 (b) merupakan graf tidak sederhana dengan *loop* e_6 dan garis paralel e_1 dan e_2. Misalkan v_j merupakan titik ujung garis e_j pada suatu graf G, v_j dan e_j dikatakan *incidence* (menempel) satu sama lain. Dua garis tak paralel dikatakan *adjacent* (bertetangga) jika keduanya menempel pada suatu titik yang sama. Dua titik dikatakan *adjacent* (bertetangga) jika terdapat garis yang menghubungkan keduanya.



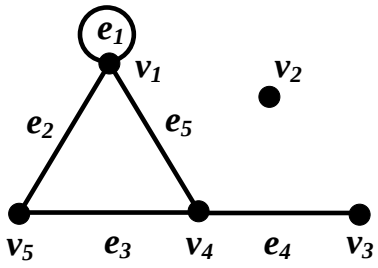
(a) (b)

Gambar 2.3 (a) Graf Sederhana (b) Graf tidak sederhana

Misalkan pada Gambar 2.3 (a) garis e_1 menempel pada titik v_1 dan titik v_3, dan garis e_2 menempel pada titik v_2 dan v_3. Titik v_1 bertetangga dengan titik v_3, titik v_2 bertetangga dengan v_3, serta titik v_3 bertetangga dengan v_1 dan v_2.

Walk adalah barisan berhingga dari suatu titik dan garis yang dimulai dan diakhiri dengan titik, sedemikian sehingga setiap garis menempel pada titik sebelum dan sesudahnya. *Walk* yang berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut *closed walk*. *Walk* yang melewati titik yang berbeda-beda disebut sebagai *path* (lintasan). *Path* yang berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut *cycle*. Suatu graf G disebut graf terhubung (*connected graph*) jika terdapat sekurang-kurangnya ada satu *path* yang menghubungkan setiap pasangan titik di G, jika tidak maka G disebut graf tak terhubung.

Derajat (*degree*) dari suatu titik v pada graf G dinotasikan $deg(v)$, adalah banyaknya garis yang menempel pada titik v dengan *loop* dihitung dua. Untuk contoh dapat dilihat pada Gambar 2.4 bahwa $deg(v_1) = 4$, $deg(v_2) = 0, deg(v_3) = 1$.



Gambar 2.4 Graf dengan 1 titik terasing dan 1 titik *pendant*

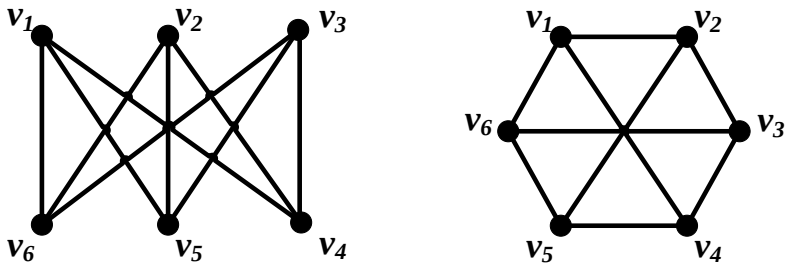
Titik terasing merupakan titik yang memiliki derajat nol, sedangkan titik *pendant* (daun) adalah titik yang memiliki derajat satu.

Dua graf dikatakan ekuivalen (dan disebut isomorfik) jika keduanya memiliki ciri-ciri yang sama pada istilah dalam teori graf. Dua graf G dan G' dikatakan isomorfik jika ada korespondensi 1-1 antara titik-titik pada kedua graf tersebut danantara garis-garis keduanya sehingga jika garis e bersisian dengan titik u dan v pada G maka garis e' pada G' juga bersisian dengan titik u' dan v'. Dua graf isomorfik harus memiliki:

1. banyak titik yang sama;
2. banyak garis yang sama;

3. titik-titik yang berkorespondensi mempunyai derajat yang sama.

Perlu diperhatikan bahwa dua graf yang mempunyai sifat 1 sampai dengan 3, belum tentu kedua graf tersebut isomorfik.



Gambar 2.5 Contoh graf yang saling isomorfik

2.2. Konsep Dasar Barisan

Barisan merupakan suatu fungsi yang semua domainnya merupakan bilangan bulat positif (Rosen, 2012).

Secara umum, barisan dinotasikan sebagai berikut:

$$a_m,\ a_{m+1},\ a_{m+2}, \dots, a_{m+n}$$

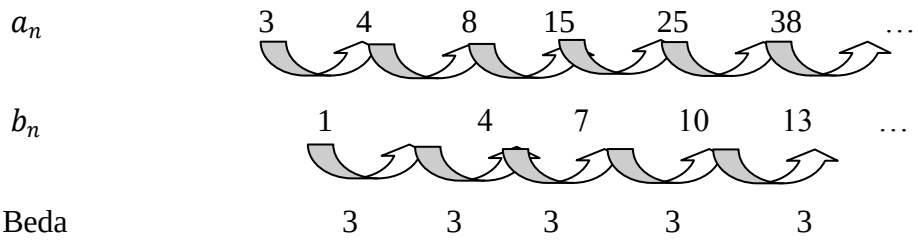
Barisan yang sering digunakan adalah barisan aritmatika dan barisan geometri. Barisan aritmatika adalah barisan yang berbentuk $a, a+d, a+2d, \dots, a+nd, \dots$, dengan a dan d adalah bilangan riil, dimana d merupakan beda. Barisan yang memiliki pola $a, ar, ar^2, \dots, ar^n$ dengan a dan r adalah bilangan riil dimana r merupakan rasio (beda) disebut barisan geometri (Rosen, 2012).

Secara umum barisan bilangan dapat dinotasikan dengan

$$(a_n) = (a_1,\ a_2,\ a_3, \dots,\ a_n).$$

Beda dari suku yang berurutan adalah selisih tiap dua suku yang berurutan. Misalkan suatu barisan $(a_n) = (3, 4, 8, 15, 25, 38, \dots)$. Selisih setiap suku yang

berurutan sebagai berikut:



Jika diperhatikan barisan (a_n) tingkat dua menghasilkan barisan (b_n) tingkat satu sebagai barisan aritmatika yang memiliki beda hasil = 3. Oleh karena itu, (a_n) dinamakan barisan aritmatika tingkat dua (Imail, 2012).

2.3. Konsep Dasar Teknik Pencacahan

Berikut ini ditentukan beberapa konsep dasar teknik pencacahan, antara lain:

2.3.1. Faktorisasi

Hasil kali semua bilangan bulat antara n sampai 1 didefinisikan sebagai besaran $n!$ sering di sebut n faktorial, dan dinotasikan dengan:

$$n! = n(n-1)(n-2) \ldots 1$$

(Ayres dan Schmidt, 2004).

2.3.2. Permutasi

Permutasi *r* objek dari *n* objek adalah suatu urutan *r* objek yang diambil dari *n* objek yang berbeda yang dapat dibentuk. Secara umum, permutasi *r* objek dari *n* buah objek dapat dihitung dengan persamaan:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Jika $r = n$, maka persamaan menjadi:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!.$$

$P(n,n)$ sering disebut permutasi n objek karena permutasi tersebut menyusun keseluruhan objek yang ada (Siang, 2002).

2.3.3. Kombinasi

Misalkan himpunan S memiliki $|S| = n$ elemen. Banyaknya himpunan bagian S terdiri dari r $(r \leq n)$ disebut kombinasi n objek yang diambil sebanyak r objek sekaligus. Simbolnya adalah $\binom{n}{r}$ atau $C(n,r)$ atau$1_n C_r$ Banyaknya kombinasi yang dimaksud dapat dinyatakan dalam persamaan:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}.$$

Dalam himpunan bagian yang dipilih, urutan kemunculan anggotanya tidaklah diperhatikan. Hal yang diperhatikan adalah objek yang muncul (Siang, 2002).

2.3.4. Cramer's Rule

Metode berikut memberikan rumus untuk solusi dari sistem linear tertentu dengan n persamaan dan n faktor yang tidak diketahui (Anton dan Rorres, 2005). Jika $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ adalah suatu sistem dari n persamaan linear dengan n faktor yang tidak diketahui sedemikian rupa sehingga $det(\boldsymbol{A}) \neq 0$, maka sistem ini memiliki solusi yang unik. Solusinya adalah:

$$x_1 = \frac{\det(\boldsymbol{A_1})}{\det(\boldsymbol{A})}, x_2 = \frac{\det(\boldsymbol{A_2})}{\det(\boldsymbol{A})}, \ldots., x_n = \frac{\det(\boldsymbol{A_n})}{\det(\boldsymbol{A})},$$

dengan $\boldsymbol{A_j}$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengganti entri-entri pada

kolom ke-j dari $\boldsymbol{A}$ dengan entri-entri pada matriks $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$, dengan $j = 1,2,..,n.$

2.3.5. Barisan Aritmatika Tingkat Tinggi

Barisan aritmatika tingkat ke-p adalah sebuah barisan yang memiliki selisih yang sama setiap suku berurutannya setelah p tingkatan. Tingkatan pada barisan aritmatika akan menghasilkan persamaan dengan pangkat tertingginya adalah p. Pangkat tertinggi dari suatu persamaan merupakan orde dari persamaan tersebut.

Fungsi polinomial adalah fungsi yang mengandung banyak suku (polinom) dalam variabel bebasnya. Bentuk umum persamaan polinomial pada deret aritmatika orde ke- p adalah:

$$P_p\,(m) = a_p\, m^p + a_{p-1}\, m^{p-1} + a_{p-2}\, m^{p-2} + \cdots + a_2 m^2 + a_1\, m + a_0,$$

dengan koefisien tertentu $a_1,\ a_2, a_3, \ldots, a_{p-1}, a_p, a_{p+1}$. Polinom ini memiliki derajat p, jika koefisien penentunya $a_1 \neq 0$ (Conte dan de Boor, 1980).

III. METODE PENELITIAN

3.1. Penelitian yang Telah Dilakukan Berkaitan dengan Perhitungan Graf

a) Penelitian yang dilakukan oleh Agnarsson dan Raymond (2007)

Diberikan $n, m \in \mathbb{N}$ dengan $0 \leq m \leq \binom{n}{2}$

1. Graf g_n dengan n sebagai titiknya merupakan graf sederhana, maka banyaknya graf g_n adalah:

$$g_n = 2^{\binom{n}{2}}$$

2. Graf $g_n(m)$ dari graf sederhana yang memiliki n titik dan m garis, maka banyaknya graf g_n adalah:

$$g_n(m) = \binom{\binom{n}{2}}{m}$$

Diberikan $n, m \in \mathbb{N}$. Graf $g_n(m)$ tidak memiliki *loop* dimana n sebagai titik dan m sebagai garis, maka banyaknya graf $g_n(m)$ adalah:

$$g_n(m) = \binom{m + \binom{n}{2} - 1}{m}$$

b) Penelitian yang dilakukan oleh Wamiliana dkk. (2016) tentang graf tak terhubung berlabel tanpa garis paralel dengan $n = 5$ dan $m \geq 1$ dapat dirumuskan secara umum, yaitu:

$$\begin{aligned} N(G'_{5,m}) &= N(G'_{5,m}) + \sum_{g=1}^{6} N(G'_{5,m,g}) \\ &= \binom{m+4}{m} + N(G'_{5,m,1}) + N(G'_{5,m,2}) + N(G'_{5,m,3}) \\ &\quad + N(G'_{5,m,4}) + N(G'_{5,m,5}) + N(G'_{5,m,6}) \end{aligned}$$

$$= \binom{m+4}{m} + 10\binom{m+3}{m} + 45\binom{m+2}{m} + 120\binom{m+1}{m} + 85\binom{m}{m} + 30\binom{m-1}{m} + 5\binom{m-2}{m}$$

dengan:

$N(G'_{5,m})$ = Jumlah graf tak terhubung berlabel tanpa garis paralel untuk $n = 5$ dan $m \geq 1$.

c) Penelitian yang dilakukan oleh Amanto dkk. (2017) menentukan banyaknya graf tak terhubung berlabel titik berorde maksimal empat dengan hasil sebagai berikut:

$$N(G'_{4,m,g_i}) = N(G'_{5,m,g_0}) + N(G'_{5,m,g_1}) + N(G'_{5,m,g_2}) + N(G'_{5,m,g_3})$$

$$N(G'_{4,m,g_i}) = \binom{m+3}{3} + \frac{3}{2}m\binom{m+3}{3} + 15\binom{m+3}{5} + 4\binom{m+3}{6}$$

dengan:

N = banyaknya titik

m = banyaknya garis

g_i = banyaknya garis bukan *loop* pada G dengan garis paralel dihitung satu $i = 0,1,2,3$

$N(G'_{n,m,g_i})$ = graf tak terhubung berlabel dengan garis paralel atau *loop* dengan n titik, m garis, dan g_i banyaknya garis bukan *loop* pada G dengan garis paralel dihitung satu.

d) Penelitian yang dilakukan oleh Amanto dkk. (2018) memberikan rumus untuk menghitung graf tak terhubung berlabel titik berorde lima dengan maksimum enam sisi 3-paralel tanpa *loop.*

e) Penelitian yang dilakukan oleh Indrawan dkk. (2018) memberikan rumus untuk menghitung banyaknya graf terhubung berlabel titik berorde lima dengan garis paralel atau *loop* maksimal dua serta garis non paralel maksimal enam.

f) Penelitian yang dilakukan oleh Wamiliana dkk. (2019) memberikan rumus untuk menghitung banyaknya graf berlabel titik berorde lima dengan

maksimal lima garis paralel dan tanpa *loop*.

g) Penelitian yang dilakukan oleh Amanto dkk. (2020) memberikan rumus untuk menghitung banyaknya graf terhubung berlabel titik tanpa *loop* berorde lima dengan $5 \leq m \leq 10$.

h) Penelitian yang dilakukan oleh Wamiliana dkk. (2020) memberikan rumus untuk menghitung banyaknya graf terhubung berlabel titik berorde enam maksimum 10 *loop* tanpa garis paralel.

i) Penelitian yang dilakukan oleh Puri dkk. (2021) memberikan rumus untuk menghitung banyaknya graf terhubung berlabel titik berorde 6 dengan maksimal 30 garis tanpa *loop*.

j) Penelitian yang dilakukan oleh Putri dkk. (2021) memberikan rumus untuk menghitung banyaknya graf tak terhubung berlabel titik berorde 6 dengan maksimal 20 garis paralel dan tanpa *loop*.

3.2. Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada tahun ajaran 2021/2022 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.3. Metode Penelitian

Adapun langkah – langkah yang digunakan dalam penelitian ini sebagai berikut.

1. Mengumpulkan bahan literatur serta studi pustaka yang berhubungan dengan graf.
2. Menggambar graf tak terhubung berlabel titik berorde enam tanpa *loop* dan memuat garis paralel yang menghubungkan pasangan titik yang berbeda adalah ganjil, jika diberikan n titik ($n = 6$) dan m garis ($m \geq 2$).
3. Mengelompokkan graf tak terhubung untuk n titik dan m garis yang sama

berdasarkan t.

4. Menghitung jumlah graf tak terhubung untuk setiap n titik dan m garis.
5. Menentukan pola yang terbentuk dari banyaknya graf tak terhubung yang dapat dibentuk dari *n* titik dan *m* garis.
6. Menentukan rumus secara umum untuk menghitung jumlah gambar graf tak terhubung berlabel titik berorde enam tanpa *loop* dan memuat garis paralel yang menghubungkan pasangan titik yang berbeda sejumlah ganjil untuk *n* titik dan *m* garis.
7. Membuktikan rumus yang terbentuk.
8. Menarik kesimpulan.

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1. Kesimpulan

Berdasarkan hasil observasi dari graf tak terhubung berlabel titik berorde enam tanpa *loop* dan memuat garis paralel yang menghubungkan pasangan titik yang berbeda sejumlah ganjil, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

Diberikan $n = 6$, dan t, maka banyaknya graf tak terhubung belabel titik tanpa *loop* dan memuat garis paralel yang menghubungkan pasangan titik yang berbeda sejumlah ganjil adalah:

1. $N\left(G_{6,m,1}^{d}\right)_{p_o} = 15, \text{untuk } m \geq 2$
2. $N\left(G_{6,m,2}^{d}\right)_{p_o} = 210, \text{untuk } m \geq 3.$
3. $N\left(G_{6,m,3}^{d}\right)_{p_o} = 455 \times \left(C_2^{(m-2)} - 2C_1^{(m-3)} + 4\right), \text{untuk } m \geq 4.$
4. $N\left(G_{6,m,4}^{d}\right)_{p_o} = 5460 \times \left(C_2^{(m-3)} - 2C_1^{(m-4)} + 2\right), \text{ untuk } m \geq 5.$
5. $N\left(G_{6,m,5}^{d}\right)_{p_o} = 1527 \times (C_4^{(m-2)} - 4C_3^{(m-3)} + 16C_2^{(m-4)} - 24C_1^{(m-5)} + 16), \text{untuk } m \geq 6.$
6. $N\left(G_{6,m,6}^{d}\right)_{p_o} = 7710 \times (C_4^{(m-3)} - 4C_3^{(m-4)} + 9C_2^{(m-5)} - 12C_1^{(m-6)} + \frac{1}{3}C_2^{(m-1)} + 2), \text{untuk } m \geq 7.$
7. $N\left(G_{6,m,7}^{d}\right)_{p_o} = 555 \times (C_6^{(m-2)} - 6C_5^{(m-3)} + 36C_4^{(m-4)} - 104C_3^{(m-5)} + 176C_2^{(m-6)} - 160C_1^{(m-7)} + 64),$ untuk $m \geq 8.$

8. $N\left(G_{6,m,8}^{d}\right)_{p_o} = 1680 \times (C_6^{(m-3)} - 6C_5^{(m-4)} + 22C_4^{(m-5)} - 48C_3^{(m-6)} + 64C_2^{(m-7)} - 48C_1^{(m-8)} + 16)$,
untuk $m \geq 9$.

9. $N\left(G_{6,m,9}^{d}\right)_{p_o} = 60 \times (C_8^{(m-2)} - 8C_7^{(m-3)} + 64C_6^{(m-4)} - 272C_5^{(m-5)} + 736C_4^{(m-6)} - 1280C_3^{(m-7)} + 1408C_2^{(m-8)} - 896C_1^{(m-9)} + 256)$,
untuk $m \geq 10$.

10. $N\left(G_{6,m,10}^{d}\right)_{p_o} = 60 \times (C_8^{(m-3)} - 8C_7^{(m-4)} + 40C_6^{(m-5)} - 128C_5^{(m-6)} + 275C_4^{(m-7)} + \frac{1}{5}C_4^{(m-1)} - 398C_3^{(m-8)} + 367C_2^{(m-9)} - 216C_1^{(m-10)} + 26)$,
untuk $m \geq 11$.

dengan:

$G_{n,m,t}^{d}$ = graf tak terhubung orde *n* berlabel titik dengan *m* garis dan *t* adalah banyaknya garis yang menghubungkan pasangan titik yang berbeda.

$N\left(G_{n,m,t}^{d}\right)_{p_o}$ = banyaknya $G_{n,m,t}^{d}$ tanpa *loop* dengan jumlah garis paralel yang menghubungkan pasangan titik yang berbeda sejumlah ganjil (*odd)*.

5.2. Saran

Penelitian ini dapat dilanjutkan untuk menentukan rumus umum banyaknya graf tak terhubung berlabel titik berorde lebih besar dari enam tanpa *loop* dan memuat garis paralel yang mengubungkan pasangan titik yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

Agnarsson, G. and Raymond, G. 2007. *Graph Theory Modelling, Application, and Algorithms*. Pearson/Prentice Education, Inc., New Jersey.

Amanto, Notiragayu, Puri, F.C., Antoni, Y., dan Wamiliana. 2020. Counting the number of vertexes labeled connected graphs of order five with minimum five edges and maximum ten parallel edges. *Journal of Physics: Conference Series* 1524 (1), 012-047.

Amanto, Wamiliana dan Efendi, M.F.N. 2018. The Number of Disconnected Vertex Labelled Graphs of Order Five With Maximum 3-Paralel Edges Is Six And Contains No Loops. *Mathematics National Conference (In Indonesia KNM)*, Universitas Brawijaya.

Amanto, Wamiliana, Mustofa Usman, dan Reni Permata Sari, 2017. Counting the Number of Disconnected Vertex Laeblled Graph with Order Maksimal Four. *Science International*, Vol.29, No.6, Hal. 1181-1186.

Anton, Howard and Chris Rorres. 2005. *Aljabar Linier Elementer edisi 8.* Erlangga, Jakarta.

Ayres, Frank J.R, dan Philip A.Schmidt. 2004. *Matematika Universitas*. Erlangga, Jakarta.

Conte, S.D. and Carl de Boor. 1980. *Dasar-dasar analisis numerik suatu pendekatan algoritma*. Edisi Ketiga. Erlangga, Jakarta.

Deo, N. 1989. *Graph Theory with Application to Engineering and Computer Science*. Prentice-Hall of India Private Limited, New Delhi.

Imail, S. 2012. *Suku Ke-n Barisan Aritmatika Tingkat Dua, Tiga dan Empat dengan Pendekatan Akar Karakteristik.* Respository.ung.ac.id/get/karyailmiah.pdf. Diakses Tanggal 31 Juli 2018, pukul 19.00 WIB.

Indrawan D, Wamiliana, Asmiati, dan Amanto. 2018. Banyaknya Graf Terhubung Berlabel Titik Berorde Lima Dengan Garis Paralel Atau Loop Maksimal Dua Serta Garis Non Paralel Maksimal Enam. *Prosiding Seminar Nasional Metode Kuantitatif 2018* 1, 1-277.

Puri, F.C., Wamiliana., Usman, M., Amanto., Ansori, M., Antoni, Y. 2021. The Forula to Count the Number of Vertices Labeled Order Six Connected Graphs with Maximum Thirty Edges without Loops. *Journal of Physics: Conference Series* 1751 (01), 012023.

Putri, D., Wamiliana., Fitriani., Faisol, A., Dewi, K.S. 2021. Determining the Number of Disconnected Vertices Labeled Graphs of Order Six with the Maximum Number Twenty Parallel Edges and Containing No Loops. *Journal of Physics: Conference Series* 1751 (01), 012024.

Rosen, K.H. 2012. *Discrete Mathematics and Its Applications,* Seventh Edition. McGraw-Hill, New York. USA.

Siang, Jong Jek. 2002. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada ilmu Komputer.* Andi Offset. Yogyakarta.

Wamiliana, Amanto, dan Grita Tumpi N. 2016. Counting the Number of Disconnected Labeled Graphs of Order Five Without Paralel Edges. *Journal INSIST* Vol.1, No.1, eISSN. Page 4-7.

Wamiliana, Amanto, Nuryaman, A., Sutrisno, A., dan Prayoga, N. 2019. A Determining the Number of Connected Vertices Labelled Graph of Order Five with Maximum Number of Parallel Edges is Five and Containing No Loops. *Journal of Physics: Conference Series* 1338 (1), 012043.

Wamiliana, Amanto, Usman, M., Ansori, M., dan Puri, F.C. 2020. Enumerating the Number of Connected Vertices Labeled Graph of Order Six with Maximum Ten Loops and Containing No Parallel Edges. *Science and Technology Indonesia* 5 (4), 131-135.