PENDUGAAN KOMPONEN RAGAM PADA RANCANGAN FAKTORIAL ACAK LENGKAP MENGGUNAKAN METODE *FEASIBLE GENERALIZED LEAST SQUARE* (FGLS)

(Skripsi)

Oleh

FERDY NANDA RIZA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2022

ABSTRACT

ESTIMATION OF VARIANCE COMPONENTS IN FACTORIAL COMPLETELY RANDOMIZED DESIGN USING FEASIBLE GENERALIZED LEAST SQUARE (FGLS) METHOD

By

FERDY NANDA RIZA

Feasible Generalized Least Square (FGLS) method is one of the methods commonly used in overcoming the heteroscedasticity problem on regression analysis. This research aims to determine the estimated value of the variance component in the Factorial Completely Randomized Design which have heteroscedasticity problems using FGLS method. This research was conducted using simulation data with fixed model assumptions. The results obtained show that the estimated value of the variance component using the FGLS method produces a minimum value, and also shows better model performance. The FGLS method is the right method to be used in overcoming the heteroscedasticity problem.

Key words: feasible generalized least square (FGLS), heteroscedasticity, variance component

ABSTRAK

PENDUGAAN KOMPONEN RAGAM PADA RANCANGAN FAKTORIAL ACAK LENGKAP MENGGUNAKAN METODE *FEASIBLE GENERALIZED LEAST SQUARE* (FGLS)

Oleh

FERDY NANDA RIZA

Metode *Feasible Generalized Least Square* (FGLS) merupakan salah satu metode yang biasa digunakan dalam mengatasi masalah heterokedastisitas pada analisis regresi. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan nilai dugaan komponen ragam pada Rancangan Acak Lengkap (RAL) Faktorial yang mengalami masalah heteroskedastisitas menggunakan metode FGLS. Penelitian dilakukan menggunakan data simulasi dengan asumsi model tetap. Hasil yang diperoleh menunjukkan nilai dugaan komponen ragam menggunakan metode FGLS menghasilkan nilai yang minimum, dan juga menunjukkan performansi model yang lebih baik. Metode FGLS merupakan metode yang tepat untuk digunakan dalam mengatasi masalah heteroskedastisitas.

Kata kunci: *feasible generalized least square* (FGLS), heteroskedastisitas, komponen ragam

PENDUGAAN KOMPONEN RAGAM PADA RANCANGAN FAKTORIAL ACAK LENGKAP MENGGUNAKAN METODE *FEASIBLE GENERALIZED LEAST SQUARE* (FGLS)

Oleh

Ferdy Nanda Riza

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2022

Judul Skripsi	: **PENDUGAAN KOMPONEN RAGAM PADA RANCANGAN FAKTORIAL ACAK LENGKAP MENGGUNAKAN METODE *FEASIBLE GENERALIZED LEAST SQUARE* (FGLS)**
Nama Mahasiswa	: Ferdy Nanda Riza
Nomor Pokok Mahasiswa	: 1817031001
Program Studi	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Ir. Netti Herawati, M.Sc., Ph.D.
NIP 196501251990032001

Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.
NIP 197008311999031002

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	: **Ir. Netti Herawati, M.Sc., Ph.D**	....
Sekretaris	: **Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	: **Drs. Nusyirwan, M.Si.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI UNIVERSITAS LAMPUNG FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, S.Si., M.T.
NIP 19740705 200003 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : 24 Juni 2022

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama Mahasiswa	: **Ferdy Nanda Riza**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1817031001**
Jurusan	: **Matematika**
Judul Skripsi	: **PENDUGAAN KOMPONEN RAGAM PADA RANCANGAN FAKTORIAL ACAK LENGKAP MENGGUNAKAN METODE FEASIBLE GENERALIZED LEAST SQUARE (FGLS)**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri, bukan hasil orang lain, dan semua hasil yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia merima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 24 Juni 2022
Penulis

METERAI TEMPEL
35CAJX926203762

Ferdy Nanda Riza
NPM. 1817031001

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Ferdy Nanda Riza dilahirkan di Dipasena Makmur pada tanggal 8 November 1999 sebagai anak kedua dari dua bersaudara, dari pasangan Bapak Amran Riza (rahimahallah) dan Ibu Herlina.

Penulis memulai pendidikannya di TK Dharma Wanita pada tahun 2005-2006 kemudian menempuh pendidikan tingkat dasar di SDN 1 BD Makmur pada tahun 2006-2011, dan pindah ke SDN 4 Labuhan Ratu pada tahun 2011-2012. Pada tahun 2012 penulis melanjutkan pendidikan tingkat menengah pertama di SMPN 22 Bandar Lampung dan lulus pada tahun 2015. Kemudian penulis melanjutkan pendidikan tingkat menengah atas di SMAN 5 Bandar Lampung pada tahun 2015-2018.

Pada tahun 2018, penulis terdaftar sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur SNMPTN. Selama menjalani perkuliahan, penulis aktif dalam organisasi Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA) sebagai anggota biro dana dan usaha pada periode 2019-2020.

Pada tahun 2021, di bulan Januari-Februari penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Kelurahan Talang, Kecamatan Teluk Betung Selatan, Kota Bandar Lampung selama 40 hari. Pada bulan Juli-Agustus penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Lembaga Penjaminan Mutu Pendidikan (LPMP) Provinsi Lampung. Dan pada bulan Agustus-Desember penulis mengikuti program Magang Bersertifikat di PT. Impactbyte Teknologi Edukasi yang diselenggarakan sebagai salah satu program Merdeka Belajar Kampus Merdeka (MBKM).

KATA INSPIRASI

“Sungguh menakjubkan keadaan seorang mukmin, seluruhnya urusannya itu baik. Ini tidaklah didapati kecuali pada seorang mukmin. Jika mendapatkan kesenangan, maka ia bersyukur, itu baik baginya. Jika mendapatkan kesusahan, maka ia bersabar, itu pun baik baginya.”

(HR. Muslim)

“Mukmin yang kuat lebih baik dan lebih dicintai oleh Allah daripada mukmin yang lemah. Namun, keduanya tetap memiliki kebaikan. Bersemangatlah atas hal-hal yang bermanfaat bagimu. Minta tolonglah pada Allah, jangan engkau lemah. Jika engkau tertimpa suatu musibah, maka janganlah engkau katakan: ‘Seandainya aku lakukan demikian dan demikian.’ Akan tetapi hendaklah kau katakan: ‘Ini sudah jadi takdir Allah. Setiap apa yang telah Dia kehendaki pasti terjadi.’ Karena perkataan seandainya dapat membuka pintu syaithon.”

(HR. Muslim)

“Wahai manusia, sesungguhnya kalian hanyalah kumpulan hari. Tatkala satu hari itu hilang, maka akan hilang pula sebagian dirimu.”

(Hasan Al Bashri)

PERSEMBAHAN

Dengan mengharapkan rahmat dan ridha Allah Subhanahu wa Ta'ala,
kupersembahkan karya sederhana ini kepada:

Ibu dan Kakak tercinta
Yang tak pernah lelah merawat, menyayangi, dan mendidikku hingga saat ini.
Yang selalu mendukung kegiatanku, dan selalu berdoa untuk keberhasilanku.
Terima kasih karena selalu ada untukku, semoga karya ini adalah langkah awal kesuksesanku agar aku bisa membuat Ibu dan Kakak bangga kepadaku.

Dosen Pembimbing dan Penguji
Yang senantiasa telah meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan dan ilmu yang bermanfaat kepadaku.

Almamater Tercinta, Universitas Lampung

SANWACANA

Puji syukur atas kehadirat Allah Subhanahu wa Ta'ala yang telah melimpahkan segala rahmat dan hidayahnya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Pendugaan Komponen Ragam pada Rancangan Faktorial Acak Lengkap Menggunakan Metode *Feasible Generalized Least Square* (FGLS)". Penulis menyadari bahwa dalam menyelesaikan skripsi ini, banyak pihak yang telah memberikan bimbingan, saran, dan juga semangat. Dalam kesempatan ini, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu Ir. Netti Herawati, M.Sc., Ph.D. selaku Dosen Pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, kritik, dan saran kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Bapak Agus Sutrisno, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, saran, dan motivasi kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Drs. Nusyirwan, M.Si. selaku Dosen Penguji yang telah memberikan kritik dan saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan.
4. Ibu Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah memberikan bimbingan dan arahan selama masa perkuliahan.
5. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Bapak Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, S.Si., M.T. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Seluruh Dosen, Staf, dan Karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang telah memberi ilmu dan bantuan kepada penulis.

8. Ibu, dan Kakak yang selalu memberikan doa, kasih sayang, pengertian, dan motivasi untuk keberhasilan penulis.
9. Teman-teman satu bimbingan yang telah berjuang bersama dan saling mendukung satu sama lain.
10. Teman-teman Pimpinan Himatika Periode 2020 yang telah berjuang bersama dan saling berbagi keceriaan dalam mewujudkan periode Himatika terbaik.
11. Is’ad dan Fatur teman seperjuangan saat menjalankan Kerja Praktik (KP) di LPMP Provinsi Lampung.
12. Teman-teman Mahasiswa Jurusan Matematika FMIPA Unila Angkatan 2018 dan semua pihak yang membantu dan tidak dapat disebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih banyak kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun guna penelitian selanjutnya agar lebih baik.

Bandar Lampung, 24 Juni 2022
Penulis,

Ferdy Nanda Riza

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Rancangan percobaan merupakan rangkaian uji menggunakan statistika deskriptif maupun statistika inferensial, yang bertujuan untuk mengubah peubah *input* menjadi suatu peubah *output* yang merupakan respons dari perlakuan tersebut (Mattjik & Sumertajaya, 2002). Menurut Djuris *et al*. (2013), rancangan percobaan adalah suatu konsep yang digunakan untuk mengatur, melakukan, dan menginterpretasikan hasil dari percobaan dengan cara yang efisien, dan bertujuan memperoleh informasi sebanyak-banyaknya dengan melakukan percobaan dalam jumlah sedikit. Mason *et al*. (2003), mengatakan bahwasanya penggunaan prinsip statistik pada rancangan percobaan memastikan percobaan dirancang ekonomis, efisien, dan pengaruh bersama faktor-faktor dapat dievaluasi.

Pada sebagian percobaan variabel output dipengaruhi oleh lebih dari satu faktor perlakuan, sehingga memungkinkan terjadinya interaksi antara suatu faktor dengan faktor lainnya. Percobaan yang melibatkan lebih dari satu faktor disebut juga sebagai percobaan faktorial. Rancangan percobaan faktorial pertama kali diusulkan oleh Fisher (1926), rancangan tersebut terbukti efisien dalam mengatur percobaan yang terkendali dan memiliki keragaman rendah (Green *et al*., 2002).

Pada kasus di mana respons hanya dipengaruhi oleh faktor perlakuan, serta setiap level dari masing-masing faktor memiliki jumlah yang sama maka rancangan tersebut disebut rancangan acak lengkap (RAL). Rancangan faktorial acak lengkap merupakan rancangan percobaan faktorial dengan rancangan dasar RAL, faktor yang digunakan terdiri dari dua faktor, yaitu faktor A dengan a level dan faktor B dengan b level, serta kedua faktor yang saling berinteraksi. Dalam rancangan faktorial dua faktor, ragam faktor A, ragam faktor B, ragam interaksi antara faktor A dan faktor B, dan ragam galat disebut komponen ragam (Gasperz, 1994).

Menurut Safitri (2013), beberapa metode dapat digunakan untuk menduga komponen ragam, yakni *analysis of variance* (ANOVA), metode *maximum Likelihood* (MLE), dan metode *restricted maximum Likelihood* (REML). Metode ANOVA merupakan suatu teknik penguraian ragam total ke dalam komponen-komponen model, di mana metode pendugaan parameter yang digunakan yaitu *ordinary least square* (OLS) untuk perancangan yang semua asumsinya terpenuhi. Namun ada kalanya data yang diperoleh tidak memenuhi asumsi non-heteroskedastisitas, sehingga metode OLS tidak menghasilkan penduga yang BLUE *(best linear unbiased estimator)*. Metode *generalized least square* (GLS), sebagai pengembangan metode OLS yang digunakan untuk mengatasi masalah heteroskedastisitas yang sering terjadi dalam asumsi perancangan percobaan statistika. Oleh karena itu pada penelitian ini akan dilihat dugaan komponen ragam dengan menggunakan bentuk feasible dari metode GLS, yaitu metode *feasible generalized least square* (FGLS), dalam rancangan acak lengkap faktorial.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan dugaan komponen ragam dengan menggunakan metode *feasible generalized least square* (FGLS) dalam rancangan acak lengkap faktorial.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Memperoleh penduga komponen ragam dengan metode *feasible generalized least square* (FGLS) dalam rancangan acak lengkap faktorial.
2. Menjadi referensi bagi pembaca apabila ingin melakukan penelitian mengenai pendugaan komponen ragam dengan metode *feasible generalized least square* (FGLS) dalam rancangan acak lengkap faktorial.
3. Mengembangkan wawasan keilmuan dan pengetahuan tentang pendugaan komponen ragam dengan metode *feasible generalized least square* (FGLS) dalam rancangan acak lengkap faktorial.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Percobaan Faktorial dengan Rancangan Acak Lengkap

Menurut Gasperz (1994), percobaan dengan rancangan faktorial acak lengkap (RAL) adalah percobaan faktorial yang menggunakan RAL sebagai rancangan dasar, sedangkan faktor yang dicobakan lebih dari satu. Percobaan faktorial akan berhadapan dengan kombinasi dari level-level faktor yang dicobakan disebut sebagai perlakuan. Pada percobaan faktorial pengaruh dari setiap faktor terhadap variabel respons dapat diuji, begitu pun dengan pengaruh interaksi antar faktor (Alanazi, 2018). Demikian pula menurut Lundstedt *et al*. (1998), pada rancangan faktorial pengaruh dari semua variabel percobaan, faktor, dan pengaruh interaksi diselidiki.

Model linear untuk percobaan faktorial yang terdiri dari dua faktor dengan menggunakan rancangan dasar RAL adalah sebagai berikut (Montgomery, 2012):

$$Y_{\mathrm{ijk}} = \mu + \tau_{\mathrm{i}} + \beta_{\mathrm{j}} + (\tau\beta)_{\mathrm{ij}} + \varepsilon_{\mathrm{ijk}} \tag{2.1}$$

$$\mathrm{i} = 1, 2, \dots, \mathrm{a};\ \mathrm{j} = 1, 2, \dots, \mathrm{b};\ \mathrm{k} = 1, 2, \dots, \mathrm{r}$$

dengan:

Y_{ijk} = pengamatan pada faktor A level ke-i, faktor B level ke-j, dan ulangan ke-k

μ = rata-rata umum

τ_{i} = pengaruh faktor A level ke-i

β_{j} = pengaruh faktor B level ke-j

$(\tau\beta)_{ij}$ = pengaruh interaksi faktor A_iB_j

ε_{ijk} = galat percobaan pada faktor A level ke-i, faktor B level ke-j, dan ulangan ke-k

Beberapa model pada rancangan faktorial di antaranya adalah model tetap, model acak, dan model campuran. Jika faktor A dengan a level dan faktor B dengan b level tetap, maka disebut model tetap. Jika faktor A dengan a level dan faktor B dengan b level acak, maka disebut model acak. Sedangkan jika faktor A dengan a level tetap dan faktor B dengan b level acak atau sebaliknya disebut dengan model campuran.

Asumsi apabila faktor A dengan a level acak dan faktor B dengan b level acak adalah (Herawati dkk., 2018b):

$\tau_i \sim_{iid} N(0, \sigma^2_{AB})$, $\beta_j \sim_{iid} N(0, \sigma^2_B)$, $(\tau\beta)_{ij} \sim_{iid} N(0, \sigma^2_{AB})$, dan $\varepsilon_{ijk} \sim_{iid} N(0, \sigma^2_e)$

Asumsi apabila faktor A dengan a level tetap dan faktor B dengan b level tetap adalah (Herawati dkk., 2018b):

$$\sum_{i=1}^{a} \tau_i = \sum_{j=1}^{b} \beta_j = \sum_{i=1}^{a} (\tau\beta)_{ij} = \sum_{j=1}^{b} (\tau\beta)_{ij} = 0$$

Sedangkan asumsi jika faktor A dengan a level tetap dan faktor B dengan b level acak adalah (Herawati dkk., 2018b):

$$\sum_{i=1}^{a} \tau_i = 0, \beta_j \sim_{iid} N(0, \sigma^2_B), (\tau\beta)_{ij} \sim_{iid} N(0, \sigma^2_{AB}), \text{dan } \varepsilon_{ijk} \sim_{iid} N(0, \sigma^2_e)$$

2.2 Uji Asumsi Rancangan

Menurut Angriany (2019), pada model rancangan percobaan terdapat beberapa asumsi yang harus dipenuhi, yaitu:

1. Galat menyebar normal

   Uji normalitas digunakan untuk melihat apakah data menyebar normal atau tidak. Normalitas data dapat ditentukan dengan menggunakan *normal probability plot*, dengan melihat titik-titik dugaan galat jika mengikuti garis diagonal berarti galat menyebar normal. Secara formal normalitas data dapat diuji dengan Uji Shapiro-Wilk. Berikut adalah rumus untuk menentukan statistik Uji Shapiro-Wilk:

$$W = \frac{1}{D}\left[\sum_{i=1}^{k} \alpha_i (X_{n-i+1} - X_i)\right]^2 \text{ dengan } D = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overleftarrow{X}\right) \tag{2.2}$$

   di mana

   $\overleftarrow{X}$ = rata-rata data

   X_i = data ke-i

   X_{n-i+1} = data ke-$(n - i + 1)$

   α_i = koefisien uji Shapiro-Wilk

2. Ragam galat homogen

   Asumsi homogenitas mensyaratkan bahwa sebaran galat untuk masing-masing kelompok harus memiliki ragam yang homogen. Uji formal yang dapat digunakan untuk memeriksa asumsi kehomogenan diantaranya Uji Levene, Harley, Cochran, dan Bartlett. Berikut adalah rumus untuk menentukan statistik Uji Levene (Nuryadi, dkk., 2017):

$$W = \frac{(n-k)\sum_{i=1}^{k} n_i\left(\overleftarrow{Z}_{i.} - \overleftarrow{Z}_{..}\right)^2}{(k-1)\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\overleftarrow{Z}_{ij} - \overleftarrow{Z}_{i.}\right)^2} \tag{2.3}$$

   dengan:

   n = jumlah pengamatan

   k = jumlah kelompok

   $\overleftarrow{Z}_{ij} = \left|Y_{ij} - \overleftarrow{Y}_{i.}\right|$, $\overleftarrow{Y}_{i.}$ = rata-rata kelompok ke-i

   $\overleftarrow{Z}_{i.}$ = rata-rata kelompok dari Z_{ij}

   $\overleftarrow{Z}_{..}$ = rata-rata menyeluruh dari Z_{ij}

3. Galat percobaan saling bebas

   Kebebasan galat percobaan lebih umum diartikan sebagai tidak ada korelasi antar galat, galat dari satu pengamatan yang mempunyai nilai tertentu harus tidak bergantung dari nilai-nilai galat pengamatan yang lain (Gasperz, 1994). Pengujian terhadap asumsi kebebasan antar galat percobaan dilakukan dengan cara membuat plot antara nilai galat dengan nilai dugaan pengamatan. Apabila grafik yang terbentuk berfluktuasi secara acak di sekitar nol, maka dapat dikatakan bahwa suku-suku galat percobaan saling bebas.

2.3 Struktur Data Pengamatan dan Struktur Analisis Ragam

Menurut Montgomery (2012), berikut tabulasi data RAL faktorial dua faktor.

Tabel 1. Tabulasi data yang terdiri dari faktor A dengan a level, faktor B dengan b level, dan r ulangan

Faktor A	Ulangan	Faktor B				Total Baris ($y_{i..}$)
		1	2	...	B	
1	1 2 ⋮ r $y_{1j.}$	y_{111} y_{112} ⋮ y_{11r} $y_{11.}$	y_{121} y_{122} ⋮ y_{12r} $y_{12.}$	... ...	y_{1b1} y_{1b2} ⋮ y_{1br} $y_{1b.}$	$y_{1..}$
2	1 2 ⋮ r $y_{2j.}$	y_{211} y_{212} ⋮ y_{21r} $y_{21.}$	y_{221} y_{222} ⋮ y_{22r} $y_{22.}$	... ...	y_{2b1} y_{2b2} ⋮ y_{2br} $y_{2b.}$	$y_{2..}$
⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮
A	1 2 ⋮ r $y_{ij.}$	y_{a11} y_{a12} ⋮ y_{a1r} $y_{a1.}$	y_{a21} y_{a22} ⋮ y_{a2r} $y_{a2.}$	... ...	y_{ab1} y_{ab2} ⋮ y_{abr} $y_{ab.}$	$y_{a..}$
Total Kolom ($y_{.j.}$)		$y_{.1.}$	$y_{.2.}$	...	$y_{.b.}$	$y_{...}$

Menurut Mattjik & Sumertajaya (2002), struktur analisis ragam (ANOVA) untuk rancangan faktorial acak lengkap ditunjukkan sebagai tabel berikut:

Tabel 2. Struktur tabel analisis ragam (ANOVA) pada rancangan faktorial acak lengkap

Sumber Keragaman	Derajat Bebas	Jumlah Kuadrat	Kuadrat Tengah	F_{hitung}
Faktor A	$a-1$	JK_A	KT_A	$\frac{KT_A}{KT_G}$
Faktor B	$b-1$	JK_B	KT_B	$\frac{KT_B}{KT_G}$
Interaksi AB	$(a-1)(b-1)$	JK_{AB}	KT_{AB}	$\frac{KT_{AB}}{KT_G}$
Galat	$ab(r-1)$	JK_G	KT_G	
Total	$abr-1$	JK_T		

Nilai dugaan untuk komponen ragam pada rancangan faktorial RAL model tetap adalah sebagai berikut (Searle *et al.*, 1992):

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = KTG \qquad (2.4)$$

Menurut Montgomery (2012), nilai statistik uji pada tabel ANOVA untuk percobaan faktorial dua faktor adalah sebagai berikut:

$$F_A = \frac{\frac{JK_A}{a-1}}{\frac{JK_G}{ab(r-1)}} = \frac{KT_A}{KT_G}$$

$$F_B = \frac{\frac{JK_B}{b-1}}{\frac{JK_G}{ab(r-1)}} = \frac{KT_B}{KT_G}$$

$$F_{AB} = \frac{\frac{JK_{AB}}{(a-1)(b-1)}}{\frac{JK_G}{ab(r-1)}} = \frac{KT_{AB}}{KT_G}$$

dengan:

Jumlah kuadrat total (JK_T)

$$JK_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r} y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn}$$

Jumlah kuadrat faktor A (JK_A)

$$JK_A = \frac{1}{bn}\sum_{i=1}^{a} y_{i..}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn}$$

Jumlah kuadrat faktor B (JK_B)

$$JK_B = \frac{1}{an}\sum_{j=1}^{b} y_{.j.}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn}$$

Jumlah kuadrat subtotal (JK_S)

$$JK_S = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij.}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn}$$

Jumlah kuadrat interaksi (JK_{AB})

$$JK_{AB} = JK_S - JK_A - JK_B$$

Jumlah kuadrat galat (JK_G)

$$JK_G = JK_T - JK_{AB} - JK_A - JK_B = JK_T - JK_S$$

di mana:

a = Jumlah level pada faktor A

b = Jumlah level pada faktor B

r = Jumlah ulangan tiap faktor

n = Jumlah pengamatan

2.4 Konsep-konsep Matriks

Menurut Graybill (1983), matriks adalah susunan persegi panjang dari elemen-elemen, berupa skalar dari suatu *field* $\mathbb{F}$. Suatu matriks dinotasikan dengan huruf kapital yang bercetak tebal – seperti **A**, **X**, **Y**, **Ψ**, ataupun **Ω**. Matriks **A** terdiri dari elemen yang dinotasikan dengan a_{ij}, di mana j merujuk indeks kolom, dan i merujuk indeks baris. Matriks **A** dapat juga ditulis sebagai

$$\mathbf{A} = [a_{ij}].$$

Perkalian Matriks

Diberikan matriks $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ dan $\mathbf{B} = [b_{ij}]$, dengan jumlah kolom pada **A** sama dengan jumlah baris pada **B**, maka perkalian $\mathbf{AB} = \mathbf{C} = [c_{ij}]$ didefinisikan sebagai matriks **C** dengan elemen ke-pq berupa

$$c_{pq} = \sum_{s=1}^{n} a_{ps} b_{sq}.$$

Penjumlahan Matriks

Diberikan matriks $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ dan $\mathbf{B} = [b_{ij}]$, dengan ukuran yang sama.

Penjumlahan $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$ menghasilkan

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Perkalian Skalar

Jika k adalah sebarang skalar dan **A** sebarang matriks, maka k**A** (dan **A**k) didefinisikan sebagai matriks **B** sedemikian sehingga setiap elemen dari **B** adalah elemen **A** yang bersesuaian dikali k.

Matriks Diagonal

Matriks diagonal **D** adalah matriks persegi yang elemen bukan diagonalnya adalah nol, sehingga jika $\mathbf{D} = [\mathrm{d_{ij}}]$, maka $\mathrm{d_{ij}} = 0$ jika $\mathrm{i} \neq \mathrm{j}$.

Invers Matriks

Misal **A** adalah matriks persegi. Jika terdapat matriks **B** sedemikian sehingga $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$, maka **B** disebut invers dari **A**, dinotasikan dengan $\mathbf{A}^{-1}$. Jika $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$, maka dapat ditunjukkan bahwa $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$. Bila terdapat matriks B sedemikian sehingga $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$, matriks **A** dikatakan non-singular; pada kasus sebaliknya, **A** dikatakan singular.

Transpose Matriks

Jika baris-baris dan kolom-kolom dari matriks **A** ditukar, maka akan menghasilkan matriks yang disebut transpose dari **A** dan dinotasikan dengan $\mathbf{A}^{\mathrm{t}}$. Jika A berukuran $\mathrm{m} \times \mathrm{n}$, maka $\mathbf{A}^{\mathrm{t}}$ berukuran $\mathrm{n} \times \mathrm{m}$.

Rank dari Matriks

Suatu matriks $\mathrm{m} \times \mathrm{n}$ dikatakan memiliki rank *r* jika ukuran sub-matriks persegi nonsingular terbesar dari **A** adalah *r*.

Bentuk Kuadrat

Misal suatu fungsi *f* dengan n peubah $x_1, x_2, \dots, x_{\mathrm{n}}$ didefinisikan oleh

$$f = \{(x_1,\ x_2, \dots, x_{\mathrm{n}}) \colon y = \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} a_{\mathrm{ij}} x_{\mathrm{i}} x_{\mathrm{j}},$$

di mana a_{ij} adalah sebarang himpunan bilangan, $-\infty < x_i < \infty,\ \mathrm{i} = 1, 2, \dots, \mathrm{n}$.

Dapat ditulis sebagai

$$f(x) = \mathbf{X}^{\mathrm{t}}\mathbf{A}\mathbf{X}$$

di mana **A** adalah suatu matriks $\mathrm{n} \times \mathrm{n}$ dengan elemen ke-ij sama dengan a_{ij} dan **X** adalah suatu vektor $\mathrm{n} \times 1$ dengan elemen ke-i sama dengan x_{i}. Fungsi *f* di atas didefinisikan sebagai bentuk kuadrat.

Matriks Kongruen

Dua matriks **A** dan **B** dikatakan kongruen jika dan hanya jika terdapat suatu matriks nonsingular **C** sedemikian sehingga $\mathbf{B} = \mathbf{C}^t\mathbf{AC}$, dan **C** disebut transformasi kongruen dari **A**.

Teorema 2.4.1 (Matriks Definit Positif)

Misal **C** adalah suatu matriks $m \times n$ dengan rank r, maka $\mathbf{C}^t\mathbf{C}$ dan $\mathbf{CC}^t$ merupakan definit positif ataupun semi-definit positif. Jika rank dari $\mathbf{C}^t\mathbf{C}$ atau $\mathbf{CC}^t$ sama dengan ukurannya, maka matriks definit positif, selainnya matriks semi-definit positif. Jika **A** adalah definit positif ataupun semi-definit positif berukuran $n \times n$, maka dapat ditulis sebagai $\mathbf{A} = \mathbf{K}^t\mathbf{K}$, di mana **K** berukuran $n \times n$ dan rank dari K sama dengan rank dari **A**

Matriks Ortogonal

Misal **P** adalah matriks berukuran $n \times n$. **P** merupakan matriks ortogonal jika dan hanya jika $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^t$.

2.5 Produk Kronecker

Model pada rancangan percobaan mempunyai pola matriks tertentu dan biasanya berukuran besar, sehingga sedikit menyulitkan dalam proses penulisan maupun perhitungannya. Produk Kroneker merupakan cara menuliskan matriks dalam bentuk yang lebih sederhana.

Definisi 2.5.1

Misal $\mathbf{A} \equiv [a_{ij}]$ dan $\mathbf{B} \equiv [b_{ij}]$ adalah matriks berukuran $m \times n$ dan $p \times q$ berturut-turut. Produk Kronecker $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = [a_{ij}\mathbf{B}]$ adalah matriks $mp \times nq$ yang dapat dinyatakan sebagai matriks berpartisi dengan $a_{ij}\mathbf{B}$ sebagai partisi ke-ij dengan $i = 1, \dots, m$ dan $j = 1, \dots, n$. Sehingga (Clarke, 2008):

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \cdots & a_{1s}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \cdots & a_{2s}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1}\mathbf{B} & a_{r2}\mathbf{B} & \cdots & a_{rs}\mathbf{B} \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

di mana,

$$[a_{ij}\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} a_{ij}b_{11} & a_{ij}b_{12} & \cdots & a_{ij}b_{1q} \\ a_{ij}b_{21} & a_{ij}b_{22} & \cdots & a_{ij}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ij}b_{p1} & a_{ij}b_{p2} & \cdots & a_{ij}b_{pq} \end{bmatrix}$$

Berdasarkan Definisi 2.5.1, diperoleh beberapa teorema berikut (Malik, 2015):

Teorema 2.5.1

Jika **A** dan **B** adalah sebarang matriks, maka:

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^t = \mathbf{A}^t \otimes \mathbf{B}^t$$

Bukti:

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^t = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \cdots & a_{1s}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1}\mathbf{B} & \cdots & a_{rs}\mathbf{B} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} a_{11}\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} & \cdots & a_{1s}\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1}\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} & \cdots & a_{rs}\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \end{bmatrix}^t$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & a_{11}b_{1n} & & a_{1s}b_{11} & \cdots & a_{1s}b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{m1} & \cdots & a_{11}b_{mn} & & a_{1s}b_{m1} & \cdots & a_{1s}b_{mn} \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ a_{r1}b_{11} & \cdots & a_{r1}b_{1n} & & a_{rs}b_{11} & \cdots & a_{rs}b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1}b_{m1} & \cdots & a_{r1}b_{mn} & & a_{rs}b_{m1} & \cdots & a_{rs}b_{mn} \end{bmatrix}^t$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & a_{11}b_{m1} & & a_{r1}b_{11} & \cdots & a_{r1}b_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{1n} & \cdots & a_{11}b_{mn} & & a_{r1}b_{1n} & \cdots & a_{r1}b_{mn} \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ a_{1s}b_{11} & \cdots & a_{1s}b_{m1} & & a_{rs}b_{11} & \cdots & a_{rs}b_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1s}b_{1n} & \cdots & a_{1s}b_{mn} & & a_{rs}b_{1n} & \cdots & a_{rs}b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} & \cdots & a_{r1}\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1s}\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} & \cdots & a_{rs}\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B}^t & \cdots & a_{r1}\mathbf{B}^t \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1s}\mathbf{B}^t & \cdots & a_{rs}\mathbf{B}^t \end{bmatrix} = \mathbf{A}^t \otimes \mathbf{B}^t \ \blacksquare$$

Teorema 2.5.2

Jika matriks **A**, **B**, **C**, dan **D** masing-masing berukuran $r \times s$, $t \times v$, $s \times v$ dan $v \times w$, maka:

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{AC} \otimes \mathbf{BD})$$

Bukti:

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \cdots & a_{1s}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1}\mathbf{B} & \cdots & a_{rs}\mathbf{B} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_{11}\mathbf{D} & \cdots & c_{1v}\mathbf{D} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{s1}\mathbf{D} & \cdots & c_{sv}\mathbf{D} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a_{11}\mathbf{B} + \cdots + a_{1s}\mathbf{B})(c_{11}\mathbf{D} + \cdots + c_{s1}\mathbf{D}) & \cdots & (a_{11}\mathbf{B} + \cdots + a_{1s}\mathbf{B})(c_{1v}\mathbf{D} + \cdots + c_{sv}\mathbf{D}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{r1}\mathbf{B} + \cdots + a_{rs}\mathbf{B})(c_{11}\mathbf{D} + \cdots + c_{s1}\mathbf{D}) & \cdots & (a_{r1}\mathbf{B} + \cdots + a_{rs}\mathbf{B})(c_{1v}\mathbf{D} + \cdots + c_{sv}\mathbf{D}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a_{11} + \cdots + a_{1s})\mathbf{B}(c_{11} + \cdots + c_{s1})\mathbf{D} & \cdots & (a_{11} + \cdots + a_{1s})\mathbf{B}(c_{1v} + \cdots + c_{sv})\mathbf{D} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{r1} + \cdots + a_{rs})\mathbf{B}(c_{11} + \cdots + c_{s1})\mathbf{D} & \cdots & (a_{r1} + \cdots + a_{rs})\mathbf{B}(c_{1v} + \cdots + c_{sv})\mathbf{D} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a_{11} + \cdots + a_{1s})(c_{11} + \cdots + c_{s1})\mathbf{BD} & \cdots & (a_{11} + \cdots + a_{1s})(c_{1v} + \cdots + c_{sv})\mathbf{BD} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{r1} + \cdots + a_{rs})(c_{11} + \cdots + c_{s1})\mathbf{BD} & \cdots & (a_{r1} + \cdots + a_{rs})(c_{1v} + \cdots + c_{sv})\mathbf{BD} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a_{11} + \cdots + a_{1s})(c_{11} + \cdots + c_{s1}) & \cdots & (a_{11} + \cdots + a_{1s})(c_{1v} + \cdots + c_{sv}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{r1} + \cdots + a_{rs})(c_{11} + \cdots + c_{s1}) & \cdots & (a_{r1} + \cdots + a_{rs})(c_{1v} + \cdots + c_{sv}) \end{bmatrix} \otimes \mathbf{BD}$$

$$= (\mathbf{AC} \otimes \mathbf{BD}) \blacksquare$$

Teorema 2.5.3

Jika **A** dan **B** adalah matriks $m \times n$ dan **C** adalah matriks $p \times q$, maka:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{C}) + (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C})$$

Bukti:

Notasikan $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ dan $\mathbf{B} = [b_{ij}]$:

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}+\mathbf{B})\otimes\mathbf{C} &= \begin{bmatrix}(a_{11}+b_{11})\mathbf{C} & \cdots & (a_{1n}+b_{1n})\mathbf{C}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ (a_{m1}+b_{m1})\mathbf{C} & \cdots & (a_{mn}+b_{mn})\mathbf{C}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}a_{11}\mathbf{C} & \cdots & a_{1n}\mathbf{C}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1}\mathbf{C} & \cdots & a_{mn}\mathbf{C}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}b_{11}\mathbf{C} & \cdots & b_{1n}\mathbf{C}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{m1}\mathbf{C} & \cdots & b_{mn}\mathbf{C}\end{bmatrix}\\ &= (\mathbf{A}\otimes\mathbf{C}) + (\mathbf{B}\otimes\mathbf{C})\,\blacksquare\end{aligned}$$

Teorema 2.5.4

Jika $\mathbf{I}_a$ dan $\mathbf{I}_b$ masing-masing merupakan matriks identitas berordo a dan b, maka

$$\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{I}_b = \mathbf{I}_{ab}$$

Bukti:

$$\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{I}_b = \begin{bmatrix}1_1\mathbf{I}_b & \cdots & 0\mathbf{I}_b\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0\mathbf{I}_b & \cdots & 1_a\mathbf{I}_b\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1_1\times 1_1 & \cdots & 1_1\times 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 1_1\times 0 & \cdots & 1_1\times 1_b\end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix}0\times 1_1 & \cdots & 0\times 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0\times 0 & \cdots & 0\times 1_b\end{bmatrix}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \begin{bmatrix}0\times 1_1 & \cdots & 0\times 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0\times 0 & \cdots & 0\times 1_b\end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix}1_a\times 1_1 & \cdots & 1_a\times 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 1_a\times 0 & \cdots & 1_a\times 1_b\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1_1 & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \mathbf{1_b} & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & 1_{ab}\end{bmatrix} = \mathbf{I}_{ab}\,\blacksquare$$

2.6 *Ordinary Least Square*

Menurut Angriany dkk. (2019), bentuk umum persamaan model regresi linear adalah:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + \varepsilon_i$$

atau dalam notasi matriks:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\,\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.6}$$

OLS merupakan salah satu metode yang banyak digunakan oleh para peneliti dalam proses perhitungan suatu persamaan regresi. Cara kerja dengan meminimumkan jumlah kuadrat galat. Agar hasil dugaan OLS bersifat BLUE (*Best Linear Unbiased Estimator*) maka harus dipenuhi beberapa asumsi dasar yaitu :

1. Nilai harapan galat ε sama dengan nol atau $\mathrm{E}(\varepsilon) = 0$;
2. Galat ε memiliki ragam yang konstan atau tidak terjadi heteroskedastisitas;
3. Tidak ada korelasi antara galat ε_i dan ε_j di mana $i \neq j$ atau tidak terjadi autokorelasi;
4. Tidak terjadi multikolinearitas atau variabel bebas saling independen;
5. Galat ε_i berdistribusi normal atau dapat ditulis $\varepsilon \sim_{iid} \mathrm{N}(0, \sigma^2\mathbf{I})$

Dengan menggunakan metode OLS maka diperoleh :

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}} = (\mathbf{X}^t\,\mathbf{X})^{-1}\,\mathbf{X}^t\,\mathbf{Y} \tag{2.7}$$

dengan matriks ragam–peragam:

$$\mathrm{Var}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}}) = \sigma^2(\mathbf{X}^t\,\mathbf{X})^{-1} \tag{2.8}$$

sedangkan dugaan untuk $\mathrm{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2$ OLS adalah:

$$\widehat{\sigma}^2{}_{\mathrm{OLS}} = \frac{1}{n-p}[\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^t\,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}] = \frac{1}{n-p}\left[\left(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}}\right)^t\left(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}}\right)\right] \tag{2.9}$$

2.7 *Generalized Least Square*

Heteroskedastisitas adalah keadaan di mana $\mathrm{Var}(\varepsilon)$ tidak berbentuk $\sigma^2\mathbf{I}$, melainkan berbentuk matriks diagonal dengan elemen pada diagonal utamanya tidak konstan. Selain itu dapat juga terjadi elemen di luar diagonal utama untuk matriks $\mathrm{Var}(\varepsilon) \neq 0$ yang berarti pengamatan saling berkorelasi atau serial korelasi (Draper & Smith, 1992).

Pada data yang memiliki masalah heteroskedastisitas dan autokorelasi, model regresinya dapat ditulis sebagai berikut (Davidson & McKinnon, 2003):

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\,\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \qquad \mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{t}}) = \boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2\boldsymbol{\Omega} \tag{2.10}$$

di mana $\boldsymbol{\Sigma}$ adalah matriks ragam-peragam, dan $\boldsymbol{\Omega}$ adalah matriks definit positif berukuran $\mathrm{n} \times \mathrm{n}$. Jika $\boldsymbol{\Omega}$ berupa matriks diagonal dengan elemen tidak konstan, maka galat hanya mengandung masalah heteroskedastisitas. Jika $\boldsymbol{\Omega}$ tidak berupa matriks diagonal, maka ε_i dan ε_j berkorelasi yaitu ketika ω_{ij}, elemen $\boldsymbol{\Omega}$ baris ke-i kolom ke-j, tidak sama dengan nol (Davidson & McKinnon, 2003).

Pada dasarnya metode GLS melakukan transformasi terhadap model persamaan OLS. Karena matriks $\boldsymbol{\Omega}$ merupakan matriks definit positif, maka matriks $\boldsymbol{\Omega}$ dapat diuraikan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{\Omega}^{-1} = \boldsymbol{\Psi}\,\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{t}} \tag{2.11}$$

Dengan mengalikan $\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{t}}$ pada persamaan (2.10) maka diperoleh

$$\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{t}}\mathbf{Y} = \boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{t}}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.12}$$

atau dapat ditulis sebagai

$$\widetilde{\mathbf{Y}} = \widetilde{\mathbf{X}}\,\boldsymbol{\beta} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{2.13}$$

dengan

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{t}}) &= \mathrm{E}(\boldsymbol{\Psi}\,\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{t}}\,) = \boldsymbol{\Psi}\,\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{t}})\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{t}} = \boldsymbol{\Psi}\,\sigma^2\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{t}} = \sigma^2\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{t}} \\ &= \sigma^2\mathbf{I} \end{aligned} \tag{2.14}$$

Karena matriks ragam-peragam $\boldsymbol{\Omega}$ non-singular, maka matriks $\boldsymbol{\Psi}$ juga non-singular, serta komponen ragam yang dihasilkan homogen, sehingga model regresi (2.13) setara dengan model (2.6). Dengan menerapkan pendugaan OLS pada model (2.13), maka diperoleh:

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}} &= \left(\widetilde{\mathbf{X}}^{\mathrm{t}}\,\widetilde{\mathbf{X}}\right)^{-1}\widetilde{\mathbf{X}}^{\mathrm{t}}\,\widetilde{\mathbf{Y}} = (\mathbf{X}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\Psi}\,\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{X})^{-1}\,\mathbf{X}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\Psi}\,\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{Y} \\ &= (\mathbf{X}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\,\mathbf{X})^{-1}\,\mathbf{X}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Y} \end{aligned} \tag{2.15}$$

Penduga di atas disebut penduga *generalized least square* (GLS) (Davidson & MacKinnon, 2003).

Karena penduga GLS merupakan penduga OLS dari (2.12), matriks ragam-peragamnya dapat diperoleh dengan cara serupa, yaitu:

$$\mathrm{Var}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}}\right) = \sigma^2\left(\widetilde{\mathbf{X}}^{\mathrm{t}}\,\widetilde{\mathbf{X}}\right)^{-1} = \sigma^2(\mathbf{X}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\Psi}\,\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{X})^{-1} = \sigma^2(\mathbf{X}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\,\mathbf{X})^{-1} \tag{2.16}$$

dan dugaan untuk σ^2 GLS adalah:

$$\widehat{\sigma}^2{}_{\mathrm{GLS}} = \frac{1}{\mathrm{n}-\mathrm{p}}[(\boldsymbol{\Psi}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\Psi}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}] = \frac{1}{\mathrm{n}-\mathrm{p}}\left[\left(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}}\right)^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\left(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}}\right)\right] \tag{2.17}$$

Menurut Bai *et al*. (2020), penggunaan metode penduga *generalized least square* (GLS) lebih efektif dalam mengatasi masalah heteroskedastisitas dan autokorelasi dibanding OLS. Pelanggaran terhadap beberapa asumsi dalam model regresi linier seperti terjadinya heterokedastisitas menyebabkan metode OLS tidak tepat untuk digunakan dalam menduga parameter pada model regresi linier.

2.8 *Feasible Generalized Least Square*

Pada praktiknya, matriks $\mathbf{\Omega}$ maupun nilai skalar σ^2 tidak diketahui, sehingga tidak memungkinkan untuk menghitung penduga GLS. Pada banyak kasus matriks $\mathbf{\Omega}$ bergantung terhadap langkah tertentu pada parameter γ yang tidak diketahui. Dengan demikian memungkinkan untuk menduga γ secara konsisten untuk memperoleh $\widehat{\mathbf{\Omega}} = \mathbf{\Omega}(\hat{\gamma})$. Sehingga $\widehat{\mathbf{\Psi}} = \mathbf{\Psi}(\hat{\gamma})$ dapat ditentukan dan penduga GLS dihitung dengan menggunakan $\widehat{\mathbf{\Psi}}$. Prosedur yang demikian merupakan bentuk feasible dari GLS atau disebut sebagai *feasible generalized least square* (FGLS) (Davidson & McKinnon, 2003).

Menurut Miller (2018), FGLS mengandung tiga langkah utama, yaitu:

1. Menduga (2.6) menggunakan OLS dan menotasikan galat pengamatan ke-i sebagai u_i
2. Menduga model $\hat{\mathrm{u}}_{\mathrm{i}}^2 = \mathrm{y}(\mathrm{z}_{\mathrm{i}})$ yang menjelaskan kuadrat galat (disebut juga sebagai fungsi skedastik), di mana z_i bisa jadi mengandung elemen dari x_i atau bentuk transformasinya. Lalu menotasikan nilai prediksi dari model tersebut dengan $\tilde{\mathrm{u}}_{\mathrm{i}}^2$.
3. Menduga kembali (2.6), kali ini dengan meminimumkan jumlah kuadrat galat terboboti, dengan bobot untuk kuadrat galat ke-i berupa $\frac{1}{\tilde{\mathrm{u}}_{\mathrm{i}}^2}$.

Kelebihan dari prosedur di atas adalah penduga yang diperoleh mempertahankan kekonsistenan, sehingga secara asimtotik lebih efisien dari OLS karena mengurangi bobot yang terkandung pada pengamatan. Penduga yang diperoleh dapat ditulis sebagai berikut (Davidson & McKinnon, 2003):

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{FGLS}} = \left(\mathbf{X}^{\mathrm{t}}\widehat{\mathbf{\Omega}}^{-1}\,\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{t}}\widehat{\mathbf{\Omega}}^{-1}\mathbf{Y} \tag{2.18}$$

di mana $\widehat{\mathbf{\Omega}}$ matriks diagonal dengan elemen $\widehat{\omega}_{\mathrm{ii}} = \tilde{\mathrm{u}}_{\mathrm{i}}^2$ dari langkah ketiga pada prosedur sebelumnya.

Menurut Davidson & McKinnon (2003), untuk dapat menerapkan metode penduga GLS dan FGLS, setidaknya data memiliki galat yang tidak homogen, karena jika galat homogen ataupun tidak berkorelasi, maka prosedur yang dihasilkan sama seperti penduga OLS.

2.9 Fungsi Skedastik

Beberapa pendekatan berbeda sudah diterapkan untuk menduga fungsi skedastik untuk penduga FGLS. Romano & Wolf (2017) mengajukan fungsi skedastik untuk menduga galat sebagai berikut:

$$\log\left(\max\left(\hat{u}^2, \hat{\delta}^2\right)\right) = \log(|X|)\,\alpha + e \tag{2.19}$$

dengan:

$\hat{u}$ = galat regresi hasil metode OLS

$\hat{\delta}$ = konstanta yang membatasi $\hat{u}$ jauh dari nol

α = koefisien regresi fungsi skedastik

e = faktor acak fungsi skedastik

Miller (2018) menunjukkan bahwasanya penggunaan fungsi skedastik (2.19) menghasilkan penduga FGLS yang paling konsisten dan bersifat penduga BLUE dibandingkan penduga FGLS dengan fungsi skedastik lain.

2.10 Model Faktorial RAL dalam Regresi

Menurut Angriany (2019), model linear dari rancangan faktorial RAL (2.1) pada data dengan a level faktor A, b level faktor B, dan r ulangan dapat ditulis dalam bentuk produk Kronecker berikut:

$$\mathbf{Y} = \left(\underline{1}_a \otimes \underline{1}_b \otimes \underline{1}_r\right)\mu + \left(\mathbf{I}_a \otimes \underline{1}_b \otimes \underline{1}_r\right)\boldsymbol{\tau} + \left(\underline{1}_a \otimes \mathbf{I}_b \otimes \underline{1}_r\right)\boldsymbol{\beta} + \left(\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{I}_b \otimes \underline{1}_r\right)(\boldsymbol{\tau\beta}) + (\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{I}_b \otimes \mathbf{I}_r)\boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.20}$$

dengan:

μ = nilai rata-rata umum

$\boldsymbol{\tau}$ = matriks kolom faktor A dengan entri $\tau_i;\ i = 1,2,\dots,a$

$\boldsymbol{\beta}$ = matriks kolom faktor B dengan entri $\beta_j;\ j = 1,2,\dots,b$

$(\boldsymbol{\tau\beta})$ = matriks kolom interaksi faktor A dan B dengan entri $(\tau\beta)_{ij}$;

$\boldsymbol{\varepsilon}$ = matriks kolom dengan entri $\varepsilon_{ijk};\ k = 1,2,\dots,r$

$\underline{1}$ = matriks kolom dengan entri 1

$\mathbf{I}$ = matriks identitas

Misal:

$\mathbf{X}^* = \left[\left(\underline{1}_a \otimes \underline{1}_b \otimes \underline{1}_r\right) \quad \left(\mathbf{I}_a \otimes \underline{1}_b \otimes \underline{1}_r\right) \quad \left(\underline{1}_a \otimes \mathbf{I}_b \otimes \underline{1}_r\right) \quad \left(\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{I}_b \otimes \underline{1}_r\right)\right]$; $\boldsymbol{\beta}^* = [\ \mu \quad \boldsymbol{\tau}^t \quad \boldsymbol{\beta}^t \quad (\boldsymbol{\tau\beta})^t\ ]^t$; dan $\boldsymbol{\varepsilon}^* = (\mathbf{I}_a \otimes \mathbf{I}_b \otimes \mathbf{I}_r)\boldsymbol{\varepsilon}$; maka (2.20) dapat ditulis sebagai:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}^*\boldsymbol{\beta}^* + \boldsymbol{\varepsilon}^* \tag{2.21}$$

Persamaan di atas setara dengan (2.6), sehingga metode pendugaan parameter model regresi dapat diterapkan pada data rancangan faktorial RAL.

2.11 Pengukuran Performansi

Untuk mengevaluasi performansi kedua metode penduga, digunakan *Mean Squared Error* (MSE) dari nilai dugaan variabel dependen $(\hat{y})$. Nilai MSE didefinisikan sebagai berikut (Wallach & Goffinet, 1989):

$$\mathrm{MSE}(\hat{y}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\hat{y_i} - y_i)^2$$

di mana:

$\hat{y_i}$ = nilai dugaan variabel dependen ke-i

y_i = nilai variabel dependen ke-i

N = ukuran sampel

Nilai MSE yang mendekati nol mengindikasikan bahwa penduga memiliki ragam yang relatif kecil, berdasarkan sifat MSE (Wallach & Goffinet, 1989):

$$\mathrm{MSE}(\hat{y}) = \mathrm{Var}\left(\hat{\hat{y}}\right) + \mathrm{bias}^2(\hat{y}, y)$$

Sebagai tambahan, digunakan juga *Akaike Information Criterion* (AIC). Nilai AIC didefinisikan sebagai berikut (Akaike, 1974):

$$\mathrm{AIC} = 2k - 2\ln(\hat{L})$$

dengan:

$\hat{L} = P(x|\hat{\theta}, M)$, nilai maksimum fungsi *likelihood* dari model

$\hat{\theta}$ = nilai parameter yang memaksimalkan fungsi *likelihood*

x = data yang diamati

k = jumlah parameter dugaan model

Berdasarkan nilai AIC, model yang lebih baik ditunjukkan dengan nilai AIC yang lebih rendah (Herawati dkk., 2018a).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada semester genap tahun ajaran 2021/2022 bertempat di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Data Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data simulasi menggunakan *software* statistika R versi 4.1.2 dengan bantuan *integrated development environment* (IDE) RStudio versi 1.4.1717. Data yang dibangkitkan adalah data faktorial rancangan acak lengkap (RAL) model tetap berukuran 60, yaitu dengan 3 level faktor A, 4 level faktor B, dan 5 ulangan. Data dibangkitkan dengan galat yang tidak homogen.

3.3 Metode Penelitian

Adapun langkah-langkah yang akan dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memformulasikan model Faktorial RAL dalam bentuk persamaan regresi dengan menggunakan produk Kronecker.

2. Membangkitkan data simulasi faktorial RAL model tetap berukuran 60, yaitu dengan 3 faktor A, 4 faktor B, dan 5 ulangan. Data yang dibangkitkan memiliki ragam galat yang tidak homogen. Untuk memperoleh data yang bersifat demikian dapat dilakukan dengan cara menerapkan model berikut:

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \,;$$
$$i = 1, 2, \text{dan } 3; j = 1, 2, 3, \text{dan } 4;\ \text{dan } k = 1, \dots, 5$$

   dengan:

$$\varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2 \boldsymbol{\Omega});$$

   di mana $\sigma^2 = 1$, $\boldsymbol{\Omega} \equiv (\omega_{st}), \omega_{st} = 0$ dan $\omega_{ss} \neq \omega_{tt}$ ketika $s \neq t$. Nilai dari setiap parameter model faktorial RAL ditentukan sebagai berikut:

   - $\mu = 12;$
   - $\tau_1 = -4.50, \tau_2 = 1.00, \tau_3 = 3.50$, dengan $\sum_{i=1}^{3} \tau_i = 0;$
   - $\beta_1 = 3.30, \beta_2 = 2.20, \beta_3 = -0.10, \beta_4 = -5.40$, dengan $\sum_{j=1}^{4} \beta_j = 0;$
   - $(\tau\beta)_{11} = -14.85, (\tau\beta)_{12} = -9.90, (\tau\beta)_{13} = 0.45, (\tau\beta)_{14} = 24.30,$
     $(\tau\beta)_{21} = 3.30, (\tau\beta)_{22} = 2.20, (\tau\beta)_{23} = -0.10, (\tau\beta)_{24} = -5.40,$
     $(\tau\beta)_{31} = 11.55, (\tau\beta)_{32} = 7.70, (\tau\beta)_{33} = -0.35, (\tau\beta)_{34} = 18.90,$
     dengan $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} (\tau\beta)_{ij} = 0$. Nilai $(\tau\beta)_{ij}$ diperoleh dari hasil $\tau_i \times \beta_j$.
3. Menguji homogenitas data dengan Uji Levene.
4. Menduga parameter model faktorial RAL dengan metode OLS.
5. Menduga parameter model faktorial RAL dengan metode FGLS.
   a. Menghitung galat hasil dugaan metode OLS.
   b. Menduga parameter fungsi skedastik
   $$\log\left(\max\left(\hat{u}^2, \hat{\delta}^2\right)\right) = \log(|\mathbf{X}|)\, \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{e}$$
   c. Menentukan matriks bobot $\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}$.
   d. Menduga parameter.
6. Membentuk tabel ANOVA berdasarkan model hasil dugaan metode OLS.
7. Membentuk tabel ANOVA berdasarkan model hasil dugaan metode FGLS.
8. Menghitung komponen ragam.
9. Menghitung nilai MSE dan AIC pada kedua model.
10. Membandingkan nilai MSE dan AIC dari kedua model.
11. Menarik kesimpulan.

V. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dilakukan, maka dapat disimpulkan bahwa metode penduga *Feasible Generalized Least Square* (FGLS) dapat digunakan sebagai alternatif dari metode penduga *Ordinary Least Square* (OLS) untuk menduga komponen ragam pada Rancangan Acak Lengkap (RAL) Faktorial yang mengalami masalah heteroskedastisitas. Dari hasil *Analysis of Variance* (ANOVA) menggunakan metode penduga OLS dan FGLS, diketahui bahwa nilai dugaan komponen ragam yang diperoleh menunjukkan perbedaan yang cukup besar, di mana nilai dugaan komponen ragam FGLS memiliki nilai yang lebih kecil. Metode penduga FGLS merupakan metode penduga yang lebih baik untuk digunakan dalam menduga komponen ragam RAL faktorial, karena menghasilkan nilai dugaan yang minimum dan menunjukkan performansi model yang lebih baik.

DAFTAR PUSTAKA

Akaike, H. 1974. A New Look at The Statistical Model Identification. *IEEE transactions on automatic control.* **19**(6): 716-723.

Alanazi, T. 2018. Construction and Analysis of Experimental Designs (Doctoral Dissertation). RMIT University, Sidney.

Angriany, A.M.N., Tinungki, G.M., & Raupong, R. 2019. Estimasi Komponen Variansi pada Rancangan Faktorial Acak Lengkap Menggunakan Metode Generalized Least Squares. *Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi*. **15**(2): 54-66.

Bai, J., Choi, S.H., & Liao, Y. 2021. Feasible Generalized Least Squares for Panel Data with Cross-Sectional and Serial Correlations. *Empirical Economics*. **60**(1): 309-326.

Clarke, B.R. 2008. *Linear Models: The Theory and Application of Analysis of Variance*. John Wiley & Sons, USA.

Davidson, R. & MacKinnon, J.G. 2004. *Econometric Theory and Methods* (Vol. 5). Oxford University Press, New York:

Djuris, J., Ibric, S., & Djuric, Z. 2013. Experimental Design Application and Interpretation in Pharmaceutical Technology. *Computer-Aided Applications in Pharmaceutical Technology*. **1**: 31-56.

Draper, N.R. & Smith, H. 1992. *Applied Regression Analysis.* John Wiley and Sons, USA.

Fisher R.A. 1926. The Arrangement of Field Experiments. *Journal of the Ministry of Agriculture.* **33**: 503-515.

Gasperz, V. 1994. *Metode Perancangan Percobaan Untuk Ilmu-ilmu Pertanian, Ilmu-ilmu Teknik, Biologi*. Armico, Bandung.

Graybill, F.A. 1983. *Matrices with Applications in Statistics*. 2^{nd} Edition. Wadsworth. Inc., California.

Green, S., Liu, P.Y., & O'Sullivan, J. 2002. Factorial Design Considerations. *Journal of Clinical Oncology*. **20**(16): 3424-3430.

Herawati, N., Nisa, K., Setiawan, E., Nusyirwan, & Tiryono. 2018. . Regularized Multiple Regression Methods to Deal with Severe Multicollinearity. *International Journal of Statistics and Applications*. **8**(4): 167-172.

Herawati, N., Setiawan, E., & Nisa, K. 2018. *Rancangan Percobaan: Teori dan Aplikasi SAS*. Pusaka Media, Bandar Lampung:

Lundstedt, T., Seifert, E., Abramo, L., Thelin, B., Nyström, Å., Pettersen, J. & Bergman, R. 1998. Experimental Design and Optimization. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*. **42**(1-2): 3-40.

Malik, I. 2015. Uji Hipotesis dan Interval Kepercayaan Rasio Fungsi Linear Parameter Rancangan Nested Tiga Level (Tesis). Program Studi Magister Matematika FMIPA Universitas Lampung, Lampung.

Mason, R.L., Gunst, R.F., & Hess, J.L. 2003. *Statistical Design and Analysis of Experiments: with Applications to Engineering and Science*. John Wiley & Sons, USA.

Mattjik, A.A. & Sumertajaya I M. 2002. *Perancangan Percobaan dengan Aplikasi SAS dan Minitab,* Jilid I. IPB Press, Bogor.

Miller, S. & Startz, R. 2018. Feasible Generalized Least Square Using Machine Learning. *SSRN*.

Montgomery, D.C. 2012. *Design and Analysis of Experiments*. 7th Edition. John Wiley & Sons, USA.

Nuryadi, Astuti, T.D., Utami, E.S., & Budiantara, M. 2017. *Dasar-Dasar Statistik Penelitian*. Sibuku Media, Yogyakarta.

Romano, J.P. & Wolf, M. 2017. Resurrecting Weighted Least Squares. *Journal of Econometrics*, **197**(1): 1-19.

Safitri, N.K. 2013. Estimasi Komponen Varian pada Rancangan Faktorial Acak Lengkap dengan Metode Restriced Maximum Likelihood (Skripsi). Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin, Makassar.

Searle, S.R., Casella, G., & McCulloch, C.E. 1992. *Variance Components*. John Wiley & Sons, USA.

Wallach, D. & Goffinet, B. 1989. Mean squared error of prediction as a criterion for evaluating and comparing system models. *Ecological modelling.* **44**(3-4): 299-306.