SIFAT- SIFAT IDENTITAS BILANGAN *k*-FIBONACCI

(Skripsi)

Oleh

ANISA DWI PUTRI

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2022

ABSTRAK

Sifat Sifat Identitas Bilangan *k*-Fibonacci

Oleh

ANISA DWI PUTRI

Bilangan Fibonacci adalah barisan bilangan yang suku-sukunya merupakan penjumlahan dari dua suku sebelumnya, Bilangan *k*-Fibonacci adalah generalisasi dari bilangan Fibonacci. Terdapat beberapa identitas pada bilangan *k*-Fibonacci yaitu, identitas Catalan,identitas Cassini atau Simpson, identitas D'Ocagne yang diperoleh dari formula Binet's. Pada hasil penelitian ini akan dibuktikan identitas identitas tersebut dan juga menjelaskan tentang batas hasil bagi dua suku berurutan dan fungsi pembangkit pada bilangan *k*-Fibonacci.

Kata Kunci: Formula Binet, bilangan Fibonacci, bilangan *k*-Fibonacci.

ABSTRACT

Identities of *k*-Fibonacci Numbers

Oleh

ANISA DWI PUTRI

The Fibonacci numbers is an sequence of numbers whose terms are the sum of the previous two terms. *k*-Fibonacci numbers are generalizations from Fibonacci numbers.There are several identities in the Fibonacci numbers namely the Catalan identites, Cassini identites,and D'Ocagne identities obtained from the Binets formula. Study describes the Catalan identitiy, Cassini identity or Simpson identity, and D'Ocagne identity on the *k*-Fibonacci numbers obtained from Binet's formula. The result of this research will prove the identity and also prove the quotient limit of two consecutive terms and the generating function on *k*-Fibonacci numbers.

Keywords : Fibonacci numbers, *k*-Fibonacci numbers,Binet formula.

SIFAT-SIFAT IDENTITAS BILANGAN *k*-FIBONACCI

Oleh

ANISA DWI PUTRI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat Untuk Mencapai Gelar

SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2022

Judul Skripsi : **SIFAT-SIFAT IDENTITAS BILANGAN *k*-FIBONACCI**

Nama Mahasiswa : ***Anisa Dwi Putri***

Nomor Pokok Mahasiswa : **1817031053**

Jurusan : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Amanto, S.Si., M.Si.
NIP 19730314 200012 1 002

Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.
NIP 19800206 200312 1 003

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	: **Amanto, S.Si., M.Si.**	....
Sekretaris	: **Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	: **Tiryono Ruby, Ph.D.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, S.Si., M.T.
NIP 19740705 200003 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **17 Juni 2022**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: Anisa Dwi Putri
Nomor Pokok Mahasiswa	: 1817031053
Jurusan	: Matematika
Judul Skripsi	: **Sifat-Sifat Identitas Bilangan *k*-Fibonacci**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau diuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 27 Juli 2022

Yang menyatakan,

Anisa Dwi Putri

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Kotaagung pada tanggal 27 Januari 2000, sebagai anak terakhir dari dua bersaudara pasangan Bapak Alamsyah dan Jumhani.

Penulis telah menempuh pendidikan Sekolah Dasar di SDN 2 Pasar Madang dan selesai pada tahun 2012, Sekolah Menengah Pertama di MTs N 1 Tanggamus dan selesai pada tahun 2015, dan Sekolah Menengah Atas di SMA N 1 Kotaagung selesai pada tahun 2018.

Pada tahun 2018 penulis diterima sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung. Selama menjadi mahasiswa, penulis bergabung dalam organisasi Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA) sebagai anggota bidang Kaderisasi dan Kepemimpinan periode 2019-2020. Selain itu penulis juga mengikuti kegiatan Kampus Mengajar dalam program Merdeka Belajar Kampus Merdeka yang diadakan oleh Direktorat Jendral Perguruan Tinggi Kementrian Pendidikan Kebudayaan Riset dan Teknologi RI pada tahun 2021 dan pada periode selanjutnya penulis mengikuti kegiatan Studi Indepeden dibawah naungan yang sama pada tahun yang sama. Penulis melaksanakan Praktik Kerja Lapangan di Telkom Witel Lampung pada Februari-Maret 2021 dan melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Sukaraja, Kabupaten Tanggamus, Provinsi Lampung pada Agustus September 2021.

KATA INSPIRASI

"Angin tidak berhembus untuk menggoyangkan pepohonan, melainkan menguji kekuatan akarnya"
(Ali Bin Abi Thalib)

"Kamu tidak harus menjadi hebat untuk memulai, tetapi kamu harus memulai untuk menjadi hebat"
(Zig Ziglar)

"Apapun yang menjadi takdirmu, akan mencari jalannya menemukanmu"
(Ali Bin Abi Thalib)

"Orang-orang yang beriman lebih kuat cintanya kepada Allah"
(Q.S Al-Baqarah : 165)

SANWACANA

Puji syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa karena berkat limpahan rahmat dan izin-Nya kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul **"Sifat-Sifat Identitas Bilangan *k*-Fibonacci ".**

Dalam penyusunan skripsi ini banyak pihak yang telah membantu penulis, untuk itu penulis mengucapkan terimakasih kepada :

1. Bapak Amanto, S.Si., M.Si. selaku pembimbing pertama, yang telah memberikan waktu, arahan,tenaga dan motivasi selama proses penyusunan skripsi ini.
2. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc. selaku pembimbing Kedua , yang telah memberikan waktu, arahan,tenaga dan motivasi selama proses penyusunan skripsi ini.
3. Bapak Tiryono Ruby,Ph.D. selaku Pembaas , yang telah memberikan waktu, kritik dan saran yang membangun selama proses penyusunan skripsi ini.
4. Bapak Agus Sutrisno, .S.Si.,M.Si., selaku pembimbing akademik yang selalu memberikan arahan, nasihat kepada penulis selama proses perkuliahan.
5. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.

6. Bapak Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, S.Si., M.T., selaku Dekan FMIPA Universitas Lampung.
7. Seluruh dosen, staf, dan karyawan jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang telah memberikan bantuan kepada penulis.
8. Keluarga ku tercinta terutama ayah, ibu, uwo, kak zu, adek yang menjadi motivasi terbesar penulis sehingga penulis bisa menyelesaikan perkuliahan ini.
9. Sahabat-sahabat tercinta Devi Septiana, Ramona Rahmawati, Freza Devica Gunada, Nur Hamzah, Shavira Zhalsabila, Sherlina Yulianti, Aulia Putri Ariqa serta keluarga Dorothy yang selalu menjadi penenang, penghibur dan memberi warna selama proses perkuliahan penulis hingga penyusunan skripsi ini.
10. Teman-teman seperjuangan Matematika angkatan 2018, terimakasih atas keakraban dan kebersamaan selama proses perkuliahan.
11. Semua pihak yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu terimakasih telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa laporan skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan, akan tetapi penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan informasi yang bermanfaat.

Bandar Lampung, 27 Juli 2022
Penulis,

Anisa Dwi Putri

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Perkembangan matematika yang sangat luar biasa dimulai pada abad ke – 19, dan mencapai puncaknya pada separuh akhir abad ke-20 ini. Perkembangan matematika abad ke-20 ini sangat luar biasa pesatnya, jauh melebihi kemajuan abad-abad sebelumnya. Pada zaman primitif, matematika semata-mata hanyalah berhubungan dengan bilangan, satuan, dan bentuk saja. Namun, matematika zaman primitif ini, hanyalah sebagian kecil dari matematika zaman modern karena matematika itu selalu berkembang mengikuti perkembangan peradaban dan teknologi manusia itu sendiri.

Dalam dunia matematika, terdapat banyak cabang ilmu matematika salah satunya teori bilangan. Teori bilangan adalah cabang dari matematika murni yang mempelajari sifat-sifat bilangan bulat dan mengandung berbagai masalah terbuka yang dapat dimengerti sekalipun bukan oleh ahli matematika. Dalam teori bilangan selain bilangan dasar, juga dipelajari teknik matematika lainnya. Demikian pula barisan bilangan bulat seperti faktorial dan bilangan Fibonacci.

Barisan bilangan Fibonacci merupakan salah satu barisan bilangan yang mempunyai bentuk unik dan mudah dikenali. Barisan ini diperoleh melalui peternakan kelinci pada abad ke-13 oleh Leonardo Da Pisa (yang juga dikenal dengan nama Fibonacci) dimana ia menuliskan sebuah problem menghitung populasi pasangan kelinci pada bulan tertentu dimana sepasang kelinci yang melahirkan pasangan kelinci muda. Kemudian pasangan kelinci yang sudah beranak dipasangkan lagi kemudian beranak lagi dan seterusnya. Permasalahan ini menjadi dasar terbentuknya bilangan Fibonacci dan deret Fibonacci yang terkenal sampai sekarang.

Banyak penelitian yang didedikasikan untuk bilangan Fibonacci, salah satunya adalah penelitian oleh Singh dan Panwar (2014) yang mengemukakan bahwa banyak sifat dari angka-angka ini yang dapat disimpulkan dan berkaitan dengan apa yang disebut 2-segitiga pascal. Sifat-sifat yang menarik pada bilangan ini yaitu beberapa sifat identitasnya seperti identitas Catalan, identitas Cassini atau Simpson, Identitas D'Ocagne dan Formula Binet's. Pada penelitian ini akan ditunjukkan beberapa sifat identitas tersebut, yang pada bagian selanjutnya penulis akan membuktikan sifat-sifat identitas tersebut.

1.2 Tujuan Penelitian

Mengkaji dan membuktikan sifat-sifat identitas bilangan *k*-Fibonacci diantaranya formula Binet's, identitas Catalan, identitas Cassini atau Simpson, identitas D'Ocagne, batas hasil bagi dua suku berurutan dan fungsi pembangkit.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini adalah sebagai berikut

1. Memberikan pengetahuan dan wawasan tentang *k*- Fibonacci.
2. Memberikan pengetahuan tentang sifat-sifat identitas, batas hasil bagi dua suku berurutan serta fungsi pembangkit pada *k*- Fibonacci.
3. Menambah wawasan dan memperdalam ilmu matematika di bidang teori bilangan terkait konsep bilangan *k*-Fibonacci.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diberikan beberapa definisi mengenai teori dalam aljabar dan teori bilangan yang mendukung proses penelitian. Adapun yang dibahas adalah mengenai konsep bilangan Fibonacci.

2.1 Barisan Bilangan

Definisi 2.1.1 Bilangan adalah suatu ide yang bersifat abstrak, bukan merupakan simbol atau lambang dan bukan pula lambang bilangan. Bilangan memberikan keterangan mengenai banyaknya anggota pada suatu himpunan (Sukirman, 1997).

2.1.1 Barisan Aritmatika

Barisan aritmatika (barisan hitung) diperoleh dengan cara menjumlahkan atau mengurangkan suku sebelumnya dengan suatu bilangan tetap yang dinamakan beda. Ciri utama barisan aritmatika adalah selisih antara kedua suku yang berurutan selalu tetap (Rabago, 2012)

Contoh 2.1.1.1 Suatu barisan bernilai 5,12,19,26,..... Beda antar suku yang berurutan selalu sama yaitu:

$$U_2 - U_1 = 12 – 5 = 7$$

$$U_3 - U_2 = 19 – 12 = 7$$

$$U_4 - U_3 = 26 – 19 = 7$$

Maka, barisan bilangan 5,12,19,26,.. merupakan barisan aritmatika.

Misalkan pada suatu pola bilangan dengan $U_1 = a$ dan beda disimbolkan dengan b, maka akan terbentuk barisan aritmatika seperti berikut:

$$a, a + b, a + 2b, a + 3b, \ldots., a + (n - 1) \quad (2.1)$$

dimana:

$a = U_1$

$a + b = U_2$

$a + 2b = U_3$

$a + 3b = U_4$

$a + (n – 1)b = U_n$

Jadi, rumus untuk menentukan suku ke-n dari suatu bilangan aritmatika adalah :

$$U_n = a + (n - 1)b \quad (2.2)$$

dengan:

U_n = suku ke-n, dimana n bilangan bulat positif

a = suku pertama(U_1)

b = beda

2.1.2 Barisan Geometri

Barisan geometri merupakan barisan bilangan yang nilai pembanding (rasio) antara dua suku yang berurutan selalu tetap sama, yang biasa dilambangkan dengan huruf *r* sehingga :

$$a_1 r = \frac{a_n}{a_{n-1}} \tag{2.3}$$

dengan:

a_1 = suku pertama

a_2 = suku kedua

a_3 = suku ketiga

a_n = suku ke-*n*

Contoh 2.1.2.1 1,2,4,8,... n dimana $n \in$ N merupakan barisan geometri.

2.2 Relasi Rekursi

Suatu relasi rekursi untuk sebuah barisan (a_n) merupakan formula untuk menyatakan (a_n) ke dalam suatu atau lebih suku-suku sebelumnya dari barisan tersebut untuk suatu bilangan bulat non-negatif. Suatu barisan disebut solusi dari sebuah relasi rekursi jika suku-suku pada barisan tersebut memenuhi relasi rekursinya.

Contoh 2.2.1

Diberikan barisan 1,1,2,3,5,8..... dari barisan tersebut diperoleh

- Suku ke-3 = suku ke-2 + suku ke-1 = $a_2 + a_1$
- Suku ke-4 = suku ke-3 + suku ke-2 = $a_3 + a_2$
- Suku ke-5 = suku ke-4 + suku ke-3 = $a_4 + a_3$
- dan seterusnya

Bila hubungan antar suku pada barisan diubah menjadi suatu rumus, maka akan diperoleh

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \tag{2.4}$$

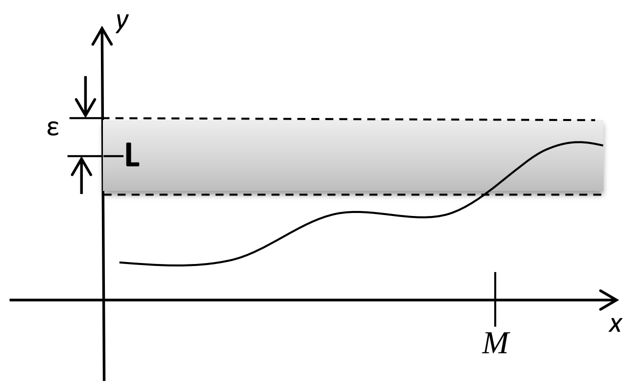
2.3 Limit Tak Hingga

Matematika tidak pernah menyatakan ∞ sebagai bilangan, misalnya tidak pernah menambahkan maupun membaginya dengan bilangan. Penggunaan lambang ∞ dan-∞ tetap tidak menyatakan bilangan. Misalkan ada fungsi $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$ apa yang terjadi pada $g(x)$ jika x menjadi semakin besar? (dapat dituliskan $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x^2}$). Ketika $x \to \infty$ tidak dinyatakan secara langsung bahwa di suatu tempat yang jauh ke kanan pada sumbu -x terdapat sebuah bilangan (lebih besar dari sebuah bilangan) yang di dekati oleh x. Digunakan $x \to \infty$ sebagai cara singkat untuk menyatakan bahwa x menjadi semakin besar tanpa batas.

Definisi 2.3.1 Misalkan f terdefinisi pada [c, ∞] untuk suatu bilangan c. Dikatakan bahwa $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ apbila untuk masing-masing $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan M yang berpadanan sedemikian rupa sehingga :

$$x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$ (Marsitin dan Sesanti, 2019).

Ada ketergantungan M pada ε, maka akan semakin besar M yang tampak pada gambar berikut:



Gambar 1. ketergantungan M pada ε.

2.4 Bilangan Fibonacci

Definisi 2.4.1 Misalkan $\{X_n\}$ adalah barisan bilangan. Dikatakan $\{X_n\}$ adalah barisan bilangan Fibonacci jika suku berikutnya merupakan hasil penjumlahan dari dua suku sebelumnya. Dengan kata lain bentuk umum dari barisan bilangan Fibonacci, yaitu :

$$F_1 = F_2 = 1$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \text{untuk } n \geq 3 \tag{2.5}$$

(Falco'n dan Plaza, 2006).

2.5 Fungsi Pembangkit Bilangan fibonacci

Fungsi pembangkit adalah fungsi yang berbentuk deret kuasa yang digunakan untuk mempresentasikan barisan secara efektif dengan menjadikan suku-suku barisan menjadi koefisien dari variabel x di dalam bentuk formal deret kuasa

Pada bilangan Fibonacci 0,1,1,2,3,5,8,....terdapat hal menarik yang dapat ditarik. Jika diperhatikan bahwa setiap suku dari barisan bilangan Fibonacci merupakan koefisien dari x^n dalam ekspansi deret pangkat fungsi $f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$ yang berpusat di titik asal, yaitu,

$$\frac{x}{1-x-x^2} = 0x^0 + x^1 + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + ...$$

Sehingga bentuk lain dari deret pangkat yang mana kefisiennya merupakan barisan bilangan fibonacci adalah $f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$.

2.6 Prinsip Induksi Matematika

Teorema 2.6.1 : Misalkan *S* adalah himpunan bilangan bulat positif dengan sifat sifat sebagai berikut:

1. $1 \in S$.
2. Untuk setiap bilangan bulat $k \in S$ maka $k + 1 \in S$

(Burton, 1998).

Bukti

Diasumsikan T adalah himpunan bilangan bulat positif yang bukan elemen *S*, dan T bukan himpunan kosong. Prinsip "*well ordering*" menunjukkan bahwa T memiliki elemen yang paling sedikit, yang dinotasikan dengan *"a"*.

Karena $1 \in S$, maka $a > 1$ dan juga $0 < a - 1 < a$. Pemilihan a sebagai bilangan bulat positif terkecil di T menunjukkan bahwa $a - 1$ adalah bukan bagian dari T atau secara ekuivalen menunjukkan bahwa $a - 1$ terdapat di *S*.

Secara hipotesis, *S* juga harus memiliki $(a - 1) + 1 = a$ yang merupakan kontradiksi dari fakta bahwa a terdapat di *T*. Maka, dapat disimpulkan bahwa himpunan *S* berisi semua himpunan bilangan bulat positif.

Contoh 2.6.1 Tunjukkan bahwa

$$1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots + n^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6} \qquad (2.6)$$

Penyelesaian

i. Harus dibuktikan benar untuk $n = 1$, yaitu

$$1^2 = \frac{1(2(1)+1)(1+1)}{6} = 1$$

ii. Diasumsikan benar untuk nilai $n = k$, yaitu

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + k^2 = \frac{k(2k+1)(k+1)}{6}$$

iii. Jika $n = k$ benar maka $k + 1$ juga benar. Dengan mensubtitusikan $n = k + 1$ ke pers. (2.4), sehingga diperoleh :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(2k+1)(k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= (k+1)\left[\frac{k(2k+1)6(k+1)}{6}\right]$$

$$= (k+1)\left[\frac{2k^2 + 7k + 6}{6}\right]$$

$$= \frac{(k+1)(2k+3)(k+2)}{6}$$

Berdasarkan pers. (2.4) maka terbukti bahwa $n = k + 1$ juga benar.

2.7 *Golden Ratio* Bilangan Fibonacci

Definisi 2.7.1 jika terdapat Bilangan Fibonacci ke-*n* dan bilangan Fibonacci ke-*n*+1 maka $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ akan mendekati nilai 1,618 dan disebut dengan *golden ratio* yang dilambangkan dengan φ.

Tabel 1. Tabel *Golden Ratio*

Bilangan F_n	**Nilai**	***Ratio***
1	0	
2	1	
3	1	1
4	2	2
5	3	1.5
6	5	1.6666
7	8	1.6
8	13	1.625

9	21	1.615
10	34	1.619
11	55	1.617
12	89	1.618
13	144	1.617
14	233	1.618
n	n	n

2.8 Formula Binet Bilangan Fibonacci

Lemma 2.8.1 Barisan Fibonacci dapat didefinisikan sebagai persamaan berikut:

$$F_n = C_1 r^n + C_2 r^n \tag{2.7}$$

(Horadam, 1967)

Bukti

Dengan menggunakan induksi matematika anggap bahwa $F_n = C_1 r^n + C_2 r^n$ adalah benar. Karena $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ maka,

$$F_n = C_1 {r_1}^{n-1} + C_2 {r_2}^{n-1} + C_1 {r_1}^{n-2} + C_2 {r_2}^{n-2} \tag{2.8}$$

$$F_n = C_1 {r_1}^n ({r_1}^{-1} + {r_2}^{-1}) + C_2 {r_2}^n ({r_1}^{-1} + {r_2}^{-1}) \tag{2.9}$$

Namun diketahui persamaan karakteristik bahwa $r^2 - r - 1 = 0$ dengan membaginya dengan ${r_1}^2$ didapatkan ${r_1}^{-1} + {r_1}^{-2} s = 1$ begitupula dengan r_2 didapatkan ${r_2}^{-1} + {r_2}^{-2} = 1$

$$F_n = C_1 {r_1}^n (1) + C_2 {r_2}^n (1)$$

$$F_n = C_1 {r_1}^n + C_2 {r_2}^n$$

Karena persamaan f_n sesuai dengan definisi awal maka terbukti

$$F_n = C_1{r_1}^n + C_2{r_2}^n \qquad \blacksquare$$

Teorema 2.8.1 Untuk Setiap $n \in \mathrm{N}$ pada bilangan Fibonacci maka berlaku

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\{\varphi^n - (1-\varphi)^n\} \tag{2.10}$$

dimana

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

(Horadam, 1967)

Bukti

Diasumsikan bahwa $F_n = ar^n$ dimana a merupakan konstanta awal yang bukan nol dengan demikian

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \tag{2.11}$$

$$ar^n = ar^{n-1} + ar^{n-2} \tag{2.12}$$

Dengan membagi kedua ruas dengan ar^{n-2} maka didapatkan

$$r^2 = r + 1 \tag{2.13}$$

$$r^2 = r + 1$$

Bentuk (2.13) merupakan persamaan kuadrat oleh karena itu, digunakan rumus sebagai berikut

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2.14}$$

Untuk menyelesaikan persamaan (2.14) maka didapatkan $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dan $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ untuk mempermudah penulisan, diketahui bahwa hasil dari r_1 merupakan golden number maka $r_1$dapat disimbolkan dengan φ. Hasil dari r_2 juga dapat disimbolkan dengan 1- φ. Sehingga, didapatkan 2 buah *r* dalam barisan ini. Artinya, barisan Fibonacci merupakan barisan kombinasi menggunakan 2 buah rasio tersebut. Ingat kembali asumsi awal bahwa $F_n = ar^n$. Karena memiliki 2 buah rasio *r* maka dapat didesinisikan kembali dengan

$$F_n = C_1 r^n + C_2 r^n \qquad (2.15)$$

dimana

C_1, C_2 = konstanta bukan nol

Berdasarkan Lemma 2.8.1 terbukti bahwa $F_n = C_1 r^n + C_2 r^n$ dapat didefinisikan sebagai barisan Fibonacci.

$F_n = C_1 {r_1}^n + C_2 {r_2}^n$

$F_0 = 0 \rightarrow C_1 + C_2 = 0 \qquad (2.16)$

$F_1 = 1 \rightarrow C_1 r_1 + C_2 r_2 = 1 \rightarrow C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \qquad (2.17)$

Dengan menyelesaikan persamaan (2.16) dan (2.17) maka kita dapatkan $C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ dan $C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ sehingga telah didapatkan semua komponen formula Fibonacci sebagai berikut:

$$F_n = C_1 {r_1}^n + C_2 {r_2}^n$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Dengan demikian formula Binet telah terbukti dan dapat disederhanakan sebagai berikut :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\{\varphi^n - (1-\varphi)^n\}$$

dimana

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

dari formula Binet tersebut didapat beberapa identitas bilangan Fibonacci, yaitu

- Identitas Catalan

  Untuk setiap bilangan asli $n, r \geq 1$ maka berlaku sifat,

  $$U_n^2 - U_{n-r}U_{n+r} = (-1)^{n-r}U_n^2$$

- Identitas Cassini

  Untuk setiap bilangan asli acak $n \geq 1$ maka berlaku sifat,

  $$U_{n-1}U_{n+1} - U_n^2 = (-1)^n$$

- Identitas D'Ocagne

  Untuk setiap bilangan asli acak $m, n \geq 1$ maka berlaku sifat,

  $$U_mU_{n+1} - U_{m+1}U_n = (-1)^nU_{m-n}$$

2.9 *k*-Generalisasi Bilangan Fibonacci

Barisan *k*-generalisasi Fibonacci ditemukan oleh Falcon dan Plaza (2006) dari pembelajaran aplikasi rekursif dari dua transformasi geometris yang dikenal sebagai partisi 2 yang diperoleh langsung dari aljabar matriks elementer. Kemudian Falcon dan Plaza juga mengemukakan bahwa banyak sifat dari angka angka ini yang dapat disimpulkan dan berkaitan dengan apa yang disebut dengan 2-segitiga Pascal. Pada penelitian selanjutnya Singh dan Panwar (2014) juga mendefinisikan generalisasi bilangan Fibonacci.

$$U_{k,n} = kU_{k,n-1} + 2kU_{k,n-2} \qquad n \geq 2 \tag{2.18}$$

(Singh dan Panwar, 2014)

dengan $U_{k,1} = 0, U_{k,0} = 2$ sehingga didapatkan ,

$U_{k,2} = 4$

$U_{k,3} = 4k$

$U_{k,4} = 4k^2 + 8$

$U_{k,5} = 4k^3 + 16k$

$U_{k,6} = 4k^2 + 24k + 16$

.
.
.

dan seterusnya.

Bukti

Dari persamaan (2.14) akan dibuktikan $U_{k,2} = 4$

$U_{k,n} = kU_{k,n-1} + 2kU_{k,n-2}$

$= k.0 + 2.2$

$= 4$ ■

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun akademik 2021/2022 di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mencari literatur utama yang mendukung topik pembahasan ini.
2. Memahami dan mempelajari konsep bilangan *k*-Fibonacci.
3. Membuktikan sifat identitas, batas hasil bagi dua suku berurutan serta fungsi pembangkit bilangan *k*-Fibonacci.
4. Menarik kesimpulan tentang *k*-Fibonacci yang telah dibuktikan.

V. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dilakukan maka dapat di simpulkan bahwa

1. Didapatkan dan dibuktikan beberapa identitas yang meliputi identitas Catalan diperoleh $U_{k,n-r+1}U_{k,n+r+1} - U_{k,n+1}^2 = (-1)^{n-r+1}2^{n-r}U_{k,r+2}^2$, identitas Cassini atau Simpson's diperoleh $U_{k,n+2}U_{k,n} - U_{k,n+1}^2 = (-1)^n\, 2^{n+3}$ dan identitas D'Ocagne diperoleh

$$U_{k,m+1}U_{k,n} - U_{k,m}U_{k,n+1} = \begin{cases} \frac{8}{3}\left(\Re_1^n + \Re_1^m\right) & ;\ n \text{ genap dan } m \text{ ganjil} \\ -\frac{8}{3}\left(\Re_1^n + \Re_1^m\right) & ;\ n \text{ ganjil dan } m \text{ genap} \end{cases}$$

   Selain itu, berdasarkan hasil dan pembahasan juga didapatkan bahwa batas hasil bagi dua suku berurutan adalah $\Re_1$ dan diperoleh fungsi pembangkit untuk *k*-Fibonacci yaitu $\dfrac{2(1-kx)}{1-kx-2x^2}$.

2. Identitas-identitas ini dapat dibuktikan dengan meggunakan aljabar sederhana dan formula Binet's.

DAFTAR PUSTAKA

Singh, M dan Panwar, Y. K. 2014. k-Generalized Fibonacci Number. *Applied Mathematics and Physics*. **2**(1): 10-12.

Broinsthein, I.N. dan Semendyayev. 1965. *Handbook Of Mathematics*. German: Springer.

Falcon's, S. dan Plaza, A. 2006. On the Fibonacci k-numbers. *Chaos, Solitons & Fractals*. **32**(5): 1615-1624.

Horadam, A.F. 1961. A Generalized Fibonacci Sequence. *The American Mathematical Monthly*. **68**(5)

Rabago, T.F.J. 2012. Arithmetic-Geometric Alternate Sequence. *Scientia Magna*. **8**(2): 80-82.

Burton, D.M. 2011. *Elementary Number Theory*, fourth edition, New York: McGraw-Hill.

Gupta, V.K., Panwar, Y.K. dan Sikhwal, O. 2012. Generalized Fibonacci Number Sequence. *Theoritical Mathematics & Aplications*. **2**(2): 115-124

Sukirman, M.P. 1997. *Ilmu Bilangan*. Universitas Terbuka, Jakarta.

Marsitin R dan Sesanti, R.N, 2019, *Dasar-Dasar Kalkulus*, Ediide Infografika, Malang.