TRANSFORMASI MATRIKS DARI RUANG BARISAN SELISIH KE RUANG BARISAN TINGKAT TIGA

(Skripsi)

Oleh

ANGGELIA INDRIATI

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2022

ABSTRACT

MATRIX TRANSFORMATION FROM DIFFERENCE SEQUENCE SPACE TO THE THIRD SEQUENCE SPACE

By

ANGGELIA INDRIATI

Matrix transformation in sequence space of the in the analysis, which discuses sequence space, one of which is sequence space $\ell_3, \ell_3(\Delta), \ell_3(\Delta_2)$, and $\ell_3(\Delta)$. The research method used in this research is to prove sequence space $\ell_3, \ell_3(\Delta), \ell_3(\Delta_2)$, and $\ell_3(\Delta_3)$ is linear space, norm space, complete norm space, and determine the sufficient condition so that $\mathcal{A} : \ell_3(\Delta) \rightarrow \ell_3$, $\mathcal{A} : \ell_3(\Delta_2) \rightarrow \ell_3, \mathcal{A} : \ell_3(\Delta_3) \rightarrow \ell_3$ is matrix transformation.

Keywords: matrix transformation, sequence space, space line difference.

ABSTRAK

TRANSFORMASI MATRIKS DARI RUANG BARISAN SELISIH KE RUANG BARISAN TINGKAT TIGA

Oleh

ANGGELIA INDRIATI

Transformasi matriks pada ruang barisan merupakan salah satu konsep dalam analisis, yang membahas tentang ruang barisan, salah satunya adalah ruang barisan $\ell_3, \ell_3(\Delta), \ell_3(\Delta_2)$, dan $\ell_3(\Delta)$. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah membuktikan ruang barisan $\ell_3, \ell_3(\Delta), \ell_3(\Delta_2)$, dan $\ell_3(\Delta_3)$ merupakan ruang linear, ruang bernorm, ruang bernorm lengkap, dan menentukan syarat cukup agar $\mathcal{A} : \ell_3(\Delta) \to \ell_3, \mathcal{A} : \ell_3(\Delta_2) \to \ell_3, \mathcal{A} : \ell_3(\Delta_3) \to \ell_3$ merupakan transformasi matriks.

Kata Kunci: transformasi matriks, ruang barisan, ruang barisan selisih.

TRANSFORMASI MATRIKS DARI RUANG BARISAN SELISIH KE RUANG BARISAN TINGKAT TIGA

Oleh

ANGGELIA INDRIATI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2022

Judul Skripsi : **TRANSFORMASI MATRIKS DARI RUANG BARISAN SELISIH KE RUANG BARISAN TINGKAT TIGA**

Nama Mahasiswa : ***Anggelia Indriati***

Nomor Pokok Mahasiswa : **1817031018**

Jurusan : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.	**Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.**
NIP 19720227 199802 1 001	NIP 19800206 200312 1 003

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

   Ketua : **Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.** ....

   Sekretaris : **Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.** ....

   Penguji
   Bukan Pembimbing : **Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS LAMPUNG
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, S.Si., M.T.
NIP 19740705 200003 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **15 Juli 2022**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Anggelia Indriati
Nomor Pokok Mahasiswa	:	1817031018
Jurusan	:	Matematika
Judul Skripsi	:	TRANSFORMASI MATRIKS DARI RUANG BARISAN SELISIH KE RUANG BARISAN TINGKAT TIGA

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri, bukan hasil orang lain dan semua hasil tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 15 Juli 2022

Penulis

METERAI TEMPEL

C785AJX931468232

Anggelia Indriati

NPM. 1817031018

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Anggelia Indriati, anak kedua dari dua bersaudara yang dilahirkan di Brabasan pada tanggal 01 Februari 2000 oleh pasangan Bapak Samino dan Ibu Sustri Yaningsih.

Menempuh pendidikan di Taman Kanak-Kanak (TK) Mafatihul Huda pada tahun2005-2006, Sekolah Dasar (SD) diselesaikan di SDN 01 Budi Aji pada tahun 2006-2012, kemudian bersekolah di SMPN 01 Simpang Pematang pada tahun 2012-2015, dan bersekolah di SMAN 01 Simpang Pematang pada tahun 2015-2018. Pada tahun 2018 penulis terdaftar sebagai mahasiswi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung melalui jalur SNMPTN.

Pada tahun 2021 penulis melakukan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Adi Mulyo Kecamatan Panca Jaya, Kabupaten Mesuji, Provinsi Lampung. Dan pada tahun yang sama penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Kantor Badan Pusat Statistik Kota Metro.

KATA INSPIRASI

“Maka sesungguhnya bersama kesulitan itu ada kemudahan”

(Q.S. Al-Insyirah: 5)

“Allah tidak akan membebani seseorang melainkan sesuai dengan kadar kesanggupannya”

(Q.S. Al Baqarah : 286)

“Keberhasilan bukanlah selalu milik orang pintar, namun keberhasilan itu adalah milik orang yang senantiasa berusaha”

(Bj Habibie)

“Orang paling bijak itu boleh jadi paling banyak menelan kehidupan yang menyakitkan, tersakiti oleh sekitarnya. Tapi dia memilih menjadikannya pelajaran berharga”

(Tere Liye)

“Apa yang membuat kita bahagia adalah merasa cukup, apa yang membuat kita bertahan adalah rasa sabar, dan apa yang membuat kita lapang adalah rasa syukur”

(Alfialghazi)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirobbil'alamin.
Puji dan syukur kepada Allah Subhanahu Wata'ala karena atas berkah dan nikmat-Nya kepada kita, Shalawat serta salam selalu tercurah kepada Nabi Muhammad Shallaallahu 'Alaihi Wasallam yang telah memberikan kabar gembira kepada umat manusia.

Dengan mengharap rahmat dan ridho dari Allah SWT, kupersembahkan karya ini untuk:

Bapak dan Ibu
Tidak ada kata yang dapat aku sampaikan untuk kalian kecuali terimakasih yang sebesar-besarnya atas semua yang telah kalian berikan untukku. Cinta, kasih sayang, waktu, pengorbanan, dan keringat yang belum bisa aku balas. Terimakasih karena selalu mendoakan dan mendukung setiap langkah yang aku pilih. Karena ridho Allah berawal dari ridho kalian.

Kakakku
Terimakasih telah mengajarkan banyak hal, terutama arti kebahagiaan.

Dosen Pembimbing dan Pembahas
Terimakasih telah senantiasa memberikan bimbingan, arahan, masukan, serta ilmu yang bermanfaat.

Almamaterku tercinta, Universitas Lampung.

SANWACANA

Puji syukur kepada Allah Tuhan Yang Maha Esa atas berkat dan kasih karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul “Transformasi Matriks Dari Ruang Barisan Selisih ke Ruang Barisan Tingkat Tiga”. Skripsi ini disusun sebagai syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika (S.Mat) pada program S1 Matematika Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Proses penulisan skripsi ini tidak akan berjalan lancar tanpa ada pihak yang membantu. Oleh karena itu penulis mengucapkan terimakasih sebesar-besarnya kepada:

1. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing I, terimakasih untuk bimbingan dan kesediaan waktunya selama penyusunan skripsi ini.
2. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc. selaku Dosen Pembimbing II, terimakasih untuk bantuan dan masukkannya selama penyusunan skripsi.
3. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D. selaku Dosen Penguji, terimakasih atas kesediannya untuk menguji, memberikan saran dan kritik yang membangun dalam penyelesaian skripsi ini.
4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

5. Bapak Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, M.T. selaku Dekan FMIPA Universitas Lampung.
6. Seluruh Dosen dan Staf Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Ibu, yang selalu mendoakan, memberikan dukungan, dan semangat hingga penulis bisa menyelesaikan proses penulisan ini.
8. Bapak, yang selalu memberikan semangat dan dukungan yang luar biasa hingga penulis bisa menyelesaikan pendidikan ini.
9. Kakak yang selalu menyemangati, menemani dan memberi motivasi kepada penulis.
10. Sri Wahyuningsih, S.Pd., yang selalu bersedia menjadi tempat berkeluh kesah dan memotivasi agar tetap konsisten dalam pengerjaan skripsi ini.
11. Maydia dan Virda yang selalu mendukung dan tempat berbagi cerita di perkuliahan.
12. Teman-teman angkatan 2018 Jurusan Matematika, KKN Adi Mulyo, dan sahabat pendaki.
13. Almamater tercinta Universitas Lampung.

Bandar Lampung, 15 Juli 2022
Penulis

Anggelia Indriati

DAFTAR ISI

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Matematika sebagai salah satu ilmu pasti memiliki peranan penting dalam pengembangan dan kemajuan sains dan teknologi. Beberapa teori pemikiran ahli matematika digunakan sebagai dasar untuk membuat keputusan dan sebagai pertimbangan. Oleh karena itu, pengembangan matematika sangat diperlukan.

Salah satu bidang kajian matematika adalah bidang analisis. Bidang ini diantaranya membahas tentang konsep ruang barisan. Salah satu bahasan tentang ruang barisan adalah transformasi matriks.

Transformasi matriks mempunyai banyak penerapan dalam menyelesaikan persoalan-persoalan fisika, bidang teknik, ilmu sosial, dan berbagai cabang matematika lainnya. Hal ini disebabkan begitu banyaknya model matematika yang terbentuk dari bidang tersebut. Telah diketahui bahwa matriks $A_{m\times n}$ dapat dipandang sebagai transformasi linear dari R^m ke R^n, jadi dapat memetakan titik $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m)$ di R^m ke suatu titik $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ di R^n. Dengan jalan pikiran serupa dapat dipandang matriks sebagai transformasi linear dari suatu ruang barisan ke ruang barisan lain asalkan baris dan kolom matriks tersebut tak hingga banyaknya. Dalam hal ini matriks memetakan barisan $(x_1, x_2, x_3, \dots,)$ ke barisan $(y_1, y_2, y_3, \dots,)$. Matriks seperti ini disebut matriks takhingga.
Misalkan $A = (a_{nk}), n, k = 1,2, \dots$ adalah matriks takhingga dimana X dan Y ruang barisan, maka dapat dihubungkan A dengan suatu transformasi $T_A : X \to Y$. Jika $\tilde{x} = (x_k) \in X$ oleh T_A dikawankan dengan $A\tilde{x} \in Y$, maka

$$A\tilde{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \cdots \\ a_{21}x_2 + & a_{22}x_2 + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \in Y$$

Oleh karena itu, secara formal barisan $\tilde{x}$ dipetakan ke barisan $A\tilde{x}$ dimana $(A\tilde{x})_n \equiv A_n\tilde{x} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k$, asalkan $A_n\tilde{x}$ konvergen untuk setiap n. Jadi barisan $(A_1\tilde{x}, A_2\tilde{x}, \ldots) \in Y$ adalah peta barisan $(x_1, x_2, \ldots)$ di bawah transformasi T_A.

Matriks tak hingga tersebut harus memenuhi beberapa syarat agar menjadi transformasi linear dari suatu ruang barisan ke ruang barisan tertentu. Permasalahan yang dihadapi adalah matriks takhingga seperti apa yang memenuhi syarat sebagai transformasi di atas. Selanjutnya, karena luasnya cakupan permasalahan maka akan dibatasi ruang vektor (barisan) yang dijadikan model penelitian adalah $X = \ell_3(\Delta), X = \ell_3(\Delta_2), X = \ell_3(\Delta_3)$, dan $Y = \ell_3$.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan syarat-syarat transformasi matriks T_A yang memetakan dari $X = \ell_3(\Delta), X = \ell_3(\Delta_2), X = \ell_3(\Delta_3)$ ke $Y = \ell_3$ dan menyelidiki sifatnya.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Memahami sifat dasar transformasi dari ruang barisan selisih ke ruang barisan tingkat tiga.
2. Mengetahui aplikasi dari transformasi matriks pada ruang barisan selisih.
3. Sebagai bahan referensi bagi peneliti lain dalam melakukan penelitian selanjutnya terutama yang berkaitan dengan transformasi matriks pada ruang barisan selisih.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bagian ini beberapa literatur dan dasar teori akan dikaji untuk digunakan dalam pembahasan selanjutnya, diantaranya adalah Matriks, Barisan, Ruang Vektor, Ruang Barisan, Ruang Barisan Selisih, Ruang Bernorm, Ruang Banach, Operator Linear, Transformasi Linear.

2.1 Matriks

Suatu matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut dinamakan entri dari matriks.
Matriks yang mempunyai m baris dan n kolom dinyatakan dengan

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriks tidak mempunyai nilai tetapi ukuran. Ukuran matriks disebut ordo yang ditentukan oleh banyaknya baris dan banyaknya kolom (Anton dan Rorres, 2004).

Contoh 2.1

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

2.2 Barisan

Bagian ini akan membahas definisi barisan dan contohnya.
Definisi 2.2.1 (Mizrahi dan Sulivan, 1982) Barisan adalah suatu fungsi yang domainnya adalah himpunan bilangan asli. Misal terdapat bilangan asli $1,2,\dots,k$ yang bersesuaian dengan bilangan real x_k tertentu, maka $x_1, x_2, \dots, x_k$ dikatakan barisan.

Contoh 2.2.1

Diberikan barisan $(x_k) = \frac{1}{k}$ dengan $k = 1,2,3, \ldots$

Sehingga $\frac{1}{k} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$ merupakan barisan real.

Definisi 2.2.2 (Bartle dan Sherbert, 2000) Barisan bilangan real $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ dikatakan konvergen ke $x \in \mathbb{R}$, limit dari $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$, apabila untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $k_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $k \geq k_0$ maka $|x_k - x| < \varepsilon$. Pernyataan barisan bilangan real X konvergen atau menuju x dapat dinyatakan sebagai $\lim_{k \to \infty} x_k = x$ atau $x_k \to x$, titik x disebut titik limit barisan (x_k).

Bagian ini akan memberikan pengertian ruang vektor beserta contoh ruang vektor.

2.3 Ruang Vektor

Menurut Anton dan Rorres (2004), ruang vektor adalah suatu himpunan tak kosong dari objek-objek sebarang, di mana dua operasinya didefinisikan, yaitu penjumlahan dan perkalian skalar sehingga untuk setiap skalar $k, l \in \mathbb{R}$ dengan elemen $u, v, w \in V$ berlaku:

i. $u + v \in V$

ii. $u + v = v + u$

iii. $u + (v + w) = (u + v) + w$

iv. Di dalam V terdapat suatu objek 0, yang disebut vektor nol untuk V, sedemikian rupa sehingga $0 + u = u + 0 = u$ untuk semua u pada V.

v. Untuk setiap u pada V, terdapat suatu objek $-u$ pada V, yang disebut negative dari u, sedemikian rupa sehingga $u + (-u) = (-u) + u = 0$

vi. Jika k adalah skalar dan u adalah objek sebarang pada V, maka $ku \in V$.

vii. $k(u + v) = ku + kv$

viii. $(k + l)u = ku + lu$

ix. $k(lu) = (kl)u$

x. $1u = u$

Contoh 2.3

Tunjukkan bahwa $R^2 = \left\{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} | a, b \in \mathbb{R}\right\}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar standar adalah suatu ruang vektor.

Penyelesaian:

Ambil sebarang $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in R^2$ dan skalar $k, l \in \mathbb{R}$.

Misal:

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \bar{v} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

1. Akan ditunjukkan $\bar{u} + \bar{v} \in R^2$.

$$\bar{u} + \bar{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix} \in R^2.$$

Terbukti bahwa $\bar{u} + \bar{v} \in R^2$.

2. Akan ditunjukkan $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$.

$$\bar{u} + \bar{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} v_1 + u_1 \\ v_2 + u_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$
$$= \bar{v} + \bar{u}.$$

Terbukti bahwa $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$.

3. Akan ditunjukkan $\bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w}$.

$$\bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} u_1 + v_1 + w_1 \\ u_2 + v_2 + w_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$
$$= \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$
$$= (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w}.$$

Terbukti bahwa $\bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w}$.

4. Akan ditunjukkan $\bar{0} + \bar{u} = \bar{u} + \bar{0} = \bar{u}$.

   Pilih $\bar{0} \in R^2$, yaitu $\bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   $$\begin{aligned} \bar{0} + u &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 + u_1 \\ 0 + u_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_1 + 0 \\ u_2 + 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \bar{u} + \bar{0} \\ &= \bar{u}. \end{aligned}$$

   Terbukti bahwa $\bar{0} + \bar{u} = \bar{u} + \bar{0} = \bar{u}$.

5. Akan ditunjukkan $\bar{u} + (-\bar{u}) = (-\bar{u}) + \bar{u} = \bar{0}$.

   Pilih $(-\bar{u}) \in R^2$, yaitu $-\bar{u} = \begin{pmatrix} -u_1 \\ -u_2 \end{pmatrix}$

   $$\begin{aligned} \bar{u} + (-\bar{u}) &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -u_1 \\ -u_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_1 + (-u) \\ u_2 + (-u) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-u) + u_1 \\ (-u) + u_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -u_1 \\ -u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &= (-\bar{u}) + \bar{u} \\ &= \bar{0}. \end{aligned}$$

   Terbukti bahwa $\bar{u} + (-\bar{u}) = (-\bar{u}) + \bar{u} = \bar{0}$.

6. Akan ditunjukkan $k\bar{u} \in R^2$.

   $$\begin{aligned} k\bar{u} &= k \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ku_1 \\ ku_2 \end{pmatrix} \in R^2. \end{aligned}$$

   Terbukti bahwa $k\bar{u} \in R^2$.

7. Akan ditunjukkan $k(\bar{u}+\bar{v}) = k\bar{u}+k\bar{v}$.

$$k(\bar{u}+\bar{v}) = k\left(\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\right)$$
$$= k\begin{pmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}ku_1+kv_1\\ku_2+kv_2\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}ku_1\\ku_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}kv_1\\kv_2\end{pmatrix}$$
$$= k\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$$
$$= k\bar{u}+k\bar{v}.$$

Terbukti bahwa $k(\bar{u}+\bar{v}) = k\bar{u}+k\bar{v}$.

8. Akan ditunjukkan $(k+l)\bar{u} = k\bar{u}+l\bar{u}$.

$$(k+l)\bar{u} = (k+l)\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}(k+l)u_1\\(k+l)u_2\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}ku_1+lu_1\\ku_2+lu_2\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}ku_1\\ku_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}lu_1\\lu_2\end{pmatrix}$$
$$= k\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}+l\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$$
$$= k\bar{u}+l\bar{u}.$$

Terbukti bahwa $(k+l)\bar{u} = k\bar{u}+l\bar{u}$.

9. Akan ditunjukkan $k(l\bar{u}) = (kl)\bar{u}$.

$$k(l\bar{u}) = k\left(l\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\right)$$
$$= k\begin{pmatrix}lu_1\\lu_2\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}klu_1\\klu_2\end{pmatrix}$$
$$= kl\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$$
$$= (kl)\bar{u}.$$

Terbukti bahwa $k(l\bar{u}) = (kl)\bar{u}$.

10. Akan dibuktikan $1\bar{u} = \bar{u}$.

$$1\bar{u} = 1\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1.u_1 \\ 1.u_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$= \bar{u}.$$

Terbukti bahwa $1\bar{u} = \bar{u}$.

Dari (1)-(10) terbukti bahwa $R^2 = \left\{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} | a, b \in \mathbb{R}\right\}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar standar adalah suatu ruang vektor.

2.4 Ruang Barisan ℓ_p

Ruang ℓ_p merupakan himpunan dari barisan bilangan yang memiliki syarat

$$\ell_p = \left\{\tilde{x} = (x_k) | \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty\right\}$$

ℓ_p koleksi barisan bilangan yang $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$.

$$\ell_p(\Delta) = \{\tilde{x} = (x_k) | \Delta\tilde{x} \in \ell_p\} \text{ ; dengan } \Delta\tilde{x} = \{x_{k+1} - x_k\}.$$

$\ell_p(\Delta)$ koleksi barisan bilangan yang $\Delta x \in \ell_p$.

$$\ell_p(\Delta_2) = \{\tilde{x} = (x_k) | \Delta_2\tilde{x} \in \ell_p\} \text{ ; dengan } \Delta_2\tilde{x} = \{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k\}.$$

$\ell_p(\Delta_2)$ koleksi barisan bilangan yang $\Delta_2\tilde{x} \in \ell_p$.

(Kizmaz, 1981).

2.5 Ruang Barisan Selisih

Misalkan barisan selisih bilangan sebagai berikut:

Jika $\tilde{x} = (x_k)$ suatu barisan bilangan dan $\Delta\tilde{x} = \{x_{k+1} - x_k\}$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$.

$\Delta\tilde{x}$ disebut barisan selisih pertama terhadap barisan $\tilde{x} = (x_k)$.

$\Delta_m\tilde{x} = \Delta_m x_k = \left\{\sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} x_{k+m-i}\right\}$, untuk setiap $k \in \mathbb{N}$.

$\Delta_m\tilde{x}$ disebut barisan selisih ke-m terhadap barisan $\tilde{x} = (x_k)$.

Berdasarkan gambaran di atas maka dibentuklah barisan bilangan

$\Delta\tilde{x} = \Delta x_k$, $\Delta_2\tilde{x} = \Delta_2 x_k, \dots, \Delta_m x_m = \Delta_m x_k$ yang disebut dengan barisan selisih pertama, barisan selisih kedua, dan seterusnya sampai barisan selisih ke-m (Kizmaz, 1981).

Contoh 2.5

Diberikan barisan $(x_k) = \frac{1}{k}$, didefinisikan $(x_k) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}\right\}$

untuk setiap $k = 1,2,3, \dots$

akan dicari $\Delta_2\tilde{x}$.

$\Delta_2\tilde{x} = \{(x_3 - 2x_2 + x_1), (x_4 - 2x_3 + x_2), \dots\}$

$\Delta_2\tilde{x} = \left\{\left(\frac{1}{3} - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1\right), \left(\frac{1}{4} - 2\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\right), \dots\right\}$

$\Delta_2\tilde{x} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \dots\right)$

Sehingga terbentuklah barisan selisih yang kedua yaitu

$$\Delta_2\tilde{x} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \dots\right).$$

2.6 Ruang Bernorm

Pada bagian ini akan membahas mengenai ruang bernorm.

Definisi 2.6.1 (Rudin, 1987) Fungsi nonnegatif $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ disebut norm jika untuk setiap $x, y \in X$ dan setiap skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ berlaku:

1. $\|x\| \geq 0$ untuk setiap $x \in X$.

   $\|x\| = 0$, jika dan hanya jika $x = 0$, (0 vektor nol).
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, untuk setiap skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ dan $x \in X$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, untuk setiap $x, y \in X$.

Ruang linear X yang dilengkapi dengan suatu norm $\|\cdot\|$, ditulis $(X, \|\cdot\|)$ disebut ruang bernorm.

Teorema 2.6.2 (Darmawijaya, 2007) $\ell_p(1 \leq p < \infty)$ merupakan ruang bernorm terhadap norm $\|.\|_p$.

Bukti:

Untuk $\ell_p(1 \leq p < \infty)$ diambil sebarang $\tilde{x} = (x_k), \tilde{y} = (y_k) \in \ell_p$ dan skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ diperoleh:

a. $\|\tilde{x}\|_p = \{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\}^{\frac{1}{p}} \geq 0$ karena $|x_k| \geq 0$ untuk setiap k.

$\|\tilde{x}\|_p = \{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\}^{\frac{1}{p}} \geq 0 \Leftrightarrow |x_k| \geq 0$ untuk setiap $k \Leftrightarrow \tilde{x} = \{0\} = \tilde{0}$.

b. $\|\alpha\tilde{x}\|_p = \{\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha x_k|^p\}^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\}^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \|x\|_p$.

Jelas bahwa $\|\alpha\tilde{x}\|_p < \infty$.

c. $\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_p \leq \|\tilde{x}\|_p + \|\tilde{y}\|_p = \{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\}^{\frac{1}{p}} + \{\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p\}^{\frac{1}{p}} < \infty$.

Berdasarkan a, b, dan c terbukti bahwa ℓ_p merupakan ruang linear dan norm $\|.\|_p$ pada norm ℓ_p. Dengan kata lain $(\ell_p, \|.\|_p)$ ruang bernorm.

Setelah mengetahui definisi ruang bernorm. Selanjutnya, akan diberikan definisi barisan Cauchy, Teorema Ketaksamaan Young, Hol'der, dan Minkowski.

Definisi 2.6.3 (Bartle dan Sherbert, 2000) Barisan (x_n) di dalam ruang bernorm $(X, \|\cdot\|)$ disebut barisan Cauchy jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0, sehingga untuk setiap dua bilangan asli $m, n \geq n_0$ berlaku $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$.

Untuk memudahkan memahami Definisi 2.6.3 berikut diberikan contoh barisan Cauchy di dalam ruang bernorm.

Contoh 2.6.3

Barisan $\left(\frac{1}{k}\right)$ adalah barisan Cauchy. Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 (bergantung pada ε) $\in N$ sehingga ada dua bilangan asli $m.n \geq n_0$ maka $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$.

Bukti:

Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, jika $m, n \geq n_0$ maka $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_0}$, $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}$.

Tinjau:

$$\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \left|\frac{1}{m}\right| + \left|-\frac{1}{n}\right|$$

$$\leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} = \frac{2}{n_0} < \varepsilon$$

Pilih $n_0 > \frac{2}{\varepsilon}$ sehingga jika $m, n \geq n_0$ maka

$$\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} = \frac{2}{n_0} < \varepsilon.$$

Jadi, barisan $\left(\frac{1}{k}\right)$ adalah barisan Cauchy.

Teorema 2.6.4 (Bartle dan Sherbert, 2000) Setiap barisan yang konvergen di dalam ruang bernorm $(X, \|\cdot\|)$ merupakan barisan Cauchy.

Bukti:

Misalkan (x_n) adalah barisan di X dengan $\lim_{k\to\infty} x_n = x$, dan misalkan $\varepsilon < 0$ maka terdapat bilangan asli $n \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga berlaku $d\{x, x_n\} < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $n \geq \mathbb{N}$, akibatnya untuk $m, n \geq \mathbb{N}$ berlaku $d\{x_m, x_n\} \leq d\{x, x_m\} + d\{x_n\} < \varepsilon$, jadi (x_n) barisan Cauchy.

Definisi 2.6.5 (Bartle dan Sherbert, 2000) Ruang bernorm dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy di dalamnya konvergen.

Teorema 2.6.6 Ketaksamaan Young (Darmawijaya, 2007) Diketahui $0 < p$, $q < \infty$ sehingga $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, untuk sebarang dua bilang α dan $\beta \in \mathbb{R}$ benar bahwa $|\alpha\beta| \leq \frac{|\alpha|^p}{p} + \frac{|\beta|^p}{q}$.

Bukti:

Karena $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ diperoleh $p + q = pq$, $\frac{p}{q} = \frac{1}{q-1}$ dan $\frac{q}{p} = \frac{1}{p-1}$.

Diambil kurva $y = x^{p-1}$; jadi $x = y^{p-1}$. Oleh karena itu diperoleh

$|\alpha\beta| =$ luas persegi panjang $\leq$ luas I $+$ luas II, yaitu

$$|\alpha\beta| \leq \int_0^{|\alpha|} x^{p-1}dx + \int_0^{|\beta|} y^{q-1}dy = \frac{|\alpha|^p}{p} + \frac{|\beta|^p}{q}.$$

Teorema 2.6.7 Ketaksamaan Ho'lder

i. Jika $\tilde{x} = (x_k) \in \ell_1$ dan $\tilde{y} = (y_k) \in \ell_\infty$ maka

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \|\tilde{x}\|_1 . \|\tilde{y}\|_\infty$$

ii. Diketahui $1 \leq p, q < \infty$ dan $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ maka

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \|\tilde{x}\|_p . \|\tilde{y}\|_q$$

(Darmawijaya, 2007).

Bukti:

i. Jika $\tilde{x} = (x_k) \in \ell_1$ dan $\tilde{y} = (y_k) \in \ell_\infty$ cukup jelas bahwa

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| . |y_k|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| . \sup_{k\geq 1} |y_k| = \|\tilde{x}\|_1 . \|\tilde{y}\|_\infty$$

i. Jika $\tilde{x} = (x_k) \in \ell_p$ dan $\tilde{y} = (y_k) \in \ell_q$ cukup jelas bahwa

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| . |y_k|$$

karena $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dapat kita buktikan bahwa

$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| . |y_k| \leq \|\tilde{x}\|_p . \|\tilde{y}\|_q$ atau $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{\|\tilde{x}\|_p} . \frac{|y_k|}{\|\tilde{y}\|_q} \leq 1$

dengan Teorema Young diperoleh

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{\|\tilde{x}\|_p} . \frac{|y_k|}{\|\tilde{y}\|_q} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{p} \left(\frac{|x_k|}{\|\tilde{x}\|_p} \right)^p + \frac{1}{q} \left(\frac{|y_k|}{\|\tilde{y}\|_q} \right)^q \right\}$$

$$= \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{|x_k|}{\|\tilde{x}\|_p} \right)^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{|y_k|}{\|\tilde{y}\|_q} \right)^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Terbukti.

Teorema 2.6.8 Ketaksamaan Minkowski (Darmawijaya, 2007) Jika $1 \leq p < \infty$ maka untuk setiap $\tilde{x} = (x_k),\ \tilde{y} = (y_k) \in \ell_p$ benar bahwa
$\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_p \leq \|\tilde{x}\|_p . \|\tilde{y}\|_p$.

Bukti:

Jika $p = \infty$, diperoleh

$$\begin{aligned}\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_\infty &= \sup_{k\geq 1}|x_k + y_k| \\ &\leq \sup_{k\geq 1}\{|x_k| + |y_k|\} \\ &\leq \sup_{k\geq 1}|x_k| + \sup_{k\geq 1}|y_k| \\ &= \|\tilde{x}\|_\infty . \|\tilde{y}\|_\infty\end{aligned}$$

Jika $p = 1$, diperoleh

$$\begin{aligned}\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_1 &= \sum_{k=1}^{\infty}|x_k + y_k| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty}|x_k| + \sum_{k=1}^{\infty}|y_k| \\ &= \|\tilde{x}\|_1 . \|\tilde{y}\|_1\end{aligned}$$

Jika $1 \leq p < \infty$

$$\begin{aligned}|x_k + y_k|^p &= |x_k + y_k| . |x_k + y_k|^{p-1} \\ &\leq |x_k| . |x_k + y_k|^{p-1} + |y_k||x_k + y_k|^{p-1}\end{aligned}$$

untuk setiap k dijumlahkan untuk seluruh k dan kemudian memanfaatkan ketidaksamaan Ho'lder diperoleh:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}|x_k + y_k|^p &\leq \sum_{k=1}^{\infty}|x_k| . |x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{\infty}|y_k| . |x_k + y_k|^{p-1} \\ &\leq \|\tilde{x}\|_p . \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left\{|x_k + y_k|^{(p-1)q}\right\}^{\frac{1}{q}}\right\} + \|\tilde{y}\|_p . \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left\{|x_k + y_k|^{(p-1)q}\right\}^{\frac{1}{q}}\right\} \\ &= \left\{\|\tilde{x}\|_p + \|\tilde{y}\|_p\right\} . \sum_{k=1}^{\infty}\{|x_k + y_k|^p\}^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

atau

$$\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_p = \sum_{k=1}^{\infty}\{|x_k + y_k|^p\}^{\frac{1}{q}} \leq \|\tilde{x}\|_p + \|\tilde{y}\|_p.$$

2.7 Ruang Banach

Bagian ini akan membahas definisi ruang Banach.

Definisi 2.7.1 (Darmawijaya, 2007) Ruang Banach adalah ruang bernorm yang lengkap jika dalam suatu ruang bernorm X berlaku kondisi bahwa setiap barisan Cauchy di X adalah konvergen.

Teorema 2.7.2 (Darmawijaya, 2007) Jika bilangan *real* p dengan $1 \leq p < \infty$, maka $(\ell_p, \|.\|_p)$ merupakan ruang Banach.

Bukti:

Telah dibuktikan bahwa $(\ell_p, \|.\|_p)$ merupakan ruang bernorm, sehingga akan dibuktikan bahwa ruang bernorm itu lengkap.

Dibuktikan dahulu untuk $1 \leq p < \infty$, diambil sebarang barisan Cauchy $(\tilde{x}^{(n)}) \subset \ell_p$ dengan

a. $\tilde{x}^{(n)} = (\tilde{x}^{(n)}) = \{\tilde{x}_1{}^{(n)}, \tilde{x}_2{}^{(n)}, \tilde{x}_3{}^{(n)}, \ldots\}$.

Untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap dua bilangan asli $m, n \geq n_0$ berlaku

b. $\left\|x^{(m)} - x^{(n)}\right\|_p < \frac{\varepsilon}{4}$ atau $\sum_{k=1}^{\infty}\left\|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right\|^p < \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^p$.

Hal ini berakibat untuk setiap dua bilangan asli $m, n > 0$ diperoleh $\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right| < \frac{\varepsilon}{4}$ untuk setiap k. Dengan kata lain diperoleh barisan Cauchy $x_k^{(n)}$ untuk setiap k. Jadi terdapat bilangan x_k sehingga $\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k$ atau $\lim_{n\to\infty}\left|x_k^{(n)} - x_k\right| = 0$. Berdasarkan (b) diperoleh untuk $n \geq n_0$ berlaku $\left|x_k^{(n)} - x_k\right| = \left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right| < \frac{\varepsilon}{4}$. Selanjutnya dibentuk barisan $\tilde{x} = (x_k)$ menurut ketidaksamaan minkowski

c. $\{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\}^{\frac{1}{p}} = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k - x_k^{(n)} + x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$

$$= \lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)} + x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty$$

yang berarti $\tilde{x} = (x_k) \in \ell_p$. Berdasarkan pertidaksamaan (a) diperoleh untuk $n \geq n_0$ berlaku

d. $\left\|\tilde{x} - \tilde{x}^{(n)}\right\| = \lim_{m\to\infty} \left\{\sum_{k=1}^{\infty} \left|x_k - x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{4}$ maka barisan $\left(\tilde{x}^{(n)}\right) \subset \ell_p$ konvergen ke $\tilde{x} = (x_k) \in \ell_p$ atau terbukti bahwa $\left(\ell_p, \|.\|_p\right), 1 \leq p < \infty$ merupakan ruang Banach.

Pada bagian ini akan membahas definisi operator.

2.8 Operator Linear dan Kontinu

Definisi 2.8.1 (Kreyzig, 1989) Suatu pemetaan pada ruang vektor khusunya ruang bernorm disebut operator.

Definisi 2.8.2 (Kreyzig, 1989) Diberikan ruang bernorm X dan Y atas field yang sama.

a. Pemetaan dari X dan Y disebut operator.
b. Operator $\mathcal{A} : X \to Y$ dikatakan linear jika untuk setiap $x, y \in X$ dan setiap skalar α berlaku $A(\alpha x) = \alpha Ax$ dan $A(x + y) = Ax + Ay$.

Definisi 2.8.3 (Kreyzig, 1989) Misal diberikan $(X, \|\cdot\|)$ dan $(Y, \|\cdot\|)$ masing-masing ruang bernorm.

a. Operator $\mathcal{A} : X \to Y$ dikatakan terbatas jika ada bilangan $M \in R$ dengan $M \geq 0$ sehingga untuk setiap $x \in X$ berlaku $\|Ax\| \leq M\|x\|$.
b. Operator $\mathcal{A}$ dikatakan kontinu di titik $x_0 \in X$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in X$ dengan $\|x - y\| < \delta$ berlaku $\|Ax - Ay\| < \varepsilon$.
c. Jika $\mathcal{A}$ kontinu di setiap $x \in X$, $\mathcal{A}$ disebut kontinu pada X.

Teorema 2.8.4 Kontinu dan terbatas (Kreyzig, 1989)

Misalkan $\mathcal{A} : X \to Y$ adalah operator linear, dimana $x, y \subset X$ dan X, Y adalah ruang bernorm. Maka:

a. $\mathcal{A}$ kontinu jika dan hanya jika $\mathcal{A}$ terbatas.

b. Jika $\mathcal{A}$ kontinu pada satu titik, maka $\mathcal{A}$ kontinu.

Bukti:

a. ($\Longrightarrow$) Diketahui $\mathcal{A}$ kontinu.

Akan ditunjukkan $\mathcal{A}$ terbatas.

Misalkan $\mathcal{A}$ kontinu pada sebarang titik, katakanlah $x_0 \in X$.

Misalkan juga diberikan sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in X$ dengan $\|x - x_0\| \leq \delta$ berlaku $\|Ax - Ax_0\| \leq \varepsilon$.

Ambil sebarang $y \in X$, $y \neq 0$, akibatnya

$$x = x_0 + \frac{\delta}{\|y\|} y$$

$$x - x_0 = \frac{\delta}{\|y\|} y$$

$$\|x - x_0\| = \delta$$

karena $\mathcal{A}$ linear, maka

$$\begin{aligned} \|Ax - Ax_0\| &= \|A(x - x_0)\| \\ &= \left\| A\left(\frac{\delta}{\|y\|} y\right) \right\| \\ &= \frac{\delta}{\|y\|} \|Ay\| \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

diperoleh

$$\|Ay\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta} \|y\|$$

Misalkan $\frac{\varepsilon}{\delta} = M$, maka $\|Ay\| \leq M\|y\|$. Dengan demikian terbukti bahwa $\mathcal{A}$ terbatas.

($\Longleftarrow$) Diketahui $\mathcal{A}$ terbatas.

Akan ditunjukkan $\mathcal{A}$ kontinu.

Misalkan $\mathcal{A}$ terbatas dan anggap sebarang $x_0 \in X$ sehingga akan ditunjukkan bahwa $\mathcal{A}$ kontinu di x_0. Misalkan juga diberikan sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $\|x - x_0\| < \delta$ dimana $\delta = \frac{\varepsilon}{\|A\|}$.

Kemudian, karena $\mathcal{A}$ linear maka untuk setiap $x \in X$ mengakibatkan,

$$\begin{aligned} \|Ax - Ax_0\| &= \|A(x - x_0)\| \\ &\leq \|A\|\|x - x_0\| \\ &< \|A\|\ \delta \\ &= \ \varepsilon \end{aligned}$$

Karena $x_0 \in X$ sebarang maka terbukti $\mathcal{A}$ kontinu.

b. Jika $\mathcal{A}$ kontinu pada satu titik, maka berdasarkan Teorema 2.8.4. bagian (a) sebelah kiri, $\mathcal{A}$ terbatas. Karena $\mathcal{A}$ terbatas maka dengan menggunakan bukti bagian (a) sebelah kanan $\mathcal{A}$ kontinu.

2.9 Transformasi Linear

Jika $T : V \rightarrow W$ adalah sebuah fungsi yang memetakan sebuah ruang vektor V ke sebuah ruang vektor W, maka T disebut transformasi linear dari V ke W jika semua vektor u dan v pada V dan semua skalar $k \in \mathbb{R}$.

a. $T(u + v) = T(u) + T(v)$.

b. $T(ku) = kT(u)$.

Dalam kasus yang spesifik ini dimana $V = W$, transformasi linear $T : V \rightarrow W$ disebut operator linear pada V (Anton dan Rorres, 2004).

Contoh 2.9

Tunjukkan bahwa $T: R^3 \rightarrow R^2$ adalah fungsi yang dirumuskan oleh

$T(x, y, z) = (x - z, x + y)$ merupakan transformasi linear.

Penyelesaian:

Ambil unsur sebarang $\bar{u}, \bar{v}$ di R^3 dan k sebarang skalar.

Misalkan: $\bar{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\bar{v} = (x_2, y_2, z_2)$

a. Akan ditunjukkan bahwa $T(u + v) = T(u) + T(v)$.

$$
\begin{aligned}
T(u+v) &= T\big((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)\big) \\
&= T\big((x_1 + x_2), (y_1 + y_2), (z_1 + z_2)\big) \\
&= \big((x_1 + x_2) - (z_1 + z_2), (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\big) \\
&= \big((x_1 - z_1) + (x_2 - z_2), (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)\big) \\
&= \big((x_1 - z_1), (x_1 + y_1) + (x_2 - z_2), (x_2 + y_2)\big) \\
&= \ T(u) + T(v).
\end{aligned}
$$

Terbukti bahwa $T(u+v) = T(u) + T(v)$.

b. Akan ditunjukkan bahwa $T(ku) = kT(u)$.

$$
\begin{aligned}
T(ku) &= T\big((kx_1, ky_1, kz_1)\big) \\
&= (kx_1 - kz_1, kx_1 + ky_1) \\
&= k(x_1 - z_1, x_1 + y_1) \\
&= kT(u).
\end{aligned}
$$

Terbukti bahwa $T(ku) = kT(u)$.

Dari pembuktian a dan b terbukti bahwa T merupakan transformasi linear.

III. METODE PENELITIAN

Bagian ini membahas tentang metode penelitian yang digunakan untuk menentukan syarat cukup transformasi matriks yang memetakan dari ruang barisan selisih ke ruang barisan tingkat tiga dan menyelidiki sifatnya.

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2021/2022 di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Bagian ini akan membahas langkah-langkah penelitian yang akan dilakukan. Adapun langkah-langkah penelitian ini, yaitu:

1. Membuktikan ruang barisan $\ell_3, \ell_3(\Delta), \ell_3(\Delta_2)$, dan $\ell_3(\Delta_3)$ merupakan ruang linear.
2. Membuktikan ruang barisan $\ell_3, \ell_3(\Delta), \ell_3(\Delta_2)$, dan $\ell_3(\Delta_3)$ merupakan ruang bernorm.
3. Membuktikan ruang barisan $\ell_3, \ell_3(\Delta), \ell_3(\Delta_2)$, dan $\ell_3(\Delta_3)$ merupakan ruang bernorm lengkap.
4. Menentukan syarat cukup agar $\mathcal{A} : \ell_3(\Delta) \rightarrow \ell_3$ merupakan transformasi matriks.
5. Menentukan syarat cukup agar $\mathcal{A} : \ell_3(\Delta_2) \rightarrow \ell_3$ merupakan transformasi matriks.
6. Menentukan syarat cukup agar $\mathcal{A} : \ell_3(\Delta_3) \rightarrow \ell_3$ merupakan transformasi matriks.

V. KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dilakukan sebelumnya, dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Operator $\mathcal{A}: \ell_3(\Delta) \to \ell_3$ bersifat linear kontinu jika dan hanya jika ada matriks takhingga (a_{ij}) dengan

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} < \infty$$

   dan $A\tilde{x} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\, x_j\right) \in \ell_3$ untuk setiap $\tilde{x} \in \ell_3(\Delta) \subset \ell_3$, dengan $x_1 = 0$.

2. Operator $\mathcal{A}: \ell_3(\Delta_2) \to \ell_3$ bersifat linear kontinu jika dan hanya jika ada matriks takhingga (a_{ij}) dengan

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} < \infty$$

   dan $A\tilde{x} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\, x_j\right) \in \ell_3$ untuk setiap $\tilde{x} \in \ell_3(\Delta_2) \subset \ell_3$, dengan $x_1 = 0, x_2 = 0$.

3. Operator $\mathcal{A}: \ell_3(\Delta_3) \to \ell_3$ bersifat linear kontinu jika dan hanya jika ada matriks takhingga (a_{ij}) dengan

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} < \infty$$

   dan $A\tilde{x} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\, x_j\right) \in \ell_3$ untuk setiap$\tilde{x} \in \ell_3(\Delta_3) \subset \ell_3$, dengan $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. & Rorres, C. 2004. *Aljabar Linear Elementer*. Ed ke-8. Terjemahan Refina Indriasari, Irzam Harmein. Jakarta. Erlangga.

Bartle, R.G. & Sherbert, D.R. 2000. *Introduction to Real Analysis*. John Wiley & Sons, Inc. Third Edition.

Darmawijaya, S. 2007. *Pengantar Analisis Abstrak*. Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.

Kizmaz, H. 1981. On Certain Sequence Space. *Journals Canadian Mathematical Bulletin*. **24**(2): 169-176.

Kreyzig, E. 1989. *Introductory Function Analysis with Application*. Willey Classic Library, New York.

Mizrahi, A. & Sulivan, M. 1982. *Calculus and Analytic Geometry*. Wadsworth Publishing Company Belmot, California.

Rudin, W. 1987. *Real and Complex Analysis*. Mc Graw-Hill International Edition, New York.