ANALISIS ANTARA BILANGAN *k*-LUCAS DENGAN BILANGAN *k*-FIBONACCI

(Skripsi)

Oleh

NANDA ANINDIA PUTRI

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2022

ABSTRACT

ANALYSIS BETWEEN k-LUCAS NUMBER AND k-FIBONACCI NUMBER

By

Nanda Anindia Putri

The Lucas sequence is an extension of Fibonacci, the Fibonacci sequence is a sequence of numbers where the next term is the sum of the previous two terms. There are several new generalizations of the Lucas Sequence and Fibonacci Sequence, one of which is the *k*-Lucas number and the *k*-Fibonacci number. The results of this study indicate that there is an attachment between *k*-lucas and *k*-Fibonacci which is indicated by several relationships, the Convolution Theorem and D'Ocagne Identity. In addition, this study also wants to show a new relationship between the number *k*-Lucas.

Keywords: *k*-Lucas Sequence, *k*-Fibonacci Sequence, Binet formulas on *k*-Lucas numbers, Binet formulas on *k*-Fibonacci numbers.

ABSTRAK

ANALISIS ANTARA BILANGAN *k*-LUCAS DENGAN BILANGAN *k*-FIBONACCI

Oleh

Nanda Anindia Putri

Barisan Lucas merupakan pengembangan dari barisan Fibonacci, barisan Fibonacci adalah suatu barisan angka yang dimana suku berikutnya merupakan penjumlahan dari dua suku sebelumnya. Terdapat beberapa generalisasi baru dari barisan Lucas dan barisan Fibonacci salah satunya adalah bilangan *k*-Lucas dan bilangan *k*-Fibonacci. Hasil penelitian ini menunjukan bahwa adanya keterikatan antara barisan *k*-Lucas dengan barisan *k*-Fibonacci yang dibuktikan dengan beberapa hubungan, Teorema *Convolution* dan Identitas *D'Ocagne.* Selain itu penelitian ini juga ingin menunjukan hubungan baru antara bilangan *k*-Lucas.

Kata Kunci: Barisan *k*-Lucas, Barisan *k*-Fibonacci, Rumus Binet barisan *k*-Lucas, Rumus Binet barisan *k*-Fibonacci.

ANALISIS ANTARA BILANGAN *k*-LUCAS DENGAN BILANGAN *k*-FIBONACCI

Oleh

NANDA ANINDIA PUTRI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar

SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU DAN PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2022

Judul Skripsi : **ANALISIS ANTARA BILANGAN *k*-LUCAS DENGAN BILANGAN *k*-FIBONACCI**

Nama Mahasiswa : ***Nanda Anindia Putri***

Nomor Pokok Mahasiswa : 1817031086

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Amanto, S.Si., M.Si.	**Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.**
NIP.197303142000121002	NIP.197604112000122001

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP.197403162005011001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Amanto, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, S.Si., M.T.
NIP 197407052000031001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **4 Juli 2022**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: Nanda Anindia Putri
Nomor Pokok Mahasiswa	: 1817031086
Jurusan	: Matematika
Judul Skripsi	: **ANALISIS ANTARA BILANGAN *k*-LUCAS DENGAN BILANGAN *k*-FIBONACCI**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, Juli 2022

enyatakan,

Nanda Anindia Putri

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Nanda Anindia Putri dilahirkan di Kota Serang pada tanggal 02 Juli 2000, anak pertama dari tiga bersaudara dari keluarga pasangan Bapak Sumar dan Ibu Sri Hartati.

Penulis menempuh pendidikan di SDN 5 Kota Serang pada tahun 2006 – 2012. Pendidikan Sekolah Menengah Pertama di SMP La Tansa pada tahun 2012 – 2015. Pendidikan Sekolah Menengah Atas di MAN 2 Kota Serang pada tahun 2015 – 2018. Dan pada tahun 2018 penulis diterima sebagai mahasiswa jurusan Matematika Fakultas Ilmu Pengetahuan Alam melalui jalur SBMPTN.

Pada tahun 2021 tanggal 12 Juli – 20 Agustus penulis melaksanakan Kerja Praktek (KP) di PT Bank Perkreditan Rakyat Serang (PERSERODA) Cabang Kasemen. Kemudian pada tahun 2022 tanggal 10 Januari – 22 Februari penulis melakukan kegiatan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Cikoneng Kecamatan Anyar Kabupaten Serang.

KATA INSPIRASI

"Pengetahuan yang baik adalah yang memberikan manfaat
bukan hanya diingat"
(Imam Syafi'i)

"Tidak harus mengikuti arah jalan, kamu bisa membuat jalanmu sendiri
lalu tinggalkan jejak disana"
(Ralph Waldo Emerson)

"Perubahan adalah hukum kehidupan, dan mereka yang hanya melihat masa lalu
atau masa kini pasti akan kehilangan masa depan"
(John F Kennedy)

"Jangan lelah mencoba walau tidak ada jaminan kesuksesan, tetapi memilih
untuk tidak mencoba adalah jaminan kegagalan"
(Bacharuddin Jusuf Habibie)

PERSEMBAHAN

Puja dan puji Syukur atas kehadirat Allah SWT yang telah membrikan berkat dan rahmatnya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik. kupersembahkan skripsi ini kepada orang tua tercinta Mamah dan Papa. Terimakasih atas kasih sayang, doa dan dukungannya yang tidak pernah henti.

Terimakasih untuk adik adikku Egar dan Rianti ysng selalu memberiku semangat dan motivasi dan juga kepada keluarga besar yang selalu mendukung penulis agar dapat menyelesaikan perkuliahan dengan lancer.

Terimakasih kepada dosen pembimbing, pembahas dan juga kepada semua Dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmunya kepada penulis.

SANWACANA

Puja dan puji Syukur atas kehadirat Allah SWT yang telah membrikan berkat dan rahmatnya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dengan judul "**Analisis Antara bilangan *k*-Lucas Dengan Bilangan *k*-Fibonacci"**. Skripsi ini merupakan salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika di Universitas Lampung. Dalam proses penulisan skripsi ini tentunya penulis memperoleh bimbingan dan dukungan dari berbagai pihak. Pada kesempatan ini, penulis ingin mengucapkan terima kasih sebesar-besarnya kepada:

1. Bapak Amanto, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing pertama yang telah senantiasa memberikan bimbingan, motivasi serta dukungan kepada penulis selama penyusunan skripsi ini
2. Ibu Dr. Asmiati, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing kedua yang telah memberikan dukungan, bimbingan serta saran yang membantu penulis menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Tiryono Rubi, Ph.D. selaku dosen penguji yang telah memberikan evaluasi serta saran kepada penulis.
4. Bapak Ir. Warsono, Ph.D., M.S., Ph.D selaku dosen Pembimbing Akademik (PA) atas arahan dan bimbingannya selama masa perkuliahan.
5. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Universitas Lampung.
6. Seluruh civitas akademik, dosen, dan staf Jurusan Matematika Fakuktas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

7. Papa, Mama, Egar dan Rianti yang selalu memberikan doa dan dukungan kepada penulis.
8. Jeta, Mami, Udil, Dalpun, Bunge, Alip, Pinny, Ulil, Wiwin, Niar yang selalu mendukung dan tempat berbagi cerita selama masa perkuliahan.
9. Seluruh teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2018.

Bandar Lampung,   Juli 2022

Penulis,

Nanda Anindia Putri

DAFTAR ISI

Halaman

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika adalah ilmu yang mempelajari perubahan besaran, bangun ruang dan bilangan. Teori bilangan merupakan salah satu dari sekian banyak cabang ilmu matematika. Teori bilangan merupakan salah satu cabang matematika murni yang mempelajari tentang sifat-sifat bilangan bulat dan terdapat berbagai masalah terbuka yang dapat dipahami sekalipun bukan oleh ahli matematika. Dalam teori bilangan dasar juga dipelari teknik matematika lainnya, salah satunya bilangan Fibonacci dan bilangan Lucas.

Barisan Lucas ditemukan oleh matematikawan Prancis yang bernama Edouard Anatole Lucas. Barisan Lucas adalah barisan yang merupakan pengembangan dari barisan Fibonacci, Seorang ilmuan yang dikenal dengan Leonardo da Pisa atau Fibonacci memainkan peran penting dalam ilmu matematika diantaranya sebagai penemu dari bilangan Fibonacci. Barisan Fibonacci adalah barisan dimana suku berikutnya dari barisan tersebut adalah hasil penjumlahan dari dua suku sebelumnya.

Barisan *k*-Lucas dan Barisan *k*-Fibonacci merupakan salah satu dari beberapa jenis generalisasi baru dari barisan Lucas dan barisan Fibonacci. Selain terdapat beberapa generalisasi baru, barisan Fibonacci dan barisan Lucas juga mempunyai banyak sifat – sifat yang menarik. Sergio Falton merupakan penemu dari bilangan *k*-Lucas dari pembelajaran aplikasi rekurensi dua transformasi geometris yang dipublikasikan pada tahun 2011 melalui artikel yang berjudul *"On the k-Lucas Numbers*". Dengan demikian, penulis bertujuan untuk menganalisis tentang hubungan apa saja yang terjadi dari barisan *k*-Lucas dengan barisan *k*-Fibonacci yang dibuktikan dengan menggunakan beberapa relasi dan menggunakan teorema – teorema.

1.2 Tujuan Penelitian

Dari latar belakang diatas dapat diperoleh tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Membahas barisan *k*-Lucas dan barisan *k*-Fibonacci.
2. Membahas hubungan dan teorema – teorema dari barisan *k*-Lucas dengan barisan *k*-Fibonacci.
3. Membahas relasi baru antara barisan *k*-Lucas dengan barisan *k*-Fibonacci.
4. Membahas relasi baru antara barisan *k*-Lucas

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menambah pengetahuan tentang barisan *k*-Lucas dan barisan *k*-Fibonacci.
2. Menambah wawasan tentang hubungan antara barisan *k*-Lucas dengan barisan *k*-Fibonacci.
3. Menambah wawasan tentang relasi baru antara barisan *k*-Lucas dengan barisan *k*-Fibonacci.
4. Menambah wawasan tentang relasi baru antara barisan *k*-Lucas.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Barisan

Barisan adalah suatu daftar urutan tak hingga dari bilangan urut:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

a_1 merupakan suku urut pertama, a_2 suku urut kedua dan a_n merupakan suku urut ke n. Barisan dapat dianggap sebagai fungsi dengan $f: N \rightarrow R,$ dimana N adalah domain dari f dan N adalah himpunan semua bilangan bulat positif dan R adalah himpunan bilangan real.

Notasi: $\{a_1, \dots, a_n, \dots\}$ juga dilambangkan dengan $\{a_1\}$ atau $\{a_n\}_{n-1}^{\infty}$ juga perhatikan bahwa dalam notasi fungsi $a_n = f(n)$.

Contoh 2.1:

a. 1, 2, 3, 4, 5, 6, … (barisan bilangan asli).

b. 4, 9, 16, 25, 36, … (barisan bilangan kuadrat).

c. 11, 13, 15, 17, 19, 21, … (barisan bilangan ganjil).

2.1.1 Barisan Aritmatika

Barisan aritmatika adalah barisan bilangan berurutan $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ yang mempunyai selisih yang sama antara setiap suku yang berurutan, dengan menambahkan atau mengurangi menggunakan angka yang sama untuk setiap kali membuat barisan

Untuk mendapat suku ke-n, misalkan $n = 25$ dengan nilai $a = 3$ dan $b = 2$ maka Untuk menemukan suku tertentu dari barisan aritmatika, dengan menggunakan rumus: untuk mencari suku ke-n. Langkahnya:

- Suku ke-n dari barisan aritmatika dengan menggunakan rumus

  $$a_n = a + (n-1)b$$

  Jadi, untuk mendapatkan suku ke-n, substitusikan nilai yang telah diketahui $a = 3$ dan $b = 2$ ke dalam rumus, maka didapat $a_n = 3 + (n-1)2$

- untuk menemukan suku ke-25 substitusikan $n = 25$ ke dalam persamaan, didapat

  $a_{25} = 3 + (25-1)2$

  $a_{25} = 3 + (24)2$

  $a_{25} = 3 + 48$

  $a_{25} = 51$

Contoh 2.1.1:

1. 4, 7, 10, 13, 16, 19, …
2. 100, 95, 90, 85, 80, …

2.1.2 Barisan Geometri

Barisan geometri adalah barisan bilangan yang mengikuti suatu pola yang suku selanjutnya diperoleh dengan mengalikannya dengan suatu konstanta yang disebut rasio, Rasio dapat diketahui dengan membagi setiap suku dalam barisan dengan suku sebelumnya.

setelah dapat mengidentifikasi barisan geometri, langkah yang dilakukan untuk menemukan suku-suku barisan geometri jika diketahui suku pertama dan rasionya. Suku-suku suatu barisan geometri dapat dicari dengan memulai dengan suku pertama dan mengalikannya dengan rasio yang sama secara berulang. Misalkan suku pertama suatu barisan geometri adalah $a_1 = 1$ dan rasionya adalah $r = 3$ maka:

$a_1 = 1$

$a_2 = 1 \,.\, 3 = 3.$

$a_3 = 3 \,.\, 3 = 9$

$a_4 = 9 \,.\, 3 = 27$

Contoh 2.1.2

1. 2500, 500, 100, 20, 4, …
2. 3, 6, 12, 24, 48, 96, …
3. 1000, 500, 250, 125, ...

2.2 Deret

Deret adalah penjumlahan suku – suku yang berurutan dalam barisan bilangan. Deret berhingga mempunyai elemen pertama dan terakhir yang telah terdefinisi tetapi deret tak terhingga berlangsung tanpa batas atau secara terus menerus. Misalnya, jumlah n suku pertama dari suku – suku barisan biasa dinotasikan dengan S_n maka:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Untuk menentukan deret Aritmatika dengan menemukan atau menghitung aturan suku ke suku. Dilakukan dengan mengurangkan dua suku berurutan untuk menemukan perbedaan umum. Adapun langkahnya:

1. Ambil dua suku berurutan dari barisan tersebut.
2. Kurangi dua suku pertama dari suku tersebut untuk menemukan perbedaan umum disebut dengan b.
3. Tambahkan perbedaan umum ke suku terakhir dalam barisan untuk menemukan suku berikutnya.

2.3 Barisan Fibonacci

Definisi 2.3.1. Bilangan Fibonacci F_n adalah suku-suku barisan {0, 1, 1, 2, 3, 5, ...} dimana setiap sukunya adalah penjumlahan dua suku sebelumnya, dimulai dengan nilai $F_1 = 1$ dan $F_2 = 1$, meskipun terkadang dapat definisikan $F_0 = 0$.

(Meinke, 2011)

Bilangan Fibonacci diperoleh dengan rumus

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{untuk } n \geq 2 \tag{2.3}$$

Dengan menggunakan (2.3), akan diperoleh barisan bilangan berikut:

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, \ldots$$

2.4 Bilangan *k*-Fibonacci

Definisi 2.4.1 Untuk sebarang bilangan bulat k ≥ 1, barisan Fibonacci ke-k adalah $\{F_{k,n}\}_{n\in\mathrm{N}}$ yang didefinisikan oleh $F_{k,0} = 0$, $F_{k,1} = 1$, dan $F_{k,n+1} = kF_{k,n} + F_{k,n-1}$ untuk n $\geq$ 1.

(Falcon and Plaza, 2006)

Kasus khusus dari Definisi 2.4.1 adalah:

- Jika $k = 1$, barisan bilangan Fibonacci klasik diperoleh:

  $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ dan $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ untuk n $\geq$ 1

  $\{F_n\}_{n\in\mathrm{N}} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots\}$

- Jika $k = 2$, barisan Pell klasik diperoleh:

  $J_0 = 0$, $J_1 = 1$ dan $J_{n+1} = 2J_n + J_{n-1}$ untuk n $\geq$ 1

  $\{J_n\}_{n\in\mathrm{N}} = \{0, 1, 2, 5, 12, , \ldots\}$

- Jika $k = 3$, urutan barisan diperoleh:

  $E_0 = 0$, $E = 1$ dan $E_{n+1} = 3E_n + E_{n-1}$ untuk n $\geq$ 1

  $\{E_n\}_{n\in\mathrm{N}} = \{0, 1, 3, 10, 33, \ldots\}$

Dari Definisi bilangan *k*-Fibonacci, untuk bilangan pertama *k*-Fibonacci dapat menyimpulkan nilai bilangan *k*-Fibonacci apa pun dengan substitusi sederhana. Bilangan *k*-Fibonacci pertama sebagai berikut:

$F_{k,1} = 1$

$F_{k,2} = k$

$F_{k,3} = k^2 + 1$

$F_{k,4} = k^3 + 2k$

$F_{k,5} = k^4 + 3k^2 + 1$

2.5 Barisan Lucas

Barisan Lucas L_n adalah suku-suku barisan {2, 1, 3, 4, 7, 11, ...} dimana setiap sukunya merupakan penjumlahan dari dua suku sebelumnya, untuk barisan Lucas dua suku pertamanya dimulai dengan nilai L_1= 2 dan L_2 = 1.

Barisan Lucas diperoleh dengan rumus:

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \qquad \text{untuk } n \geq 2 \qquad (2.5)$$

Dengan menggunakan (2.5) akan diperoleh barisan bilangan berikut:

L_1 = 2, L_2 = 1, L_3= 3, L_4 = 4, ...

2.6 Bilangan *k*-Lucas

Definisi 2.6.1 Untuk sebarang bilangan bulat $k \geq 1$, barisan Lucas ke-k adalah $\{L_{k,n}\}_{n \in \mathrm{N}}$ yang didefinisikan oleh $L_{k,0} = 2$, $L_{k,1} = k$,

Bilangan *k*-Lucas diperoleh dengan rumus:

$$L_{k,n+1} = kL_{k,n} + L_{k,n-1} \qquad \text{untuk n} \geq 1$$

Kasus khusus dari Definisi 2.6.1 adalah:

- Jika $k = 1$, barisan bilangan Lucas klasik diperoleh:

  $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ dan $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$ untuk $n \geq 1$

  $\{L_n\}_{n \in \mathrm{N}} = \{2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, \ldots\}$

- Jika $k = 2$, barisan Pell klasik diperoleh:

  $J_0 = 2$, $J_1 = 2$ dan $J_{n+1} = 2J_n + J_{n-1}$ untuk $n \geq 1$

  $\{J_n\}_{n \in \mathrm{N}} = \{2, 2, 6, 14, 34, 82, 198, \ldots\}$

- Jika $k = 3$, urutan barisan diperoleh:

  $E_0 = 2$, $E_1 = 3$ dan $E_{n+1} = 3E_n + E_{n-1}$ untuk $n \geq 1$

  $\{E_n\}_{n \in \mathrm{N}} = \{2, 3, 11, 36, 119, \ldots\}$

Dari Definisi bilangan k-Lucas, untuk bilangan pertama k-Lucas dapat menyimpulkan nilai bilangan k-Lucas apa pun dengan substitusi sederhana. Bilangan k-Lucas pertama sebagai berikut:

$L_{k,0} = 2$

$L_{k,1} = k$

$L_{k,2} = k^2 + 2$

$L_{k,3} = k^3 + 3k$

$L_{k,4} = k^4 + 4k^2 + 2$

2.7 Induksi Matematika

Induksi matematika adalah suatu metode untuk membuktikan suatu rumus atau pernyataan matematika yang bernilai benar atau salah secara deduktif. Deduktif sendiri berarti penarikan suatu kesimpulan dari satu atau lebih pernyataan yang berbentuk umum untuk menghasilkan kesimpulan yang bersifat khusus berdasarkan fakta. Induksi matematika merupakan perluasan dari logika matematika.

Untuk membuktikan suatu pernyataan atau rumus bernilai benar atau salah dengan menggunakan induksi matematika memerlukan beberapa langkah, diantanya:

1. Buktikan untuk $n = 1$ dalam rumus bernilai benar.
2. Diasumsikan untuk nilai $n = k$ dalam rumus bernilai benar.
3. Buktikan untuk $n = k + 1$ dalam rumus bernilai benar.

Contoh 2.7

Tunjukan bahwa $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{2n(n+1)}{4}$

Bukti

1. Harus dibuktikan benar untuk $n = 1$, yaitu

$$1 = \frac{2n(n+1)}{4}$$

$$1 = \frac{2(1)(1+1)}{4}$$

$$1 = 1$$

2. Diasumsikan benar untuk nilai $n = k$, yaitu

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{2k(k+1)}{4}$$

3. Akan dibuktikan benar untuk $n = k + 1$, yaitu

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{2(k+1)((k+1)+1)}{4}$$

Pertama dibuktikan ruas kiri terlebih dahulu kemudian dilanjutkan dengan hipotesis induksi untuk menghasilkan ruas kanan. Berdasarkan asumsi (2) dapat diketahui:

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{2k(k+1)}{4}$$

Masukan pada pembuktian hipotesis kiri, yaitu

$$\begin{aligned}
(1 + 2 + 3 + \dots + k) + (k+1) &= \frac{2(k+1)((k+1)+1)}{4} \\
&= \frac{(2k+2)(k+2)}{4} \\
&= \frac{(2k^2 + 4k + 2k + 4)}{4} \\
&= \frac{2k^2 + 6k + 4}{4} \\
&= \frac{(2k+2)(k+2)}{5} \\
(1 + 2 + 3 + \dots + k) + (k+1) &= \frac{2(k+1)(k+1+1)}{4} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

2.8 Relasi Rekursif

Relasi rekursif dari suatu barisan a_n adalah suatu rumus yang merepresentasikan suku ke-*n* yang diperoleh dari suku sebelumnya untuk suatu *n* bilangan bulat *nonnegatif* sedemikian rupa sehingga terbentuk suatu persamaan dari hubungan suku – suku tersebut. persamaan yang menyatakan antara beberapa suku tersebut dinamakan relasi rekurensi.

Contoh 2.8:

Diberikan barisan berikut ini

3, 7, 10, 17, 27, 44,…

Dari barisan di atas diperoleh:

- Suku ke-6 = suku ke-5 + suku ke-4 → $a_6 = a_5 + a_4$
- Suku ke-7 = suku ke-6 + suku ke-5 → $a_7 = a_6 + a_5$
- Suku ke-8 = suku ke-7 + suku ke-6 → $a_8 = a_7 + a_6$
- Suku ke-9 = suku ke-8 + suku ke-7 → $a_9 = a_8 + a_7$
- Suku ke-10 = suku ke-9 + suku ke-8 → $a_{10} = a_9 + a_8$
- Suku ke-11 = suku ke-10 + suku ke-9 → $a_{11} = a_{10} + a_9$
- Dan seterusnya.

Bila hubungan antarsuku pada barisan di atas diubah menjadi suatu rumus, maka akan diperoleh:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Bentuk relasi rekursif a_n di atas dikenal dengan sebutan rumus Fibonacci, dan barisannya dikenal dengan barisan Fibonacci.

2.9 Rumus Binet

Rumus Binet adalah rumus eksplisit yang digunakan untuk mencari suku ke-*n* dari barisan Fibonacci. Dinamakan demikian karena diturunkan oleh matematikawan Jacques Philippe Marie Binet, meskipun sudah dikenal dengan Abraham de Moivre. Pada tahun 1875, Marie Binet mengemukakan suatu rumus F_n yang dapat menghitung lebih cepat tanpa harus menghitung ulang suku ke-*n* bilangan tersebut sebanyak n kali, yang kemudian dikenal dengan formula binet atau rumus binet.

Rumus Binet didapat melalui representasi eksplisit dari bilangan Fibonacci yang didefinisikan secara rekursif oleh

$$F_n = \begin{cases} 0 & \text{jika } n = 0 \\ 1 & \text{jika } n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{jika } n > 1 \end{cases}$$

Rumus Binet didapat dengan menghubungkan angka Fibonacci dan Rasio Emas. Yang didapat dari persamaan kuadrat $x^2 - x - 1 = 0$. Dengan menggunakan rumus ABC, maka didapat: $a = 1,\ b = -1,\ c = -1$

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Akar positif dari persamaan kuadrat $x^2 - x - 1 = 0$ adalah $\emptyset = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ atau yang dikenal dengan *golden ratio.* Akar kedua persamaan adalah negatif yaitu $\varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Sehingga didapat rumus Binet adalah:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\emptyset^n - \varphi^n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Waktu dan tempat penelitian ini dilakukan di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung pada semester Genap Tahun Akademik 2021/2022.

3.2 Metode Penelitian

Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian adalah sebagai berikut:

1. Mencari literatur utama yang mendukung topik pembahasan ini.
2. Memahami dan mempelajari konsep barisan *k*-Lucas dan barisan *k*-Fibonacci.
3. Membuktikan beberapa hubungan dan teorema dari barisan *k*-Lucas dengan barisan *k*-Fibonacci.
4. Menarik kesimpulan tentang hubungan dan teorema yang dihasilkan dari barisan *k*-Lucas dengan barisan *k*-Fibonacci yang telah dibuktikan.

V. KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan uraian dari hasil dan pembahasan yang telah dilakukan, maka dapat diambil kesimpulan yaitu:

Rumus Binet pada bilangan *k*-Fibonacci yaitu $F_{k,n} = \frac{\sigma_k^n - (\sigma_k)^{-n}}{\sigma_k + \sigma_k^{-1}}$ dan Rumus Binet pada bilangan *k*-Lucas yaitu $L_{k,n} = \sigma_k^n - (\sigma_k)^{-n}$ yang solusinya didapat melalui persamaan relasi rekursif yang digunakan sebagai dasar – dasar dalam melakukan pembuktian terhadap hubungan pada barisan *k*-Lucas dengan barisan *k*-Fibonacci.

Pada bilangan *k*-Lucas dan bilangan *k*-Fibonacci terdapat hubungan antara keduanya yang bisa dibuktikan dengan menggunakan beberapa relasi dan teorema diantaranya:

Hubungan pertama: $L_{k,n}^2 = (k^2 + 4)F_{k,n}^2 + 4(-1)^n$. Hubungan kedua: $L_{k,n} = F_{k,n-1} + F_{k,n+1}$.Hubungan ketiga: $L_{k,n}^2 + L_{k,n+1}^2 = (k^2 + 4)F_{k,2n+1}$Hubungan keempat $= L_{k,n}F_{k,n} = F_{k,2n}$. Teorema *Convolution*: $L_{k,q+1}L_{k,p} + L_{k,q}L_{k,p-1} = (k^2 + 4)F_{k,q+p}$. untuk $m \geq 1$ Identitas *D'Ocagne*: $L_{k,q}L_{k,p+1} - L_{k,q+1}L_{k,p} = (-1)^{p+1}(k^2 + 4)F_{k,q-p}$. Untuk $m \geq n$. Selain beberapa hubungan dan teorema terdapat relasi baru antara barisan *k*-Lucas dengan barisan *k*-Fibonacci: $\prod_{i=1}^{n-1} L_{k,2^i} = F_{k,2^n}$ dan relasi baru dari barisan *k*-Lucas: $L_{k,n}L_{k,n+r} = L_{k,2n+r} + (-1)^n L_{k,r}$.

5.2 Saran

Penelitian ini dapat dilanjutkan dengan memasukan nilai koefisien pada barisan k-Lucas dan pada barisan k-Fibonacci, karena pada penelitian ini hanya difokuskan pada nilai koefisien secara umum.

DAFTAR PUSTAKA

Burton, D.M. 2009. *Elementary Number Theory*. 7^{th} Edition. The McGraw Hill Companies, New York.

Falcon, S. and Plaza, A. 2006. On the Fibonacci k-numbers. *Chaos, Solitons and Fractals*. **32**:1615-1624.

Falcon, S. 2011. On the *k*-Lucas number. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*. **6**(11):1039-1050.

Godase, A.D. and Dhakne, M. B. 2016. Fibonacci and *k* Lucas sequences as series of fraction. *Mathematical Journal of Interdisciplinary Sciences*. **4**(2):107-119.

Meinke, A.M. 2011. *Fibonacci Numbers and Associated Matrices*. A Thesis. Kent State University, Kent.

Munir, Rinaldi. 2004. *Teori Bilangan*. Institut Teknologi Bandung, Bandung.

Niven, I. and Zuckerman, H.S. 1976. *Introduction to The Theory of Numbers*. Willey Eastern Ltd, New Delhi.

Sukirman, H. 2004. *Pengantar Teori Bilangan*. UNY, Yogyakarta.

T. Koshy. 2001. *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*. Wiley Intersection, New York.