KONSTRUKSI BARISAN *V*-KOEKSAK *ROUGH* PADA GRUP *ROUGH*

TESIS

Oleh

DESFAN HAFIFULLOH

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2022

ABSTRACT

CONSTRUCTION A ROUGH V-COEXACT SEQUENCE IN ROUGH GROUP

By

Desfan Hafifulloh

The concept of exact sequences has been widely used in ring and module theory. The U-exact sequence and the V-coexact sequence are generalizations of the exact sequence. Beside it, rough set theory has been implemented in several algebraic structures such as groups, rings, modules and others. In this research, a rough V-coexact sequence will be constructed in the rough group and their characteristics. Furthermore, we will give the relationship between the V-coexact sequence in the group and the rough V-coexact sequence in the rough group.

Keywords: Exact sequence, V-coexact sequence, and rough group.

ABSTRAK

KONSTRUKSI BARISAN V-KOEKSAK *ROUGH* PADA GRUP *ROUGH*

Oleh

Desfan Hafifulloh

Konsep barisan eksak telah banyak digunakan secara luas dalam teori ring dan modul. Barisan U-eksak dan barisan V-koeksak merupakan perumuman dari barisan eksak. Selain itu, teori himpunan *rough* telah diimplementasikan pada beberapa struktur aljabar seperti grup, ring, modul dan lain-lain. Pada penelitian ini akan dikonstruksi barisan V-koeksak *rough* pada grup *rough* beserta sifat-sifatnya. Selain itu, akan diberikan kaitan antara barisan V-koeksak pada grup dan barisan V-koeksak *rough* pada grup *rough*.

Kata Kunci: Barisan Eksak, barisan V-koeksak, dan grup *rough*.

KONSTRUKSI BARISAN *V*-KOEKSAK *ROUGH* PADA GRUP *ROUGH*

Oleh

Desfan Hafifulloh

TESIS

Sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar
MAGISTER MATEMATIKA

Pada
Program Studi Magister Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2022

Judul Tesis : **KONSTRUKSI BARISAN *V*-KOEKSAK *ROUGH* PADA GRUP *ROUGH***

Nama Mahasiswa : Desfan Hafifulloh

Nomor Pokok Mahasiswa : 2027031012

Program Studi : Magister Matematika

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.
NIP 19840627 200604 2 001

Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.
NIP 19800206 200312 1 003

2. Ketua Program Studi Magister Matematika

Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.
NIP 19760411 200012 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.** ....

Sekretaris : **Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **1. Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.** ....

2. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si. ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, S.Si., M.T.
NIP 19740705 200003 1 001

3. Direktur Program Pascasarjana

Prof. Dr. Ir. Ahmad Saudi Samosir, S.T., M.T.
NIP 19710415 199803 1 005

4. Tanggal Lulus Ujian Tesis : **02 Agustus 2022**

PERNYATAAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: **Desfan Hafifulloh**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **2027031012**
Program Studi	: **Magister Matematika**
Jurusan	: **Matematika**

Dengan ini menyatakan bahwa tesis saya yang berjudul **"KONSTRUKSI BARISAN *V*-KOEKSAK *ROUGH* PADA GRUP *ROUGH*"** adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa tesis ini merupakan hasil salinan atau telah dibuat orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 02 Agustus 2022
Penulis

Desfan Hafifulloh
NPM. 2027031012

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Desfan Hafifulloh lahir di Wonosobo-Tanggamus pada tanggal 15 Desember 1997, sebagai anak ketiga dari pasangan Bapak Hudawi dan almh. Ibu Fadilah serta adik dari Helnani dan Helvianti. Penulis menempuh pendidikan sekolah dasar di SDN 01 Soponyono pada tahun 2004-2010, kemudian melanjutkan pendidikan menengah pertama di MTSN 01 Tanggamus pada tahun 2010-2013 dan melanjutkan pendidikan menengah atas di SMAN 01 Kota Agung pada tahun 2013-2016.

Pada tahun 2016, Penulis terdaftar sebagai Mahasiswa Program Studi S1 Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur SNMPTN (Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Negeri). Selama menjadi Mahasiswa, Penulis aktif dalam organisasi jurusan yaitu HIMATIKA (Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika) FMIPA Universitas Lampung sebagai Anggota Bidang Keilmuan periode 2017, Ketua Bidang Keilmuan periode 2018, Dewan Pembina Organisasi periode 2019, kemudian aktif organisasi fakultas yaitu ROIS (Rohani Islam) FMIPA Universitas Lampung sebagai anggota Biro Dana dan Usaha periode 2017, aktif sebagai Penggagas dan Mentor Akademik (MAFIA) serta Asisten Dosen selama 2017-2019.

Pada tanggal 03 Januari 2019, Penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Bonglai, Kecamatan Banjit, Kabupaten Way Kanan selama 40 hari. Pada tanggal 01 Juli 2019, Penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Kantor BPJS (Badan Penyelenggara Jaminan Sosial) Kesehatan Cabang Bandar Lampung selama 40 hari.

Pada tanggal 19 Septermber 2020, Penulis dinyatakan lulus dan menyelesaikan Pendidikan S1 dalam Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Pada tanggal 29 September 2020, Penulis melanjutkan Pendidikan Magister di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

KATA MUTIARA

“Ya Tuhanku, sesungguhnya aku sangat membutuhkan setiap kebaikan
yang Engkau turunkan kepadaku”.
(Qs. Al-Qashas: 24)

“Ilmu bukanlah teori yang dihafal, namun yang bermanfaat (diamalkan)
dalam kehidupan”.
(Baihaqi dalam Al Madkhal 516)

“Ingatlah, sesungguhnya pertolongan Allah SWT. itu amat dekat”.
(Qs. Al-Baqarah: 214)

“Allah SWT. takkan melupakan kebaikan yang kau beri, kesusahan orang
lain yang kau atasi, dan mata yang hampir saja menangis lalu kau buat
bahagia. Jadilah orang baik meskipun kau tak diperlakukan baik oleh orang
lain”.
(Prinsip Hidup)

“Kalkulus juga sama halnya dengan yang lain, ia mempunyai perasaan
untuk dimengerti”.
(Desfan Hafifulloh)

“Saya mempunyai mimpi yang berasal dari rumah, dan saya pergi jauh
1000-an (ribuan) mill untuk memperjuangkan apa yang ada dirumah”.
(Desfan Hafifulloh)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillah

Puji dan syukur hanya milik Allah Subhana Wata'ala atas nikmat dan hidayah yang diberikan, sholawat dan salam selalu tercurah kepada Nabi Muhammad Shallahu 'Alaihi Wassallam

kupersembahkan karya kecilku ini untuk:

Keluarga

Abah, almh. Emak dan 2 Teteh tercinta yang selalu mendoakan, berkorban, dan hal lain yang tak dapat diungkapkan dengan kata-kata

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Dosen pembimbing dan penguji yang berjasa dan tidak lelah memberikan arahan serta masukan sehingga tersusunlah skripsi ini

Sahabat dan Teman

Sahabat dan teman-temanku, terimakasih atas kebersamaan, pengalaman, do'a dan semangat yang selalu kalian berikan kepadaku.

Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, segala puji syukur hanya milik Allah Subhanawata'ala yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya, sholawat dan salam selalu tercurah kepada Nabi Muhammad Shallahu'Alaihi Wassallam sehingga tesis ini yang berjudul "Konstruksi Barisan V-Koeksak *Rough* Pada Grup *Rough*" dapat diselesaikan. Dalam menyelesaikan tesis ini, Penulis banyak mendapat pelajaran, dukungan motivasi, pengalaman, bantuan berupa bimbingan yang sangat berharga dari berbagai pihak dan disadari bahwa adanya keterbatasan pengetahuan dan kemampuan yang dimiiki. Oleh karena itu, pada kesempatan baik ini Penulis mengucapkan rasa terima kasih kepada:

1. Abah, almh. Emak dan Teteh yang tidak pernah lelah memberikan do'a, dukungan, kasih sayang, pengorbanan dan motivasi.
2. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc., selaku Dosen Pembimbing utama yang senantiasa memberikan arahan, bantuan, bimbingan serta saran sehingga tersusunlah tesis ini.
3. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc., selaku Dosen Pembimbing kedua yang telah memberikan saran dan bimbingan dalam penyusunan tesis ini.
4. Ibu Prof. Wamiliana, M.A., Ph.D., selaku Dosen Penguji I yang telah memberi pengarahan dan masukan serta saran-saran dalam penyelesaian tesis ini.

5. Ibu Dr. Asmiati, S.Si., M.Si., selaku Dosen Penguji II yang telah memberi pengarahan dan masukan serta saran-saran dalam penyelesaian tesis ini.
6. Ibu Dr. Asmiati, S.Si., M.Si., selaku Ketua Jurusan Program Studi Magister Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
8. Ibu Dr.Fitriani, S.Si., M.Sc., selaku Dosen Pembimbing Akademik.
9. Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, S.Si., M.T., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
10. Prof. Dr. Ahmad Saudi Samosir, S.T., M.T., selaku Direktur Pasca Sarjana Universitas Lampung.
11. Dosen, staf dan karyawan Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung yang telah memberikan bantuan dan panduan dalam penyelesaian administrasi.
12. Teman-teman terbaik WHS & Nge-Badminton, Ananto, Faqih, Danu, Garda, Robby, Syahrul, Riska, Abdi, Aprianto, Isad, Farrel serta teman seperbimbingan Fitri Ayuni yang selalu memberikan keceriaan, kebersamaan, dan menjadi tempat berbagi.
13. Teman-teman Keluarga Keilmuan 2017-2022 dan Keluarga Besar HIMATIKA FMIPA Universitas Lampung.
14. Teman-teman Magister Matematika Angkatan 2020.
15. Mahasiswa Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.
16. Almamater tercinta Universitas Lampung.

17. *Last but not least, I wanna thank me, for believing in me, for doing all this hard work, for having no days off, for never quitting, for just being me at all time.*

Semoga Allah Subhanawata’ala memberikan balasan yang berlipat ganda kepada semua pihak yang telah turut membantu Penulis dalam menyelesaikan tesis ini dan semoga tesis ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Atas kritik dan saran yang diberikan untuk kesempurnaan tesis dengan tulus diucapkan terima kasih.

Bandar Lampung, 02 Agustus 2022
Penulis,

Desfan Hafifulloh

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Barisan eksak merupakan salah satu konsep penting di dalam struktur aljabar. Dalam teori modul, pengembangan konsep barisan eksak digeneralisasi menjadi barisan U-eksak, barisan V-koeksak, dan barisan X-sub-eksak. Dalam teori modul, barisan eksak digunakan dalam mendefinisikan modul proyektif. Pada tahun 1992, Adkins dan Weintraub memperkenalkan barisan Quasi-eksak sebagai generalisasi barisan eksak. Pada penelitian Davvaz dan Parnian-Garamaleky tahun 1999, barisan U-eksak merupakan generalisasi dari barisan eksak, dan mendefinisikan barisan V-koeksak sebagai dual dari barisan U-eksak.

Pada tahun 2002, Anvanriyeh dan Davvaz memberikan hubungan antara barisan U-split dan modul proyektif yang kemudian pada tahun 2005 digunakan dalam memperoleh generalisasi Lemma Schanuel dan memperoleh hubungan antara barisan Quasi-eksak dengan submodul-submodulnya. Selanjutnya, tahun 2015 Sripatmi dan Anwar membahas mengenai perumuman Lemma Snake dan Lemma Lima. Pada tahun 2016, penelitian yang dilakukan oleh Fitriani dkk., mendefinisikan barisan X-sub-eksak sebagai perumuman barisan eksak, pada tahun 2017 menggunakan konsep barisan eksak, definisi himpunan bebas linear X-sub dibangun untuk menggeneralisasi keluarga modul bebas linear, di tahun 2018 memperumum keluarga $\mathcal{U}$-generator menggunakan konsep barisan V-koeksak. Pada tahun yang sama, Fitriani dkk., mendefinisikan konsep $\mathcal{U}_v$-generator dan keluarga independent X-sub linear digunakan dalam membangun basis modul (X, V) dan modul bebas-$\mathcal{U}$.

Teori himpunan *rough* merupakan teknik matematika yang pertama kali diperkenalkan oleh Zdzislaw Pawlak pada tahun 1982. Berbagai penelitian telah banyak dilakukan, seperti penelitian yang dilakukan oleh Han pada tahun 2001, yaitu mempelajari homomorfisma dan isomorfisma pada himpunan *rough*. Kemudian, Miao dkk., pada tahun 2005 mempelajari tentang grup *rough*, subgrup *rough*, dan sifat-sifatnya. Wang dan Chen pada tahun 2010, memperluas penelitiannya dalam bidang terapan yaitu penerapan himpunan *rough* pada bidang komputasi, selanjutnya pada tahun 2014 diperkuat oleh Sinha dan Prakash dalam penelitiannya mengenai modul proyeksi pada himpunan *rough,* serta Neelima dan Isaac membahas mengenai homomorfisma *rough* pada grup *rough.* Berdasarkan penelitian yang sebelumnya, Bagirmaz dan Ozcan pada tahun 2015 mengembangkan teori himpunan *rough* lebih luas lagi yaitu membahas mengenai grup *rough* dan semigrup *rough* dalam ruang aproksimasi. Selanjutnya, Sinha dan Prakash pada tahun 2016, memperkenalkan barisan eksak dari modul *rough* dengan mendefiniskan barisan eksak *rough* dari modul *rough* atas ring *rough*.

Dalam hal penerapan dari teori himpunan *rough*, banyak peneliti yang membahas mengenai penerapan dari teori tersebut dalam cabang ilmu pengetahuan, baik dalam bidang *Data Mining* maupun pada struktur aljabar. Oleh karena itu, pada penelitian ini akan berfokus pada aspek teori dari struktur aljabar dengan topik yang akan dibahas adalah konstruksi barisan V-Koeksak *rough* pada grup *rough*.

1.2 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk mengkonstruksi barisan V-Koeksak *rough* pada grup *rough* dari suatu ruang aproksimasi dan menyelidiki sifat-sifatnya.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini yaitu dapat memberikan referensi penelitian mengenai masalah pada barisan grup *rough* yang lebih jauh lagi, dan sebagai bahan pembelajaran mengenai barisan V-koeksak *rough* pada grup *rough*.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini, akan dibahas mengenai definisi-definisi untuk mendukung teori dan pembahasan dalam menyelesaikan penelitian ini.

2.1 Grup

Sebelum membahas mengenai definisi grup, terlebih dahulu memahami definisi dari operasi biner yang menjadi dasar pembentukan suatu grup. Berikut definisi dari operasi biner.

Definisi 2.1.1 Operasi $*$ pada himpunan G merupakan operasi biner jika operasi $*$ merupakan fungsi $G \times G \to G$. Dengan kata lain, operasi $*$ pada anggota himpunan G adalah operasi biner jika untuk setiap anggota a, b di G maka $(a * b)$ juga di G (Grillet, 2007).

Untuk lebih memahami Definisi 2.1.1, diberikan contoh operasi biner.

Contoh 2.1.2

Diberikan himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ dan operasi $+$ adalah operasi biner pada $\mathbb{R}$. Operasi $+$ dapat dinyatakan sebagai suatu fungsi dari $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, yaitu untuk setiap $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ maka $(a + b) \in \mathbb{R}$, karena penjumlahan dari dua bilangan real menghasilkan bilangan real pula. Dengan kata lain, operasi $+$ tertutup di $\mathbb{R}$.

Setelah memahami definisi dan contoh operasi biner yang menjadi dasar terbentuknya grup, diberikan definisi grup.

Definisi 2.1.3 Himpunan tak kosong G dengan operasi biner $*$, disebut grup $\langle G,*\rangle$ apabila memenuhi aksioma-aksioma berikut:

a. operasi biner $*$ bersifat assosiatif, yaitu $(a*b)*c = a*(b*c)$, untuk setiap $a,b,c \in G$,

b. terdapat elemen identitas $e \in G$ untuk $*$ pada G, sedemikian sehingga $e*x = x*e = x$, untuk setiap $x \in G$,

c. untuk setiap $a \in G$, terdapat suatu elemen $a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$, (a^{-1} adalah invers a di G) (Roman, 2005).

Untuk memahami Definisi 2.1.3, berikut ini contoh dari suatu grup beserta pembuktiannya.

Contoh 2.1.4

Diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dengan operasi biner $x*y = x+y-1$ untuk setiap $x,y \in \mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan bahwa $\langle \mathbb{Z},*\rangle$ merupakan grup.

1. Untuk setiap $x,y,z \in \mathbb{Z}$ berlaku:

$$\begin{aligned} x*(y*z) = x*y*z \\ &= x*(y+z-1) \\ &= x+(y+z-1)-1 \\ &= (x+y-1)+z-1 \\ &= (x*y)+z-1 \\ &= (x*y)*z. \end{aligned}$$

Karena $x * (y * z) = (x * y) * z$, sehingga operasi $*$ pada $\mathbb{Z}$ bersifat assosiatif.

2. Terdapat $e \in \mathbb{Z}$, sehingga untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$ berlaku:

$$x * e = x + e - 1 = x + 1 - 1 = x,$$

dan

$$e * x = e + x - 1 = 1 + x - 1 = x.$$

Jadi, $\langle \mathbb{Z}, * \rangle$ memiliki identitas yaitu 1.

3. Diberikan sebarang $x \in \mathbb{Z}$. Terdapat $x^{-1} = 2 - x \in \mathbb{Z}$, sehingga berlaku:

$$x * x^{-1} = x * 2 - x = x + (2 - x) - 1 = (x - x) + 2 - 1 = 1 = e,$$

dan

$$x^{-1} * x = 2 - x * x = (2 - x) + x - 1 = 2 - 1 + (-x + x) = 1 = e.$$

Jadi, setiap $x \in \mathbb{Z}$, terdapat $x^{-1} = 2 - x$ sehingga $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$.

Karena memenuhi aksioma-aksioma grup, terbukti $\langle \mathbb{Z}, * \rangle$ merupakan grup.

Berdasarkan sifat komutatif operasi biner dari suatu grup, berikut diberikan definisi grup komutatif.

Definisi 2.1.5 Grup G dikatakan komutatif jika operasi biner $*$ bersifat komutatif yaitu $a * b = b * a$; untuk setiap $a, b \in G$ (Fraleigh dan Katz, 2003).

Untuk memahami Definisi 2.1.5, berikut diberikan contoh grup komutatif.

Contoh 2.1.6

Berdasarkan Contoh 2.1.4, akan ditunjukkan bahwa $\langle \mathbb{Z}, * \rangle$ merupakan grup komutatif.

Diberikan sebarang $x, y \in \mathbb{Z}$,

$$x * y = x + y - 1 = y + x - 1 = y * x.$$

Jadi, $x * y = y * x$, untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$.

Dengan demikian, terbukti operasi $*$ bersifat komutatif, sehingga $\langle \mathbb{Z}, * \rangle$ merupakan grup komutatif.

Setelah dibahas mengenai definisi dan contoh mengenai grup dan grup komutatif, berikut diberikan definisi dari subgrup.

Definisi 2.1.7 Himpunan bagian tak kosong H dari suatu grup G dikatakan sebagai subgrup dari G, jika H membentuk grup terhadap operasi yang sama pada grup G (Herstein, 1975).

Berikut diberikan teorema subgrup.

Teorema 2.1.8 Diberikan suatu grup G. Misalkan H adalah himpunan bagian tak kosong dari G. H adalah subgrup dari G jika hanya jika untuk setiap $a, b \in H$ berlaku $ab^{-1} \in H$ (Suwilo dkk., 1997).

Bukti

Diberikan H subgrup dari G. Akan ditunjukkan untuk setiap $a, b \in H$ berlaku $ab^{-1} \in H$. Untuk setiap $a, b \in H$, maka $b^{-1} \in H$. Dengan demikian, $ab^{-1} \in H$. Sebaliknya, akan ditunjukkan untuk setiap $a, b \in H$ berlaku $ab^{-1} \in H$, maka H subgrup dari G.

a. Karen $H \neq \emptyset$, maka sedikitnya terdapat $a \in H$. Akibatnya, diperoleh $aa^{-1} = e \in H$. Dengan demikian, H memiliki elemen identitas.

b. Diberikan sebarang $e, a \in H$, maka $ea^{-1} \in H$. Oleh karena itu, diperoleh $ea^{-1} = a^{-1} \in H$. Dengan demikian, untuk setiap elemen di H memiliki invers.

c. Diberikan sebarang $a, b \in H$, maka $a^{-1}, b^{-1} \in H$. Oleh karena itu, diperoleh $ab = a(b^{-1})^{-1}$. Karena $b^{-1} \in H$, maka $ab = a(b^{-1})^{-1} \in H$. Dengan demikian, H tertutup terhadap operasi biner di G.

d. Karena G grup, operasi biner memenuhi sifat assosiatif. Selanjutnya $H \subseteq G$ berakibat operasi biner tersebut juga assosiatif di H.

Jadi, terbukti bahwa himpunan H merupakan subgrup dari G. ■

Setelah memahami Definisi 2.1.8 dan Teorema 2.1.9, berikut diberikan contoh subgrup.

Contoh 2.1.9

Diberikan grup $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$. Akan ditunjukkan jika $7\mathbb{Z} = \{7n | n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}$, maka $\langle 7\mathbb{Z}, + \rangle$ merupakan subgrup $\mathbb{Z}$.

1. Karena $0 \in 7\mathbb{Z}$, akibatnya $7\mathbb{Z} \neq \emptyset$.
2. Diberikan sebarang $x, y \in 7\mathbb{Z}$, maka $x = 7n_1$ dan $y = 7n_2$ untuk suatu $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Akibatnya,

$$
\begin{aligned}
x - y &= 7n_1 - 7n_2 \\
&= 7(n_1 - n_2) \in 7\mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

Berdasarkan Teorema 2.1.8, terbukti $7\mathbb{Z}$ merupakan subgrup $\mathbb{Z}$.

Setelah memahami definisi dari grup dan subgrup, selanjutnya diberikan definisi koset kiri dan koset kanan dari subgrup H di grup G.

Definisi 2.1.10 Diberikan grup $\langle G, * \rangle$ dan subgrup H di G. Untuk setiap $a \in G$, himpunan $Ha = \{h * a | h \in H\}$ disebut koset kanan H di G dan himpunan $aH = \{a * h | h \in H\}$ disebut koset kiri H di G (Gallian, 2010).

Berikut diberikan contoh koset kiri dan koset kanan.

Contoh 2.1.11

Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$ dengan definisi operasi penjumlahan modulo 6 yaitu $(+_6)$, sedemikian sehingga $\langle \mathbb{Z}_6, +_6 \rangle$ membentuk grup. Himpunan $H = \{\overline{0}, \overline{3}\}$ merupakan subgrup dari grup $\mathbb{Z}_6$.

Koset-koset kanan dari H di $\mathbb{Z}_6$ yaitu sebagai berikut:

$H(+_6)\overline{0} = H(+_6)\overline{3} = \{\overline{0}, \overline{3}\}$,

$H(+_6)\overline{1} = H(+_6)\overline{4} = \{\overline{1}, \overline{4}\}$,

$H(+_6)2 = H(+_6)\overline{5} = \{\overline{2}, \overline{5}\}$.

Koset-koset kanan dari H di $\mathbb{Z}_6$ yaitu sebagai berikut:

$\overline{0}(+_6)H = \overline{3}(+_6)H = \{\overline{0}, \overline{3}\}$,

$\overline{1}(+_6)H = \overline{4}(+_6)H = \{\overline{1}, \overline{4}\}$,

$\overline{2}(+_6)H = \overline{5}(+_6)H = \{\overline{2}, \overline{5}\}$.

2.2 Himpunan *Rough*

Sebelum membahas mengenai himpunan rough¸terlebih dahulu diberikan definisi dari relasi ekuivalensi.

2.2.1 Relasi Ekuivalensi

Berikut diberikan definisi relasi ekuivalensi.

Definisi 2.2.1.1 Relasi R pada himpunan A dikatakan relasi ekuivalensi jika dan hanya jika:

1. relasi R bersifat reflekstif, jika dan hanya jika aRa untuk setiap $a \in A$,
2. relasi R bersifat simetris, jika dan hanya jika aRb berakibat bRa, untuk setiap $a, b \in A$,
3. relasi R bersifat transitif, jika dan hanya jika aRb dan bRc berakibat aRc, untuk setiap $a, b \in A$. (Barnier dan Feldman, 1990).

Untuk memahami Definisi 2.2.1.1, berikut diberikan contoh relasi ekuivalensi.

Contoh 2.2.1.2 Diberikan himpunan $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, didefinisikan relasi $R = \{(x, y) | x \equiv y (\text{mod } 3)\}$, (yaitu $a - b$ habis dibagi dengan 3) dengan $x, y \in A$ jika dan hanya jika $x - y = 3k; k \in \mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan relasi R merupakan relasi ekuivalensi pada $\mathbb{Z}$.

1. Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$, berlaku $a - a = 0 = kn$ untuk bilangan bulat $k = 0$. Akibatnya aRa. Jadi, relasi R bersifat reflekstif.
2. Diberikan sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$ dengan aRb. Akan ditunjukkan bRa. aRb berakibat $a \equiv b (\text{mod } n)$ atau $b - a = kn$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$. Oleh karena itu, $a - b = -kn$, sehingga $b \equiv a (\text{mod } n)$. Hal ini berarti bRa. Jadi, R bersifat simetris.
3. Diberikan sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}$, dengan aRb dan bRc. Akan ditunjukkan aRc. aRb berakibat $a \equiv b (\text{mod } n)$ atau $b - a = kn$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$, dan bRc

berakibat $b \equiv c(\text{mod } n)$ atau $c - b = mn$ untuk suatu $m \in \mathbb{Z}$. Oleh karena itu, $a \equiv c(\text{mod } n)$ atau $(a - c) = (b - a) + (c - b) \in \mathbb{Z}$. Hal ini berarti aRc. Jadi, relasi R bersifat transitif.

Dengan demikian, berdasarkan tiga sifat yang telah terpenuhi, maka relasi R merupakan relasi ekuivalensi.

2.2.2 Kelas Ekuivalensi

Berikut diberikan definisi kelas ekuivalensi.

Definisi 2.2.2.1 Diberikan relasi R maerupakan relasi ekuivalensi pada himpunan A, kelas ekuivalensi dari $a \in A$ ditulis sebagai berikut:

$$[a]_R = \{x | x \in A \text{ dan } aRx\} \tag{2.1}$$

yaitu semua anggota dalam himpunan A yang mempunyai relasi dengan a (Barnier dan Feldman, 1990).

Untuk memahami Definisi 2.2.2.1, berikut diberikan contoh kelas ekuivalensi.

Contoh 2.2.2.2

Berdasarkan Contoh 2.2.1.2, diketahui bahwa R merupakan relasi ekuivalensi, sehingga diperoleh kelas ekuivalensi adalah $[1]_R = [4]_R = [7]_R = [10]_R = \{1,4,7,10\}, [2]_R = [5]_R = [8]_R = \{2,5,8\}, [3]_R = [6]_R = [9]_R = \{3,6,9\}$.

2.2.3 Ruang Aproksimasi

Setelah memahami definisi dan contoh mengenai relasi ekuivalensi dan kelas ekuivalensi, selanjutnya dibahas definisi dari ruang aproksimasi.

Definisi 2.2.3.1 Pasangan (U, θ) dengan $U \neq \emptyset$ dan θ merupakan relasi ekuivalensi pada U disebut ruang aproksimasi (Pawlak, 1991).

Untuk memahami Definisi 2.2.3.1, berikut akan diberikan contoh dari ruang aproksimasi.

Contoh 2.2.3.2

Berdasarkan Contoh 2.2.1.2, Pasangan (A, R) merupakan ruang aproksimasi, dengan himpunan $A \neq \emptyset$ dan relasi R merupakan relasi ekuivalensi.

2.2.4 Aproksimasi Atas dan Aproksimasi Bawah

Selanjutnya diberikan definisi ruang aproksimasi yaitu aproksimasi atas dan aproksimasi bawah.

Definisi 2.2.4.1 Diberikan ruang aproksimasi $K = (U, R)$, dan X merupakan himpunan bagian dari semesta U. Aproksimasi atas dan aproksimasi bawah dituliskan sebagai berikut:

$$\overline{X} = \{x | [x]_R \cap X \neq \emptyset\} \tag{2.2}$$

$$\underline{X} = \{x | [x]_R \subseteq X\} \tag{2.3}$$

$\overline{X}$ disebut aproksimasi atas dari X dan $\underline{X}$ disebut aproksimasi bawah dari X di ruang aproksimasi K (Miao dkk., 2005).

Untuk memahami Definisi 2.2.4.1, berikut diberikan contoh dari aproksimasi atas dan aproksimasi bawah.

Contoh 2.2.4.2

Diberikan ruang aproksimasi (U, R), dengan himpunan $U = \{x_1, x_2, \dots, x_{10}\}$ dan R relasi ekuivalensi pada U dengan kelas ekuivalensi sebagai berikut:

$E_1 = \{x_1\}$,

$E_2 = \{x_2, x_3, x_4\}$,

$E_3 = \{x_5, x_6\}$,

$E_4 = \{x_7, x_8, x_9\}$,

$E_5 = \{x_{10}\}$.

Jika dipilih $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, maka aproksimasi bawah dan aproksimasi atas dari X adalah sebagai berikut:

$\underline{X} = E_1 \cup E_2 = \{x_1\} \cup \{x_2, x_3, x_4\}$,

$\overline{X} = E_1 \cup E_2 \cup E_3 = \{x_1\} \cup \{x_2, x_3, x_4\} \cup \{x_5, x_6\}$.

Setelah memahami definisi ruang aproksimasi, aproksimasi atas dan bawah, selanjutnya diberikan definisi himpunan *rough*.

Definisi 2.2.4.3 Diberikan relasi ekuivalensi R pada himpunan semesta U, pasangan (U, R) merupakan ruang aproksimasi. Suatu himpunan bagian $X \subseteq U$ dapat didefinisikan $\overline{X} - \underline{X} \neq \emptyset$ sehingga X disebut himpunan *rough* (Pawlak, 1982).

Untuk memahami Definisi 2.2.4.3, berikut diberikan contoh dari himpunan *rough*.

Contoh 2.2.4.4

Berdasarkan Contoh 2.2.4.2 pasangan berurutan dari aproksimasi bawah dan aproksimasi atas dari X yaitu $Apr(X) = (\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\})$

Karena $\overline{X} - \underline{X} \neq \emptyset$, diperoleh X merupakan himpunan *rough* dalam ruang aproksimasi (U, R).

Berikut diberikan proposisi mengenai himpunan *rough.*

Proposisi 2.2.4.5 Diberikan himpunan $X, Y \subset U$. Berlaku sifat-sifat sebagai berikut:

1. $\underline{X} \subset X \subset \overline{X}$,
2. $\underline{R} = \overline{R} = R, \underline{U} = \overline{U} = U$,
3. $\underline{X \cap Y} = \underline{X} \cap \underline{Y}$,
4. $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$,
5. $\underline{X} \cup \underline{Y} \subset \underline{X \cup Y}$,
6. $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$,
7. $X \subset Y$ jika dan hanya jika $\overline{X} \subset \overline{Y}$ dan $\underline{X} \subset \underline{Y}$ (Isaac dan Neelima, 2013).

Bukti

1. Jika $x \in \underline{X}$, $x \in [x]_R \subset X$. Akibatnya, $X \subset \underline{X}$.
   Selanjutnya, jika $x \in X$ maka dari $x \in [x]_R$, diperoleh $[x]_R \cap X \neq \emptyset$ sehingga $x \in \overline{X}$. Jadi $X \subset \overline{X}$.
2. Jika $\underline{X} = X$, dengan $X \subset U$ dan $U \neq \emptyset$, maka $\underline{\emptyset} = \emptyset$ dan $\underline{U} = U$.
3. $x \in \underline{X \cap Y} \Leftrightarrow [x]_R \subset (X \cap Y)$
   $$\Leftrightarrow [x]_R \subset X \text{ dan } [x]_R \subset Y$$
   $$\Leftrightarrow [x]_R \in \underline{X} \text{ dan } [x]_R \in \underline{Y}$$
   $$\Leftrightarrow x \in X \cap x \in Y.$$
   Jadi, $\underline{X \cap Y} = \underline{X} \cap \underline{Y}$.
4. Jika $X \cap Y \subset X$ dan $X \cap Y \subset Y$ maka
   $$\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \text{ dan } \overline{X \cap Y} \subset \overline{Y}$$

akibatnya

$$\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}.$$

5. Jika $X \subset X \cup Y$ dan $Y \subset X \cup Y$ maka

$$\underline{X} \subset \underline{X \cup Y} \text{ dan } \underline{Y} \subset \underline{X \cup Y}$$

akibatnya

$$\underline{X} \cup \underline{Y} \subset \underline{X \cup Y}.$$

6. $x \in \overline{X \cup Y} \Leftrightarrow [x]_R \subset (X \cup Y) \neq \emptyset$

$\Leftrightarrow ([x]_R \cap X) \cup ([x]_R \cap Y) \neq \emptyset$

$\Leftrightarrow [x]_R \cap X$ atau $[x]_R \cap Y \neq \emptyset$

$\Leftrightarrow [x]_R \cap X \neq \emptyset$ atau $[x]_R \cap Y \neq \emptyset$

$\Leftrightarrow x \in \overline{X} \cup \overline{Y}$.

Jadi, $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$.

7. Diketahui $X \subset Y$ jika dan hanya jika $\overline{X} \subset \overline{Y}$ dan $\underline{X} \subset \underline{Y}$

Berdasarkan 4, terbukti

$$\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y},$$

Berdasarkan 5, terbukti

$$\underline{X} \cup \underline{Y} \subset \underline{X \cup Y}$$

akibatnya

$$X \subset Y \Leftrightarrow \overline{X} \subset \overline{Y} \text{ dan } \underline{X} \subset \underline{Y} \text{ (Kuroki, 1997).}$$ ■

Berikut diberikan contoh Proposisi 2.2.4.5.

Contoh 2.2.4.6

Diberikan himpunan tak kosong $A = \mathbb{Z}_{20}$, dan relasi R merupakan relasi ekuivalensi pada himpunan A dengan definisi untuk setiap $x, y \in A$ berlaku xRy jika dan hanya jika $x - y$ habis dibagi 1. Berikut kelas-kelas ekuivalensi untuk $A = \mathbb{Z}_{20}$ sebagai berikut:

$E_1 = \{0,1,2,3,4,5\}$,

$E_2 = \{6,7,8\}$,

$E_3 = \{9,10,11,12,13\}$,

$E_4 = \{14,15,16,17\}$,

$E_5 = \{18,19\}$.

Diberikan $X = \{6,7,12,13,14,15,16,17\}$ dan $Y = \{6,7,8,9,10,11,14,15,16,17\}$, sehingga aproksimasi atas dan aproksimasi bawah dari himpunan X dan himpunan Y sebagai berikut:

$\overline{X} = E_2 \cup E_3 \cup E_4 = \{6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17\}$,
$\underline{X} = E_4 = \{14,15,16,17\}$,
$\overline{Y} = E_2 \cup E_3 \cup E_4 = \{6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17\}$,
$\underline{Y} = E_2 \cup E_4 = \{6,7,8,14,15,16,17\}$.

Selanjutnya, akan diberikan contoh untuk sifat-sifat pada Proposisi 2.2.4.5

1. Diketahui $X = \{6,7,12,13,14,15,16,17\}$,

   $\overline{X} = \{6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,\}$,

   $\underline{X} = \{14,15,16,17\}$.

   Jadi, $\underline{X} \subseteq X \subseteq \overline{X}$.

2. Diketahui $A = \mathbb{Z}_{20}$,

   $\overline{A} = \mathbb{Z}_{20}$,

   $\underline{A} = \mathbb{Z}_{20}$.

   Jadi, $\underline{A} = \overline{A} = A$.

3. Diketahui $X = \{6,7,12,13,14,15,16,17\}$, dan

   $Y = \{6,7,8,9,10,11,14,15,16,17\}$,

   $X \cap Y = \{6,7,14,15,16,17\}$,

   $\underline{X \cap Y} = \{14,15,16,17\}$,

$\underline{X} \cap \underline{Y} = \{14,15,16,17\}$.

Jadi, $\underline{X \cap Y} = \underline{X} \cap \underline{Y}$.

4. Diketahui $X = \{6,7,12,13,14,15,16,17\}$, dan

   $Y = \{6,7,8,9,10,11,14,15,16,17\}$.

   $X \cup Y = \{6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17\}$,

   $\overline{X \cup Y} = \{6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17\}$, dan

   $\overline{X} \cup \overline{Y} = \{6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17\}$.

   Jadi, $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$.

5. Diketahui $X = \{6,7,12,13,14,15,16,17\}$, dan

   $Y = \{6,7,8,9,10,11,14,15,16,17\}$ sehingga $X \subseteq Y$, diperoleh $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$ yaitu

   $\{6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17\} \subseteq \{6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17\}$,

   $\underline{X} \subseteq \underline{Y}$ yaitu $\{14,15,16,17\} \subseteq \{6,7,814,15,16,17\}$.

   Jadi, $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$ dan $\underline{X} \subseteq \underline{Y}$

6. Diketahui $X = \{6,7,12,13,14,15,16,17\}$, dan

   $Y = \{6,7,8,9,10,11,14,15,16,17\}$,

   $X \cup Y = \{6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17\}$,

   $\underline{X \cup Y} = \{6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17\}$,

   $\underline{X} \cup \underline{Y} = \{6,7,8,14,15,16,17\}$,

   Jadi, $\underline{X} \cup \underline{Y} \subseteq \underline{X \cup Y}$.

7. Diketahui $X = \{6,7,12,13,14,15,16,17\}$, dan

   $Y = \{6,7,8,9,10,11,14,15,16,17\}$,

   $X \cap Y = \{6,7,14,15,16,17\}$,

   $\overline{X \cap Y} = \{6,7,8,14,15,16,17\}$,

$\overline{X} \cap \overline{Y} = \{6,7,8,9,10,11,14,15,16,17\}$.

Jadi, $\overline{X \cap Y} \subseteq \overline{X} \cap \overline{Y}$.

2.3 Grup *Rough*

Setelah membahas himpunan *rough*, berikut diberikan definisi grup *rough*.

Definisi 2.3.1 Diberikan ruang aproksimasi $K = (U, R)$ dan $*$ adalah operasi biner dari U. Himpunan bagian G dari himpunan semesta U disebut grup *rough* jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. untuk setiap $x, y \in G, x * y \in \overline{G}$,
2. untuk setiap $x, y, z \in G, (x * y) * z = x * (y * z)$ terpenuhi di $\overline{G}$ (berlaku sifat asosiatif di $\overline{G}$),
3. terdapat $e \in \overline{G}$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in G, x * e = e * x = x; e$ disebut elemen identitas *rough* di G,
4. untuk setiap $x \in G$, terdapat $y \in G$ sedemikian sehingga $x * y = y * x = y; y$ disebut elemen invers *rough* dari x di G (Miao dkk., 2005).

Selanjutnya diberikan contoh grup *rough*.

Contoh 2.3.2 (Miao, dkk., 2005)

Diberikan himpunan kelas modulo $\mathbb{Z}_9 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}\}$ dengan operasi $+_9$. Kelas-kelas ekuivalensi $\mathbb{Z}_9$ sebagai berikut:

$E_1 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$,

$E_2 = \{\overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$,

$E_3 = \{\overline{6}, \overline{7}, \overline{8}\}$.

Diberikan $X_1 = \{\overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{7}\}$,

$\overline{X_1} = \mathbb{Z}_9$.

Akan ditunjukkan X_1 merupakan grup *rough*.

1. untuk setiap $x, y \in X_1, x(+_9)y \in \overline{X_1}$,
2. operasi $+_9$ bersifat assosiatif di $\overline{X_1}$,
3. terdapat $\overline{0} \in \overline{X_1}$, sehingga $\overline{2}(+_9)\overline{0} = \overline{0}(+_9)\overline{2} = \overline{2}$,
4. untuk setiap $\overline{x} \in X_1$, terdapat $\overline{y} \in X_1$ sehingga $\overline{x}(+_9)\overline{y} = \overline{0}$ atau $\overline{y} = (\overline{x})^{-1}$, yaitu $\left(\overline{2}\right)^{-1} = \overline{7} \in X_1, \left(\overline{7}\right)^{-1} = \overline{2} \in X_1, \left(\overline{5}\right)^{-1} = \overline{4} \in X_1$, dan $\left(\overline{7}\right)^{-1} = \overline{5} \in X_1$.

Jadi, X_1 merupakan grup *rough*.

Selanjutnya, diberikan definisi subgrup pada himpunan *rough*.

Definisi 2.3.3 Suatu himpunan bagian tak kosong H dari grup *rough* $\langle G,*\rangle$ dikatakan subgrup *rough* dari G jika H merupakan grup *rough* dengan operasi biner $*$ yang sama pada G (Miao dkk., 2005).

Berikut diberikan definisi lain dari subgrup pada himpunan *rough*.

Definisi 2.3.4 Jika $H \subseteq G \subseteq U$, dengan $H \neq \emptyset$ dan $(Apr(H),*)$ grup *rough*, maka $Apr(H)$ merupakan subgrup *rough* dari $Apr(G) = \left(\underline{G}, \overline{G}\right)$ dinotasikan dengan $Apr(H) \leq Apr(G)$ (Miao dkk., 2005).

Berikut diberikan contoh subgrup *rough*.

Contoh 2.3.5

Berdasarkan Contoh 2.3.2, misalkan $X_2 = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{7}, \overline{8}\}$, diberikan

$X_3 = X_1 \cup X_2 = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{8}\}$,

$\overline{X_3} = \mathbb{Z}_9$.

Akan ditunjukkan X_3 merupakan subgrup *rough* dari grup *rough* $X_1 \cup X_2$.

1. Untuk setiap $x, y \in X_3, \overline{2}(+_9)\overline{5} \in \overline{X_3}$,
2. untuk setiap elemen di X_3, terdapat elemen invers *rough* yaitu:

   $(\overline{1})^{-1} = (\overline{8}) \in X_3, (\overline{2})^{-1} = \overline{7} \in X_3, (\overline{4})^{-1} = (\overline{5}) \in X_3, (\overline{5})^{-1} = (\overline{4}) \in X_3, (\overline{7})^{-1} = (\overline{2}) \in X_3$, dan $(\overline{8})^{-1} = (\overline{8}) \in X_3$

Jadi, X_3 merupakan subgrup *rough* dari grup *rough* $X_1 \cup X_2$.

2.4 Homomorfisma dan Isomorfisma dari Grup *Rough*

Sebelum membahas homomorfisma dan isomorfisma dari grup *rough*, terlebih dahulu akan diberikan definisi homomorfisma grup.

Definisi 2.4.1 Diberikan grup $\langle G, * \rangle$ dan $\langle H, \circ \rangle$. Pemetaan $\phi: G \to H$ dikatakan homomorfisma jika berlaku $\phi(x * y) = \phi(x) \circ \phi(y)$, untuk setiap $x, y \in G$ (Dummit dan Foote, 2004).

Berikut diberikan contoh mengenai Definisi 2.4.1.

Contoh 2.4.2

Diberikan grup $\langle G,*\rangle$ dan $\langle H,\circ\rangle$. Pemetaan $\phi: G \to H$ dengan $\phi(x) = 7^a$.

Akan ditunjukkan bahwa ϕ merupakan homomorfisma grup dari G ke H.

Diberikan sebarang $a, b \in G$,

$$\phi(a * b) = 7^{a+b} = 7^a.7^b = \phi(a).\phi(b).$$

Oleh karena untuk setiap $a, b \in G$, berlaku $\phi(a * b) = \phi(a).\phi(b)$.

Jadi, ϕ merupakan homomorfisma grup dari G ke H.

Setelah memahami definisi homomorfisma dari suatu grup, berikut definisi *kernel.*

Definisi 2.4.3 Diberikan homomorfisma grup $\phi: G \to G_1$, *kernel* dari ϕ dinotasikan $\ker(\phi)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\ker(\phi) = \{a \in G | \phi(a) = e_1\} \tag{2.4}$$

dengan e_1 merupakan elemen identitas pada G_1 (Gallian, 2010).

Selanjutnya, diberikan contoh mengenai *kernel* dari suatu homomorfisma grup.

Contoh 2.4.4

Diberikan grup G_1 adalah $(\mathbb{Z}, +)$ dan grup G_2 adalah $\langle R\backslash\{0\}, .\rangle$ dengan fungsi $f: G_1 \to G_2$ yaitu $f(x) = 2^x$. Akan ditentukan $\ker(f)$. Sebelum itu akan ditunjukkan $f: G_1 \to G_2$ merupakan homomorfisma grup $f(a + b) = f(a).f(b)$.

Diberikan sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$

$$f(a + b) = 2^{a+b} = 2^a.2^b = f(a).f(b).$$

Jadi, $f(a+b) = f(a).f(b)$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$. Oleh karena itu, terbukti f merupakan homomorfisma grup dari $\mathbb{Z}$ ke $R\backslash\{0\}$.

Selanjutnya akan ditentukan $\ker(f)$.

$$\ker(f) = \{a \in \mathbb{Z} | f(a) = 1\} = \{a \in \mathbb{Z} | 2^x = 1\} = \{0\}.$$

Jadi, ker $(f) = \{0\}$.

Setelah memahami definisi dan contoh *kernel* dari suatu homomorfisma, selanjutnya diberikan definisi mengenai *image* dari suatu homorfisma.

Definisi 2.4.5 Diberikan homomorfisma grup $\phi: G \to G_1$. Himpunan semua anggota dari G_1 yang memiliki kawan di G disebut peta atau bayangan dari G oleh ϕ, dinotasikan $\mathrm{im}(\phi)$ yaitu:

$$\mathrm{im}(\phi) = \{y \in G_1 | (\exists x \in G)\phi(x) = y\} = \{\phi(x) | x \in G\} \tag{2.5}$$

(Gallian, 2010).

Selanjutnya, diberikan contoh mengenai *image* dari suatu homomorfisma grup.

Contoh 2.4.6

Berdasarkan Contoh 2.4.4, maka *image* dari f adalah:

$\mathrm{im}(f) = \{f(x) | x \in \mathbb{Z}\}$,

$= \{2^x | x \in \mathbb{Z}\}$,

$= \left\{\frac{\ln(x)}{\ln(2)} | x \in \mathbb{Z}\right\} \subseteq R\backslash\{0\}$.

Jadi, $\mathrm{im}(f) = \left\{\frac{\ln(x)}{\ln(2)}\right\}$.

Berikut definisi homomorfisma dan isomorfisma dari grup *rough*.

Definisi 2.4.7 Diberikan ruang aproksimasi $(U_1,\theta_1), (U_2,\theta_2)$, dan operasi biner $*$ pada U_1, $\bar{*}$ operasi biner pada U_2. Misalkan himpunan $G_1 \subseteq U_1$ dan $G_2 \subseteq U_2$ merupakan grup *rough*. G_1, G_2 dikatakan homomorfisma himpunan *rough* jika terdapat pemetaan surjektif $\phi: \overline{G_1} \to \overline{G_2}$ sedemikian sehingga untuk setiap $x, y \in \overline{G_1}$ berlaku $\phi(x * y) = \phi(x) \mathbin{\bar{*}} \phi(y)$. Jika ϕ pemetaan injektif, maka disebut isomorfisma himpunan *rough* (Miao, dkk., 2005).

2.5 Modul Atas Ring *R*

Berikut diberikan definisi modul atas ring R.

Definisi 2.5.1 Diberikan R sebarang ring dengan unsur satuan. Grup komutatif M disebut modul (kiri) atas R dengan operasi:

$$R \times M \to M \tag{2.6}$$

$$(r, m) \to r \times m = rm \tag{2.7}$$

jika m, n di M dan untuk setiap r, s di R berlaku:

1. $r(m + n) = rm + rn$,
2. $(r + s)m = rm + sm$,
3. $(rs)m = r(sm)$,
4. $1(m) = m$, dengan 1 adalah unsur satuan di R.

Jika M modul atas R, biasanya ditulis dengan M R-modul atau disebut saja M modul atas R (Yanita, 2007).

Berikut diberikan contoh suatu modul atas ring R.

Contoh 2.5.2 Diberikan sebarang ring R, akan ditunjukkan grup komutatif R^n merupakan modul kiri atas R terhadap operasi pergandaan skalar:

$$a(r_1, r_2, \dots, r_n) = (ar_1, ar_2, \dots, ar_n)$$

untuk setiap $a \in R$ dan $(r_1, r_2, \dots, r_n) \in R^n$.

Untuk setiap $a, b \in R$ dan $(r_1, r_2, \dots, r_n), (s_1, s_2, \dots, s_n) \in R^n$ berlaku:

a. $a\big((r_1, r_2, \dots, r_n) + (s_1, s_2, \dots, s_n)\big) = a(r_1 + s_1, r_2 + s_2, \dots, r_n + s_n)$
$= (ar_1 + as_1, ar_2 + as_2, \dots, ar_n + as_n)$
$= (ar_1, ar_2, \dots, ar_n) + (as_1, as_2, \dots, as_n)$
$= a(r_1, r_2, \dots, r_n) + a(s_1, s_2, \dots, s_n)$,

b. $(ab)(r_1, r_2, \dots, r_n) = ((ab)r_1, (ab)r_2, \dots, (ab)r_n)$
$= (a(b)r_1, a(b)r_2, \dots, a(b)r_n)$
$= a(br_1, br_2, \dots, br_n)$
$= a\big(b(r_1, r_2, \dots, r_n)\big)$,

c. $(a + b)(r_1, r_2, \dots, r_n) = ((a + b)r_1, (a + b)r_2, \dots, (a + b)r_n)$
$= (ar_1 + br_1, ar_2 + br_2, \dots, ar_n + br_n)$
$= (ar_1, ar_2, \dots, ar_n) + (br_1, br_2, \dots, br_n)$
$= a(r_1, r_2, \dots, r_n) + b(r_1, r_2, \dots, r_n)$,

d. $1(r_1, r_2, \dots, r_n) = (1r_1, 1r_2, \dots, 1r_n)$
$= (r_1, r_2, \dots, r_n)$.

Jadi, R^n merupakan modul kiri atas R.

Setelah memahami modul atas ring R, selanjutnya diberikan definisi mengenai submodul dari suatu modul.

Definisi 2.5.3 Diberikan M modul atas ring R. Submodul dari M adalah himpunan S dengan $S \neq \emptyset$ jika:

1. $(S, +)$. merupakan grup komutatif terhadap operasi "+", yaitu S merupakan sub grup di $(M, +)$.
2. Berlaku operasi pergandaan skalar pada modul M yaitu:
   a. $s_1 - s_2 \in S$, untuk setiap $s_1, s_2 \in S$,
   b. $rs \in S$, untuk setiap $r \in R, s \in S$ (Hartley, 1970).

Berikut diberikan contoh submodul dari suatu modul.

Contoh 2.5.4

Diberikan modul $\mathbb{Z}$ atas $\mathbb{Z}$, diberikan himpunan $n\mathbb{Z} = \{na | a \in Z\}$ dengan $n \in N$. Akan ditunjukkan himpunan $n\mathbb{Z}$ merupakan submodul $\mathbb{Z}$ atas $\mathbb{Z}$.

a. Akan ditunjukkan bahwa $n\mathbb{Z} \neq \emptyset$, karena $0 \in \mathbb{Z}$, dan $0 = n.0 \in n\mathbb{Z}$ sehingga diperoleh $n\mathbb{Z} \neq \emptyset$.

b. Diberikan sebarang $na, nb \in n\mathbb{Z}$, sehingga

   $na - nb = n(a - b) \in n\mathbb{Z}$.

c. Diberikan sebarang $r \in \mathbb{Z}, na \in n\mathbb{Z}$, sehingga

   $r(na) = n(ra) \in n\mathbb{Z}, ra \in \mathbb{Z}$.

Jadi, $n\mathbb{Z}$ tertutup terhadap operasi pergandaan skalar di $\mathbb{Z}$. Sehingga $n\mathbb{Z}$ submodul $\mathbb{Z}$ atas $\mathbb{Z}$.

Berikut diberikan definisi homomorfisma pada modul atas R.

Definisi 2.5.5 Diberikan ring R dengan unsur satuan dan M, N adalah R-modul. Suatu fungsi $f: M \to N$ disebut homomorfisma R -modul jika:

1. $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$, untuk $m_1, m_2 \in M$,
2. $f(rm_1) = rf(m_1)$, untuk setiap a di R dan untuk setiap m di M (Yanita, 2007).

Berikut diberikan contoh homomorfisma modul atas R.

Contoh 2.5.6

Diberikan modul $\mathbb{Z}$ atas ring $\mathbb{Z}$, didefinisikan $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $f(a) = 3a$ untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan f adalah homomorfisma modul.

1. Diberikan sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$

   $f(a + b) = 3(a + b) = 3a + 3b = f(a) + f(b)$.

2. Diberikan sebarang $a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$

   $f(3a) = 3(na) = n(3a) = nf(a)$.

Jadi, f merupakan homomorfisma R-modul dari $\mathbb{Z}$ ke $\mathbb{Z}$.

2.6 Barisan V-Koeksak

Sebelum membahas barisan V-koeksak, akan diberikan terlebih dahulu definisi barisak eksak dan barisan U-eksak.

2.6.1 Barisan Eksak

Berikut definisi mengenai barisan eksak yang digunakan untuk penentuan barisan eksak pada suatu himpunan *rough*.

Definisi 2.6.1.1 Misalkan R suatu ring, barisan dari R-modul dan homomorfisma R -modul berikut:

$$\dots \to M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \to \cdots \quad (2.8)$$

disebut barisan eksak pada M_i jika $\mathrm{im}(f_i) = \ker\,(f_{i+1})$. Barisan tersebut disebut barisan eksak jika setiap barisan pada M_i merupakan barisan eksak (Wulandari, 2004).

Berdasarkan definisi tersebut, dapat diperoleh sebagai berikut.

1. Barisan $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M$ merupakan barisan eksak jika dan hanya jika f bersifat satu-satu (injektif).
2. Barisan $M \to M_2 \xrightarrow{g} 0$ merupakan barisan eksak jika dan hanya jika g bersifat pada (surjektif).
3. Barisan $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \to M_2 \xrightarrow{g} 0$ disebut barisan eksak jika dan hanya jika f bersifat satu-satu, g bersifat pada dan jika $\mathrm{im}(f_i) = \ker(g)$.

Berikut diberikan contoh barisak eksak.

Contoh 2.6.1.2

Barisan

$$A \xrightarrow{f} \{0\} \xrightarrow{g} B$$

dengan f dan g merupakan homomorfisma nol, diperoleh $\mathrm{im}(f) = 0$ dan $\ker(g) = 0 = \mathrm{im}(f)$ sehingga barisan tersebut merupakan barisan eksak di $\{0\}$.

2.6.2 Barisan U-Eksak dan Barisan V-Koeksak

Setelah memahami definisi dan contoh dari barisan eksak, berikut diberikan definisi mengenai barisan U-eksak.

Definisi 2.6.2.1 Suatu barisan modul dan homomorfisma atas R

$$\dots \to M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \to \cdots \quad (2.9)$$

disebut U_{i+1}-eksak (U_{i+1} submodul M_{i+1}) di M_i jika $\mathrm{im}(f_i) = f_{i+1}^{-1}(U_{i+1})$ (Davvaz dan Garamaleky, 1999).

Berikut diberikan contoh barisan U-eksak.

Contoh 2.6.2.2

Diberikan barisan modul atas $\mathbb{Z}$

$$0 \to 2\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_4 \to 0$$

diketahui homomorfisma $f: 2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $f(a) = a \bmod n$ untuk setiap $a \in 2\mathbb{Z}$, dan $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_4$ dengan $g(a) = a$ untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$, jika f injektif dan g surjektif maka $\mathrm{im}(f) = g^{-1}(\mathbb{Z}_4)$. Dengan demikian barisan

$$0 \to 2\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_4 \to 0$$

merupakan barisan $\mathbb{Z}_4$-eksak.

Setelah memahami definisi dan contoh mengenai barisan eksak dan barisan U-eksak, berikut diberikan definisi barisan V-koeksak.

Definisi 2.6.2.3 Suatu barisan

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0 \quad (2.10)$$

disebut V-koeksak (V submodul dari A), jika f adalah injektif, g adalah surjektif dan $f(V) = \ker(g)$ (Davvaz dan Garamaleky, 1999).

Berikut diberikan contoh barisan V-koeksak.

Contoh 2.6.2.4

Diberikan barisan modul atas $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{f} 2\mathbb{Z} \xrightarrow{g} 0$$

dengan homomorfisma $f: \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$ dengan $f(a) = a \bmod n$ untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$, dan $g: 2\mathbb{Z} \to 0$ dengan $g(a) = 0$ untuk setiap $a \in 2\mathbb{Z}$.

Diberikan sebarang $V = 2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$, dengan f adalah injektif dan g surjektif, dan $f(2\mathbb{Z}) = 2\mathbb{Z}$ maka barisan

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{f} 2\mathbb{Z} \xrightarrow{g} 0$$

merupakan $2\mathbb{Z}$-koeksak.

2.7 Barisan Eksak *Rough*

Setelah memahami definisi dan contoh barisan U-eksak dan barisan V-koeksak, selanjutnya diberikan definisi barisan eksak *rough*.

Definisi 2.7.1 Suatu barisan

$$\overline{M'} \xrightarrow{\alpha} \overline{M} \xrightarrow{\beta} \overline{M''}. \tag{2.11}$$

Homomorfisma modul *rough* atas ring $Apr(R)$ dikatakan eksak jika

$\operatorname{im}(\alpha) = \ker(\beta)$. Hal ini terjadi jika dan hanya jika:

1. untuk setiap $\beta\alpha = 0$,
2. relasi $\beta(x) = 0$, $x \in \overline{M}$ berakibat $x = \alpha(x')$, untuk suatu $x' \in \overline{M'}$ (Sinha dan Prakash, 2016).

Berikut diberikan contoh barisan eksak *rough*.

Contoh 2.7.2 (Sinha dan Prakash, 2016)

Suatu barisan $0 \to \overline{M'} \xrightarrow{p} \overline{M}$ merupakan barisan eksak *rough*, jika dan hanya jika $\ker(p) = \mathrm{im}(0) = 0$ dan p bersifat injektif. Demikian pula untuk $\overline{M} \xrightarrow{q} \overline{M''} \to 0$ merupakan barisan *rough* jika dan hanya jika q adalah surjektif. Akibatnya, barisan $0 \to \overline{M'} \xrightarrow{\alpha} \overline{M} \to 0$ merupakan eksak *rough* jika dan hanya jika α adalah isomorfisma.

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada semester ganjil tahun akademik 2021/2022 dan bertempat di Program Studi Magister Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan studi literatur dengan langkah-langkah sebagai berikut.

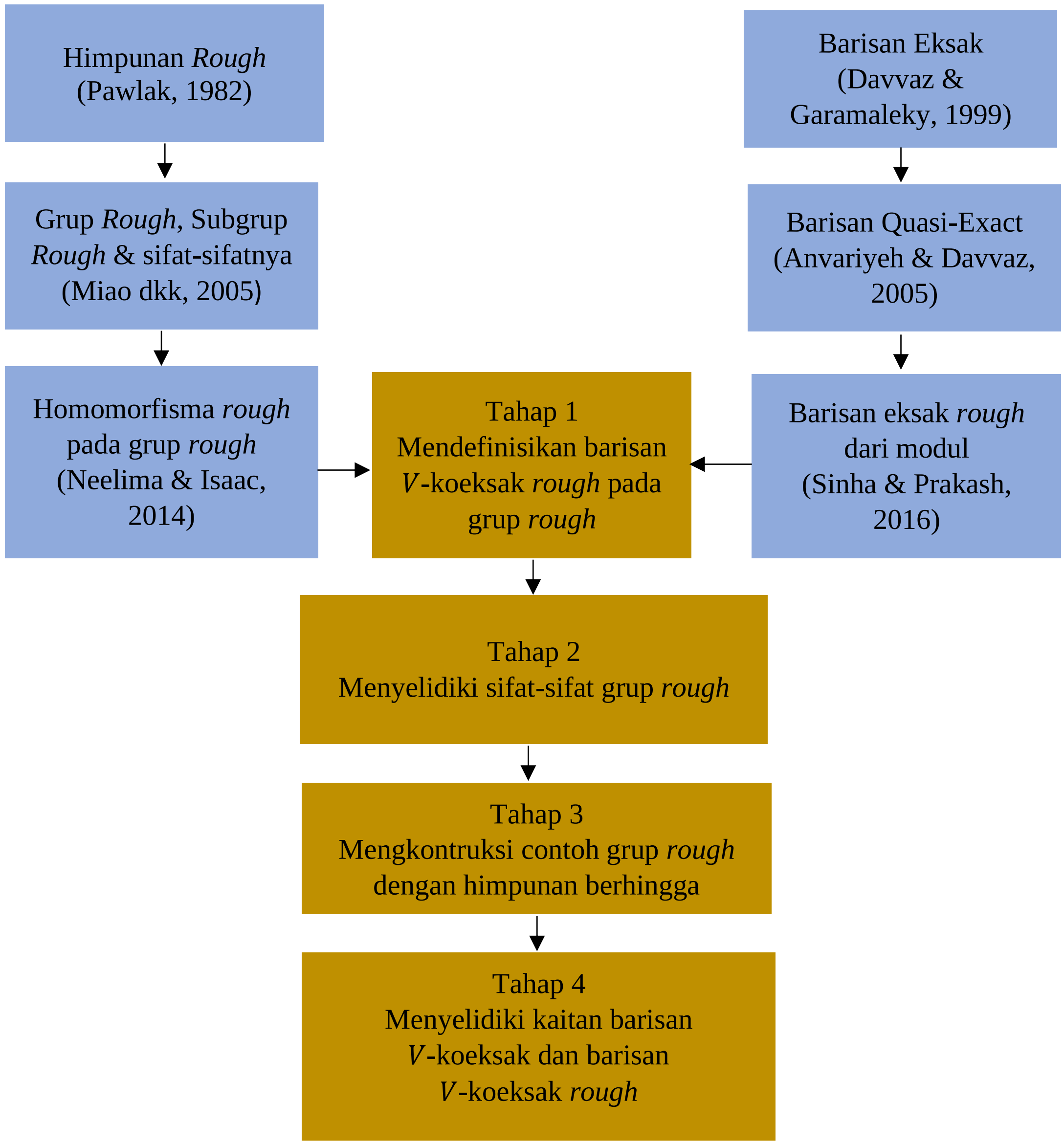
1. Studi literatur buku, jurnal dan artikel ilmiah yang berhubungan dengan penelitian ini.
2. Mempelajari definisi dan teorema yang relevan dengan kasus atau permasalahan yang berhubungan dengan penelitian.

Secara umum,langkah-langkah dalam penelitian ini dinyatakan sebagai berikut:

1. Mendefinisikan barisan V-koeksak *rough* pada grup *rough.*
2. Menyelidiki sifat-sifat grup *rough* dengan himpunan berhingga.
3. Mengkonstruksi contoh grup *rough*, homomorfisma grup *rough* dan barisan V-koeksak *rough* pada grup *rough* dengan himpunan berhingga.

4. Menyelidiki kaitan barisan V-koeksak dan barisan V-koeksak *rough*.

Tahap-tahap penelitian tersebut disajikan dalam bagan penelitian sebagai berikut:



Gambar 3.1 Tahap Penelitian

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Barisan V-koeksak *rough* dari grup *rough* merupakan dual dari barisan U-eksak dalam barisan eksak grup *rough.* Untuk mengkontruksi barisan V-koeksak *rough*, terlebih dahulu menentukan suatu ruang aproksimasi berhingga, menentukan grup *rough*, subgrup *rough* sampai membentuk suatu barisan dalam grup *rough.* Diberikan ruang aproksimasi tak kosong (U, θ), misalkan A, B, C merupakan grup *rough*, dan V merupakan subgrup *rough* dari A. Barisan $\overline{A} \xrightarrow{f} \overline{B} \xrightarrow{g} \overline{C}$ disebut barisan V-koeksak *rough* di grup *rough* A, jika $f\left(\overline{V}\right) = \ker(g)$.

Jika diberikan barisan V-koeksak *rough* $\overline{A} \xrightarrow{f} \overline{B} \xrightarrow{g} \overline{C}$ dengan X_1, X_2 merupakan subgrup *rough* dari A di ruang aproksimasi (U, θ), dengan $X_1 \neq X_2$ dan $\overline{X_1} = \overline{X_2}$. Barisan $\overline{A} \xrightarrow{f} \overline{B} \xrightarrow{g} \overline{C}$ merupakan barisan X_1-koeksak *rough* jika dan hanya jika barisan tersebut merupakan barisan X_2-koeksak *rough*.

5.2 Saran

Berdasarkan penelitian yang dilakukan, dalam mengkonstuksi suatu barisan V-koeksak masih sedikit ditemukan sifat-sifatnya pada grup *rough*, ini memungkinkan masih terdapat sifat-sifat lain dari barisan V-koeksak *rough* pada grup *rough* dengan himpunan semesta baik berhingga maupun tak berhingga.

DAFTAR PUSTAKA

Adkins, W.A., dan Weintraub, S.H., 1992. *Algebra An Approach via Module Theory*. New York: Springer-Verlag.

Anvariyeh, S.M., dan Davvaz, B., 2002. U-Split-Exact Sequences. *Far East J. Math. Sci. (FJMS)*. **42**(2).

Anvariyeh, S.M., dan Davvaz, B., 2005. On Quasi-Exact Sequences. *Bull, Korean Math.* Soc. **42**(1): 149-155.

Bagirmaz. N., dan Ozcan, A. F. 2015. Rough Semigroups on Approximation Spaces. *International Journal of Algebra.* **9**(7): 339-350.

Barnier, W., dan Feldman, N. 1990. *Introduction to Advanced Mathematics.* New Jersey: Prentice Hall International. 116-153.

Davvaz, B., dan Garamaleky, Y. A. P., 1999. A Note on Exact Sequences. *Bull, Malaysian Math. Sci. (FJMS)*. Soc. **22**(2): 53-56.

Dummit, D.S., dan Foote, R.M. 2004. *Abstract Algebra.* 3rd Edition. United States of America: John Wiley and Sons.

Fitriani, Surodjo, B., dan Wijayanti, I.E. 2016. On Sub-Exact Sequences. *Far East J. Math. Sci.* **100**(7): 1055-1065.

Fitriani, Surodjo, B., dan Wijayanti, I.E. 2017. On Sub-Linearly Independent Modules. *Journal of Mathematics Research.* **893**(1): 1-7.

Fitriani, Surodjo, B., dan Wijayanti, I.E. 2018. Generalization of $\mathcal{U}$-Generator and m-sub-Generator Related to Category $\sigma[m]$. *Journal of Mathematics Research.* **10**(4): 101-106.

Fitriani, Surodjo, B., dan Wijayanti, I.E. 2018. A Generalization of Basis and Free Modules Relatives to a Family $\mathcal{U}$ of R-Modules. *Journal of Physics: Conference Series.* **1097**: 1-7.

Fraleigh, J. B., dan Katz, V. J. 2003. *A First Course in Abstract Algebra*. 7 th Edition. Boston: Addison-Wesley.

Gallian, J. A. 2010. *Contemporary Abstract Algebra Seventh Edition.* United States of America: Brooks/Cole, Cengage Learning.

Grillet, P. A. 2007. *Abstract Algebra Second Edition*. New York: Springer.

Han, S. 2001. The homomorphism and isomorphism of rough groups. *Academy of Shanxi University,* **24**: 303–305.

Hartley, B., dan Hawkes, T, O. 1970. *Rings, Modules and Linear Algebra.* London: Chapman and Hall.

Herstein, I. N. 1975. *Topics in Algebra.* 2 nd Edition. New York: John Wiley & Sons.

Isaac, P., dan Neelima, C.A., 2013. Rough Ideals and Their Properties. *Journal of Global Research in Mathematical Archives.* **1**(6): 90-97.

Kuroki, N. 1997. Rough Ideals in Semigrups. *Information Sciences.* **10**. North Holland. 139-163.

Miao, D., Han, S., Li, D., dan Sun, L. 2005. Rough Group, Rough Subgroup and Their Properties. *Lecture Notes in Artificial Intelligence*. **3641**: 104-113.

Neelima, C.A., dan Isaac, P., 2014. Rough Anti-Homomorphism on a Rough Group. *Global Journal of Mathematical Sciences: Theory and Practical*. **6**(2): 79-87.

Pawlak, Z. 1982. Rough Set. *International Journal Computer and Information Science*. **11**(5): 341-356.

Pawlak, Z. 1991. *Rough Sets: Theoretical Aspects of Reasoning about Data.* Boston, Kluwer Academic Publishers.

Roman, S. 2005. *Advanced Linear Algebra Second Edition.* USA: Springer.

Sinha, A. K., dan Prakash, A. 2014. Rough Projective Modules. *Proc. Of the Second International Conference on Advances in Applied Science and Environmental Engineering-ASEE 2014*. 35-38.

Sinha, A. K., dan Prakash, A. 2016. Rough Exact Sequences of Modules. *International Journal of Applied Engineering Research*. **11**(4): 2513-2517.

Sripatmi, dan Anwar, Y.S. 2015. Perumuman Lemma Snake dan Lemma Lima. *J. Pijar MIPA.* **10**(1):76-79.

Suwilo, S., Tulus, dan Lubis, S.R. 1997. *Aljabar Abstrak Suatu Pengantar*. Medan: USU Press.

Wang, C., dan Chen, D. 2010. A Short Note on Some Properties of Rough Groups. *Computers and Mathematics with Applications.* **59**(1): 431-436.

Wulandari, T. 2004. Gelanggang Herediter. *Journal of Mathematics and Its Application*. **3**(2): 51-62.

Yanita. 2007. Barisan Modul Eksak dan Barisan Homomorfisma Modul Eksak. *Jurnal Matematika.* **7**(1), 1-8.