KONSTRUKSI BARISAN *U*-EKSAK *ROUGH* PADA GRUP *ROUGH*

(Tesis)

Oleh

FITRI AYUNI

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS LAMPUNG

BANDAR LAMPUNG

2022

ABSTRAK

KONSTRUKSI BARISAN U-EKSAK *ROUGH* PADA GRUP *ROUGH*

Oleh

Fitri Ayuni

Barisan U-eksak *rough* pada grup *rough* merupakan perumuman dari barisan eksak *rough* pada grup *rough*. Diberikan ruang aproksimasi (S,θ). K,L,M merupakan himpunan bagian dari S. Misalkan K,L,M merupakan grup *rough*, dan U adalah subgrup *rough* dari M. Barisan $\overline{K} \xrightarrow{f} \overline{L} \xrightarrow{g} \overline{M}$ disebut U-eksak *rough* pada grup *rough*, jika im $(f) = g^{-1}(\overline{U})$. Pada penelitian ini diselidiki beberapa sifat barisan U-eksak *rough* pada grup *rough*. Diberikan (S,θ) ruang aproksimasi, misalkan K,L,M grup *rough* kemudian U_1 dan U_2 merupakan subgrup *rough* dari M dan $U_1 \neq U_2$ dengan $\overline{U_1} = \overline{U_2}$. Jika barisan $\overline{K} \xrightarrow{f} \overline{L} \xrightarrow{g} \overline{M}$ merupakan U_1-eksak *rough* maka diperoleh juga U_2-eksak *rough*. Selanjutnya, diberikan $\bar{A} \xrightarrow{f} \bar{B} \xrightarrow{g} \bar{C}$ barisan eksak *rough*. Jika A'subgrup *rough* dari A, B' subgrup *rough* dari B, C' subgrup *rough* dari C dan $\overline{A}' = \bar{A}$, $\overline{B}' = \bar{B}$, $\overline{C}' = \bar{C}$ maka $\overline{A}' \xrightarrow{f} \overline{B}' \xrightarrow{g} \overline{C}'$ juga merupakan barisan eksak *rough*. Selain itu, dibahas pula kaitan barisan U-eksak pada grup dengan U-eksak *rough* pada grup *rough*. Setiap barisan U-eksak pada grup merupakan barisan U-eksak *rough* pada grup *rough* dari suatu ruang aproksimasi (S,θ).

Kata Kunci: *ruang aproksimasi, grup rough, barisan eksak rough, barisan U-eksak rough.*

KONSTRUKSI BARISAN *U*-EKSAK *ROUGH* PADA GRUP *ROUGH*

Oleh
Fitri Ayuni

TESIS

Sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar
MAGISTER MATEMATIKA

Pada
Program Studi Magister Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2022

Judul Tesis : **KONSTRUKSI BARISAN *U*-EKSAK *ROUGH* PADA GRUP *ROUGH***

Nama Mahasiswa : Fitri Ayuni

Nomor Pokok Mahasiswa : 2027031007

Program Studi : Magister Matematika

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.
NIP 19840627 200604 2 001

Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.
NIP 19800206 200312 1 003

2. Ketua Program Studi Magister Matematika

Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.
NIP 19760411 200012 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	: **Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.**	…………………
Sekretaris	: **Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.**	…………………
Penguji Bukan Pembimbing	: **1. Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.**	…………………
	2. Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si.	…………………

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, S.Si., M.T.
NIP 19740705 200003 1 001

3. Direktur Program Pascasarjana

Prof. Dr. Ir. Ahmad Saudi Samosir, S.T., M.T.
NIP 19710415 199803 1 005

4. Tanggal Lulus Ujian Tesis : **03 Agustus 2022**

PERNYATAAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: **Fitri Ayuni**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **2027031007**
Program Studi	: **Magister Matematika**
Jurusan	: **Matematika**

Dengan ini menyatakan bahwa tesis saya yang berjudul **"KONSTRUKSI BARISAN *U*-EKSAK *ROUGH* PADA GRUP *ROUGH*"** adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa tesis ini merupakan hasil salinan atau telah dibuat orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 03 Agustus 2022
Penulis

Fitri Ayuni
NPM. 2027031007

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Fitri Ayuni lahir di Bandar Lampung pada tanggal 2 Juni 1987, sebagai anak ketiga dari pasangan alm. Bapak Sukarno dan Ibu Marni serta adik dari Nurma Wati dan Wahyu Dinawan. Penulis menempuh pendidikan sekolah dasar di SDN 1 Penengahan pada tahun 1993-1999, kemudian melanjutkan pendidikan menengah pertama di SMP Utama 3 Bandar Lampung pada tahun 1999-2002 dan melanjutkan pendidikan menengah atas di SMA YP Unila Bandar Lampung pada tahun 2002-2005. Pada tahun 2009, Penulis menyelesaikan Program Studi S1 Pendidikan Matematika STKIP-PGRI Bandar Lampung.

Pada tahun 2009, penulis memulai karier sebagai guru bidang studi matematika di SMA Wijaya Bandar Lampung. Tahun 2019, penulis mengikuti Program Profesi Guru (PPG) dalam jabatatan di Universitas Sriwijaya. Selain itu, tahun 2019 hingga saat ini penulis bertugas sebagai Kepala SMK Miftahul Ulum Bandar Lampung.

KATA MUTIARA

“Ilmu bukanlah teori yang dihafal, namun yang bermanfaat (diamalkan) dalam kehidupan”.
(Baihaqi dalam Al Madkhal 516)

“Ingatlah, sesungguhnya pertolongan Allah SWT. itu amat dekat”.
(Qs. Al-Baqarah: 214)

“Sukses terdiri dari keberlanjutan kesalahan demi kesalahan tanpa kehilangan rasa antusias”.
(Winston churchill)

“Impianmu membawamu ke sudut senyummu, ke harapan tertinggimu, ke jendela peluangmu, dan ke tempat-tempat paling istimewa yang pernah diketahui hatimu”.
(Fitri Ayuni)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillah

Puji dan syukur hanya milik Allah Subhana Wata'ala atas nikmat dan hidayah yang diberikan, sholawat dan salam selalu tercurah kepada Nabi Muhammad Shallahu 'Alaihi Wassallam

kupersembahkan karya kecilku ini untuk:

Keluarga

Suami, kedua anakku, alm. bapak, dan ibu tersayang yang selalu mendoakan, berkorban, dan hal lain yang tak dapat diungkapkan dengan kata-kata

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Dosen pembimbing dan penguji yang berjasa dan tidak lelah memberikan arahan serta masukan sehingga tersusunlah tesis ini

Sahabat dan Teman

Sahabat, teman-temanku dan rekan kerjaku terimakasih atas kebersamaan, pengalaman, do'a dan semangat yang selalu kalian berikan kepadaku.

Universitas Lampung

SANWACANA

Segala puji bagi Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya, sholawat dan salam selalu tercurah kepada Nabi Muhammad SAW sehingga tesis ini yang berjudul "Konstruksi Barisan *U*-eksak *Rough* pada Grup *Rough*" dapat diselesaikan. Dalam menyelesaikan tesis ini, Penulis banyak mendapat pelajaran, dukungan motivasi, pengalaman, bantuan berupa bimbingan yang sangat berharga dari berbagai pihak dan disadari bahwa adanya keterbatasan pengetahuan dan kemampuan yang dimiiki. Oleh karena itu, pada kesempatan baik ini Penulis mengucapkan rasa terima kasih kepada:

1. Suami, anak-anakku, dan ibu yang tidak pernah lelah memberikan do'a, dukungan, kasih sayang, pengorbanan dan motivasi.
2. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc., selaku Dosen Pembimbing utama yang senantiasa memberikan arahan, bantuan, bimbingan serta saran sehingga tersusunlah tesis ini.
3. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc., selaku Dosen Pembimbing kedua yang telah memberikan saran dan bimbingan dalam penyusunan tesis.
4. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D., selaku Dosen penguji utama yang telah memberi pengarahan dan masukan serta saran-saran dalam penyelesaian tesis ini.

5. Ibu Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Akademik selaku Dosen penguji kedua yang telah memberi pengarahan dan masukan serta saran-saran dalam penyelesaian tesis ini.
6. Ibu Dr. Asmiati, S.Si., M.Si., selaku Ketua Program Studi Jurusan Magister Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
8. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc., selaku Dosen Pembimbing Akademik.
9. Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, S.Si., M.T., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
10. Prof. Dr. Ahmad Saudi Samosir, S.T., M.T., selaku Direktur Pasca Sarjana Universitas Lampung.
11. Dosen, staf dan karyawan Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung yang telah memberikan bantuan dan panduan dalam penyelesaian administrasi.
12. Keluarga besar SMK Miftahul Ulum Bandar Lampung yang telah memberi dukungan sehingga tersusunlah tesis ini.
13. Teman seperjuanganku Despan yang telah memberikan ilmu, kebersamaan, dan menjadi tempat berbagi.
14. Teman-teman Magister Matematika Angkatan 2020. Sukses untuk kita dan jangan lupa bahagia
15. Mahasiswa Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.
16. Almamater tercinta Universitas Lampung.

Semoga Allah SWT memberikan balasan yang berlipat ganda kepada semua pihak yang telah turut membantu Penulis dalam menyelesaikan tesis ini dan semoga tesis ini dapat bermanfaat bagi kita semua.

Atas kritik dan saran yang diberikan untuk kesempurnaan tesis ini dengan tulus diucapkan terimakasih.

Bandar Lampung, 03 Agustus 2022
Penulis,

Fitri Ayuni

ABSTRACT

CONSTRUCTION A ROUGH U-EXACT SEQUENCE IN ROUGH GROUP

By

Fitri Ayuni

The U-exact rough sequence in the rough group is the generalization of the rough exact sequence in the rough group. Given approximation space (S, θ). K, L, M are the subsets of S. Suppose K, L, M is the rough group, and U is the rough subgroup of M. The sequence $\overline{K} \xrightarrow{f} \overline{L} \xrightarrow{g} \overline{M}$ is called U-exact rough in the rough group, if im $(f) = g^{-1}(\overline{U})$. In this study, several properties of the U-exact rough sequence in the rough group were investigated. Given (S, θ) the approximation space. K, L, M the rough group, U_1 and U_2 is a rough subgroup of M, $U_1 \neq U_2$ then $\overline{U_1} = \overline{U_2}$. If the sequence $\overline{K} \xrightarrow{f} \overline{L} \xrightarrow{g} \overline{M}$ is a rough U_1-exact then it is also obtained U_2-exact rough. Next, it is given $\bar{A} \xrightarrow{f} \bar{B} \xrightarrow{g} \bar{C}$ the exact rough sequence. If A'rough subgroup of A, B' rough subgroup of B, C' rough subgroup of C and $\overline{A}' = \bar{A}$, $\overline{B}' = \bar{B}$, $\overline{C}' = \bar{C}$ then $\bar{A} \xrightarrow{f} \bar{B} \xrightarrow{g} \bar{C}$ is also a rough exact sequence. In addition, it also discussed the relationship between the U-exact sequence in the group and the U-exact rough in the rough group. Each U-exact sequence in the group is a U-exact rough sequence in the rough group of an approximation space (S,θ).

Keywords: *approximation space, rough group, rough exact sequence, rough U-exact sequence.*

DAFTAR ISI

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Teori himpunan *rough (rough set theory)* merupakan teknik matematika yang pertama kali diperkenalkan oleh Zdzislaw Pawlak pada tahun 1982. Teknik ini digunakan dalam menyelesaikan masalah yang bersifat ketidakjelasan *(vagueness)* dan ketidakpastian *(uncertainly)*. Konsep dasar dari teori himpunan *rough* oleh Pawlak adalah relasi ekuivalensi. Menurut Barnier dan Feldman tahun 1990, relasi ekuivalensi merupakan relasi yang bersifat refleksif, simetris, dan transitif yang akan membentuk kelas-kelas ekuivalensi. Hal ini mengakibatkan partisi dari himpunan universal menjadi kelas-kelas ekuivalensi yang saling lepas. Kelas ekuivalensi merupakan partisi untuk menentukan aproksimasi bawah dan aproksimasi atas dari himpunan bagian dari suatu himpunan semesta.

Diberikan S adalah suatu himpunan tak kosong berhingga yang disebut himpunan semesta dan θ adalah relasi ekuivalensi dari S. Pasangan (S, θ) disebut ruang aproksimasi (Miao dkk., 2005). Jika $X \subseteq S$, aproksimasi bawah dari X, dinotasikan $\underline{X}$, pada ruang aproksimasi (S, θ) merupakan gabungan dari kelas ekuivalensi yang termuat dalam X, sedangkan aproksimasi atas dari X, dinotasikan $\bar{X}$, pada ruang aproksimasi (S, θ) merupakan gabungan dari kelas ekuivalensi yang irisannya dengan X bukan merupakan himpunan kosong. Jika $\bar{X} - \underline{X} \neq \emptyset$ himpunan X disebut himpunan *rough*.

Selain Pawlak, Biswas dan Nanda tahun 1994 memperkenalkan subgrup *rough*. Pada tahun 1997, Kuroki memperkenalkan gagasan tentang ideal *rough* di semigrup. Han pada tahun 2001 menyelidiki homomorfisma dan isomorfisma pada himpunan *rough* serta penelitian yang dilakukan oleh Miao dkk., pada tahun 2005 yang mempelajari tentang grup *rough*, subgrup *rough*, dan sifat-sifatnya. Pada tahun 2016, Davvaz dan Mahdavipour menyelidiki modul *rough*. Selanjutnya pada tahun 2007, Yanita membahas barisan eksak dari R-modul dan homomorfisma R-modul.

Isaac dan Neelima tahun 2013 melakukan penelitian mengenai ideal *rough* dan bagian-bagiannya. Selanjutnya, pada tahun 2015 Sripatmi dan Anwar mengkaji perumuman dari Lemma Snake dan Lemma Lima yang memanfaatkan sifat-sifat dari barisan U-eksak. Selain itu, pada tahun 2016, Sinha dan Prakash menyelidiki barisan eksak dari modul *rough*.

Diberikan ring R dan $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ merupakan barisan eksak atas R-modul sehingga $\operatorname{im} f = \ker g \; (= g^{-1}(0))$. Davvaz dan Parnian-Garamaleky pada tahun 1999 memperkenalkan konsep barisan U-eksak dengan mengganti sub-modul 0 dengan sub-modul $U \subseteq C$. Berbeda dengan Davvaz dan Parnian-Garamaleky, pada tahun 2016, Fitriani dkk. menemukan gagasan baru dari generalisasi barisan eksak ke barisan X-sub-eksak. Selain itu, Jesmalar tahun 2017 menyelidiki homomorfisma grup *rough*. Selanjutnya, Setyaningsih dkk. tahun 2021 memperkenalkan barisan sub-eksak pada grup *rough*.

Dalam hal penerapan dari teori himpunan *rough*, banyak penelitian yang membahas mengenai penerapan teori tersebut di berbagai cabang ilmu baik dalam bidang *data mining* maupun pada aspek aljabar. Namun, pada penelitian ini akan membahas aspek teori aljabar dengan topik yang akan dibahas yaitu mengkonstruksi barisan U-eksak *rough* pada grup *rough* dan sifat-sifatnya.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah mengkonstruksi barisan U-eksak *rough* pada grup *rough* dari suatu ruang aproksimasi dan sifat-sifatnya.

1.3 Manfaat Penelitian

Penelitian ini dapat memberikan manfaat antara lain:

1. sebagai acuan penelitian yang akan datang,
2. menambah wawasan mengenai struktur aljabar khususnya barisan U-eksak *rough* pada grup *rough.*

II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini, akan dibahas definisi-definisi yang akan mendukung pembahasan dalam menyelesaikan penelitian ini. Beberapa definisi tersebut adalah sebagai berikut.

2.1 Grup

Sebelum membahas definisi grup, perlu dipahami terlebih dahulu mengenai operasi biner. Berikut definisi operasi biner.

Definisi 2.1.1 Operasi $*$ pada himpunan G adalah suatu operasi biner jika operasi $*$ merupakan fungsi $G \times G \rightarrow G$ (Grillet, 2007).

Dengan kata lain, operasi $*$ pada himpunan G dikatakan operasi biner jika untuk setiap $a, b \in G$, berlaku $a * b \in G$.

Berikut ini akan diberikan contoh operasi biner pada suatu himpunan.

Contoh 2.1.1

Diberikan $M_2(\mathbb{Z})$ himpunan matriks berukuran 2×2 yang elemen-elemennya merupakan elemen $\mathbb{Z}$ atau dapat dituliskan sebagai $M_2(\mathbb{Z}) = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Z}\right\}$. Didefinisikan $+: M_2(\mathbb{Z}) \times M_2(\mathbb{Z}) \rightarrow M_2(\mathbb{Z})$, berlaku $(A, B) \rightarrow A + B$.

Akan ditunjukkan + merupakan operasi biner pada $M_2(\mathbb{Z})$.

Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$, berlaku:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

Karena $(a+e)$, $(b+f)$,$(c+g)$,$(d+h) \in \mathbb{Z}$ diperoleh

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$$

Oleh karena itu, + merupakan operasi biner pada $M_2(\mathbb{Z})$.

Setelah memahami operasi biner, selanjutnya akan diberikan definisi grup. Berikut akan dijelaskan mengenai definisi grup.

Definisi 2.1.2 Himpunan tak kosong G dikatakan grup jika pada G terdapat operasi biner yang dinyatakan dengan " $*$ ", sehingga memenuhi aksioma berikut:

i. untuk setiap $a, b, c \in G$, berlaku $a * (b * c) = (a * b) * c$ (sifat asosiatif),

ii. terdapat suatu elemen $e \in G$ sehingga $a * e = e * a = a$, untuk setiap $a \in G$ (e adalah elemen identitas di G),

iii. untuk setiap $a \in G$, terdapat $a^{-1} \in G$ sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (a^{-1} adalah invers a di G) (Herstein, 1975).

Grup dinotasikan dengan $\langle G,* \rangle$ dengan G merupakan himpunan tak kosong dan $*$ merupakan operasi biner pada G.

Untuk memahami Definisi 2.1.2, berikut akan diberikan contoh mengenai grup.

Contoh 2.1.2

Diberikan himpunan $M_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$. Akan dibuktikan $\langle M_2(\mathbb{Z}), + \rangle$ merupakan grup, dengan $+$ merupakan operasi penjumlahan matriks. Untuk menunjukkan bahwa $M_2(\mathbb{Z})$ merupakan grup, $M_2(\mathbb{Z})$ harus memenuhi aksioma-aksioma grup.

i. Diberikan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$, dan $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$ dengan operasi penjumlahan matriks diperoleh

$$A + (B + C) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} b_{11} + c_{11} & b_{12} + c_{12} \\ b_{21} + c_{21} & b_{22} + c_{22} \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} + c_{11} & a_{12} + b_{12} + c_{12} \\ a_{21} + b_{21} + c_{21} & a_{22} + b_{22} + c_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a_{11} + b_{11}) + c_{11} & (a_{12} + b_{12}) + c_{12} \\ (a_{21} + b_{21}) + c_{21} & (a_{22} + b_{22}) + c_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \right)$$

Oleh karena itu, operasi + bersifat assosiatif di $M_2(\mathbb{Z})$.

ii. Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$, berlaku

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Akibatnya elemen identitas di $M_2(\mathbb{Z})$ terhadap operasi penjumlahan matriks adalah $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

iii. Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$, berlaku

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Akibatnya invers dari $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ terhadap operasi penjumlahan matriks di $M_2(\mathbb{Z})$ adalah $\begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$. Oleh karena itu, untuk setiap $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$, terdapat $\begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ sehingga $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Karena aksioma grup terpenuhi, terbukti bahwa $\langle M_2(\mathbb{Z}), + \rangle$ merupakan grup.

Selanjutnya akan diberikan definisi grup komutatif.

Definisi 2.1.3 Grup G dikatakan grup komutatif jika operasi biner $*$ pada suatu grup G memenuhi hukum komutatif, yaitu $a * b = b * a$, untuk setiap $a, b \in G$ (Noor, 2017).

Berikut akan diberikan contoh grup komutatif.

Contoh 2.1.3
Dari Contoh 2.1.2 akan dibuktikan bahwa $M_2(\mathbb{Z})$ adalah grup komutatif. Diketahui $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$ dengan operasi penjumlahan matriks akan ditunjukkan $M_2(\mathbb{Z})$ grup komutatif.
Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$, berlaku:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11} + a_{11} & b_{12} + a_{12} \\ b_{21} + a_{21} & b_{22} + a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Karena sifat komutatif berlaku pada operasi penjumlahan matriks, terbukti $M_2(\mathbb{Z})$ adalah grup komutatif.

Setelah memahami definisi dan contoh grup serta grup komutatif, berikut akan diberikan definisi dari subgrup.

Definisi 2.1.4 Himpunan tak kosong H dikatakan subgrup dari grup G jika H himpunan bagian dari G dan memiliki operasi biner yang sama terhadap grup G (Adkins, 1992).

Berikut diberikan contoh subgrup.

Contoh 2.1.4

Diberikan grup himpunan bilangan bulat dengan operasi penjumlahan $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$. Jika $3\mathbb{Z} = \{3n | n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}$, yaitu himpunan semua bilangan bulat kelipatan 3 maka ⟨3ℤ, +⟩ merupakan grup. Oleh karena itu, 3ℤ merupakan subgrup dari ℤ.

2.2 Himpunan *Rough*

Sebelum membahas definisi himpunan *rough*, perlu dipahami terlebih dahulu mengenai relasi, relasi ekuivalensi, kelas ekuivalensi dan ruang aproksimasi.

Pada bagian ini akan disajikan definisi relasi pada suatu himpunan.

Definisi 2.2.1 Suatu relasi R atas suatu himpunan S adalah suatu himpunan bagian dari $S \times S = \{(a, b): a, b \in S\}$. Dengan kata lain, suatu relasi R atas suatu himpunan S adalah suatu aturan yang menghubungkan unsur dari himpunan S ke unsur himpunan S itu sendiri (Suwilo dkk., 1987).

Contoh 2.2.1

Diketahui dua himpunan yaitu $P = \{2,3,4\}$ dan $Q = \{1,2,3,4,6\}$ serta "kurang dari" merupakan relasi yang terhubung antara himpunan P ke himpunan Q. Oleh karena itu, diperoleh $R = \{(2,3), (2,4), (2,6), (3,4), (3,6), (4,6)\}$.

Selanjutnya akan dibahas mengenai relasi ekuivalensi. Berikut diberikan pengertian dari relasi ekuivalensi.

Definisi 2.2.2 Relasi R pada himpunan A disebut relasi ekuivalensi jika dan hanya jika R mempunyai sifat refleksif, simetris dan transitif.

a. Relasi R pada himpunan A disebut refleksif jika dan hanya jika aRa untuk setiap $a \in A$.

b. Relasi R pada himpunan A disebut simetris jika dan hanya jika aRb maka bRa, untuk semua $a, b \in A$.
c. Relasi R pada himpunan A disebut transitif jika dan hanya jika aRb dan bRc maka aRc, untuk semua $a, b, c \in A$ (Barnier & Feldman, 1990).

Contoh 2.2.2

Diberikan himpunan $A = \{1,2,3,4,5\}$. Pada himpunan A tersebut didefinisikan relasi R yaitu aRb dengan $a, b \in A$ jika dan hanya jika $a - b = 2k$ dan $k \in \mathbb{Z}$. Dengan kata lain, aRb jika dan hanya jika $a - b$ dapat dibagi habis oleh 2. Berikut akan dibuktikan bahwa R adalah relasi ekuivalensi pada A.

a. Untuk $a \in A$, berlaku aRa karena $a - a = 0 = 2.0, 0 \in \mathbb{Z}$. Akibatnya relasi R bersifat refleksif.
b. Diberikan sebarang $a, b \in A$ dengan aRb akan ditunjukkan bRa. Karena aRb terdapat $k \in \mathbb{Z}$ sehingga $a - b = 2k$. Akibatnya $b - a = -2k = 2(-k)$ dengan $-k \in \mathbb{Z}$, jadi bRa. Oleh karena itu, R bersifat simetris.
c. Selanjutnya, asumsikan jika aRb dan bRc maka $a - b = 2k$ dan $b - c = 2j$ untuk $k, j \in \mathbb{Z}$. Hal ini berakibat jika $a - c = (a + b) + (-b - c) = 2k + 2j = 2(k + j)$ dengan $k + j \in \mathbb{Z}$ maka diperoleh aRc. Akibatnya, relasi R bersifat transitif.

Dengan demikian, relasi R adalah relasi yang bersifat refleksif, simetris, dan transitif. Oleh karena itu, R merupakan relasi ekuivalensi.

Selanjutnya, relasi ekuivalensi akan membentuk suatu kelas ekuivalensi yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.2.3 Misalkan relasi R adalah relasi ekuivalensi pada himpunan A dan $a \in A$. Kelas ekuivalensi dari a pada R adalah $[a]_R = \{x : x \in A \text{ dan } aRx\}$. Dengan kata lain, kelas ekuivalensi a pada R memuat semua elemen dalam himpunan A yang berelasi dengan a (Barnier dan Feldman, 1990).

Untuk memahami Definisi 2.2.3, berikut akan diberikan contoh kelas ekuivalensi pada suatu himpunan.

Contoh 2.2.3

Diberikan himpunan $X = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$ dan relasi R merupakan relasi ekuivalensi pada X yang didefinisikan xRy jika dan hanya jika $3|(x - y)$. Oleh karena itu, akan ditentukan kelas ekuivalensi yang dimulai dari 1.

$[1] = \{1,4, 7, 10, 13, 16, 19\}$,

$[2] = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20\}$,

$[3] = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$,

$[4] = \{4, 7, 10, 13, 16, 19\}$,

$[5] = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20\}$.

Kelas ekuivalensi $[2] = [5]$ yang artinya telah ditemukan kelas ekuivalensi dari X. Jadi, kelas-kelas ekuivalensi pada X terhadap relasi R adalah $[1], [2], [3]$, dan $[4]$.

Berikut ini akan diberikan definisi dari suatu ruang aproksimasi.

Definisi 2.2.4 Pasangan (S, θ), dengan $S \neq \emptyset$ dan θ merupakan relasi ekuivalensi pada S disebut ruang aproksimasi (Pawlak, 1991).

Contoh 2.2.4

Dari Contoh 2.2.3, pasangan (X, R) merupakan ruang aproksimasi, dengan R relasi ekuivalensi dengan definisi untuk setiap $x, y \in X$ dan xRy jika $3|(x - y)$.

Setelah memahami definisi ruang aproksimasi, berikut ini akan diberikan definisi aproksimasi bawah dan aproksimasi atas.

Definisi 2.2.5 Untuk suatu ruang aproksimasi (U, θ), pemetaan

$$Apr: P(U) \rightarrow P(U) \times P(U)$$

didefinisikan sebagai berikut:

untuk setiap $X \in P(U)$, $Apr\ (X) = (\underline{X}, \bar{X})$, dengan

$\underline{X} = \{x \in X | [x]_{\theta} \subseteq X\}$,

$\overline{X} = \{x \in X | [x]_{\theta} \cap X \neq \emptyset\}$.

$\underline{X}$ disebut aproksimasi bawah dari X di (U, θ), sedangkan

$\overline{X}$ disebut aproksimasi atas dari X di (U, θ) (Davvaz, 2004).

Untuk memahami Definisi 2.2.5, akan diberikan contoh mengenai aproksimasi bawah dan aproksimasi atas.

Contoh 2.2.5

Diberikan ruang aproksimasi (S, θ), dengan $S = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{10}\}$ dan relasi ekuivalensi θ dengan kelas ekuivalensi sebagai berikut:

$E_1 = \{x_1, x_2\}$,

$E_2 = \{x_3, x_7, x_{10}\}$,

$E_3 = \{x_4\}$,

$E_4 = \{x_5\}$,

$E_5 = \{x_6\}$,

$E_6 = \{x_8\}$,

$E_7 = \{x_9\}$.

Jika dipilih $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, diperoleh

$\underline{X} = \{x_1, x_2\} \cup \{x_4\}$

$= \{x_1, x_2, x_4\}$, dan

$\overline{X} = \{x_1, x_2\} \cup \{x_4\} \cup \{x_3, x_7, x_{10}\}$

$= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_7, x_{10}\}$ (Davvaz, 2004).

Dengan demikian $Apr\ (X) = \left(\{x_1, x_2, x_4\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_7, x_{10}\}\right)$.

Berikut ini akan diberikan proposisi mengenai aproksimasi bawah dan aproksimasi atas.

Proposisi 2.2.6

Jika $X, Y \subset U$, maka berlaku sifat sebagai berikut:

1. $\underline{X} \subset X \subset \overline{X}$

2. $\underline{\emptyset} = \overline{\emptyset} = \emptyset$, $\underline{U} = \overline{U} = U$
3. $\underline{X \cap Y} = \underline{X} \cap \underline{Y}$
4. $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$
5. $X \subseteq Y$ berarti $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$ dan $\underline{X} \subseteq \underline{Y}$
6. $\underline{X} \cup \underline{Y} \subseteq \underline{X \cup Y}$
7. $\overline{X \cap Y} \subseteq \overline{X} \cap \overline{Y}$

(Isaac & Neelima, 2013).

Bukti

1. Jika $x \in \underline{X}$, maka $x \in [x]_R \subseteq X$. Oleh karena itu, $\underline{X} \subseteq X$.

   Selanjutnya, jika $x \in \overline{X}$, maka $x \in [x]_R$ didapat $[x]_R \cap X \neq \emptyset$.

   Jadi $X \subseteq \overline{X}$. Dengan demikian $\underline{X} \subset X \subset \overline{X}$.
2. Jika $\underline{\emptyset} \subseteq \overline{\emptyset}$ dan $\overline{\emptyset} \subseteq \underline{\emptyset}$, maka $\underline{\emptyset} = \overline{\emptyset} = \emptyset$. Demikian pula jika $\underline{U} \subseteq \overline{U}$ dan $\overline{U} \subseteq \underline{U}$, maka $\underline{U} = \overline{U} = U$.
3. $x \in \underline{X \cap Y} \Leftrightarrow [x]_R \subseteq (X \cap Y)$

   $\Leftrightarrow ([x]_R \subseteq X) \cap ([x]_R \subseteq Y)$

   $\Leftrightarrow x \in \underline{X}$ dan $x \in \underline{Y}$

   $\Leftrightarrow x \in \underline{X} \cap \underline{Y}$

   Jadi, $\underline{X \cap Y} = \underline{X} \cap \underline{Y}$.
4. $x \in \overline{X \cup Y} \Leftrightarrow [x]_R \cap (X \cup Y) \neq \emptyset$

   $\Leftrightarrow ([x]_R \cap X \neq \emptyset) \cup ([x]_R \cap Y \neq \emptyset)$

   $\Leftrightarrow [x]_R \cap X \neq \emptyset$ atau $[x]_R \cap Y \neq \emptyset$

   $\Leftrightarrow x \in \overline{X} \cup \overline{Y}$

   Jadi, $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$.
5. Diberikan $X \subseteq Y$ jika dan hanya jika $X \cap Y = X$, berdasarkan No. 3 bahwa $\underline{X \cap Y} = \underline{X} \cap \underline{Y}$, diperoleh: $\underline{X \cap Y} = \underline{X}$ dan $\underline{X} \cap \underline{Y} = \underline{X}$. Dengan demikian, terbukti bahwa $\underline{X} \subseteq \underline{Y}$.

   Diberikan $X \subseteq Y$ jika dan hanya jika $X \cup Y = Y$, berdasarkan No. 4 bahwa $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$, diperoleh: $\overline{X \cup Y} = \overline{Y}$ dan $\overline{X} \cup \overline{Y} = \overline{Y}$.

   Dengan demikian, terbukti bahwa $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$.

Hal tersebut menunjukkan $X \subseteq Y$ jika $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$ dan $\underline{X} \subseteq \underline{Y}$.

6. Misalkan $X \subseteq X \cup Y$ dan $Y \subseteq X \cup Y$, berdasarkan No. 5 bahwa $\underline{X} \subseteq \underline{Y}$, diperoleh: $\underline{X} \subseteq \underline{X \cup Y}$ dan $\underline{Y} \subseteq \underline{X \cup Y}$. Dengan demikian, terbukti bahwa $\underline{X} \cup \underline{Y} \subseteq \underline{X \cup Y}$.
7. Diberikan $X \cap Y \subset X$ dan $X \cap Y \subseteq Y$ berdasarkan pembuktian No. 5 bahwa $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$, diperoleh: $\overline{X \cap Y} \subseteq \overline{X}$ dan $\overline{X \cap Y} \subseteq \overline{Y}$.

   Dengan demikian, terbukti $\overline{X} \cap \overline{Y} \subseteq \overline{X \cap Y}$ (Kuroki, 1997). ■

Untuk lebih memahami proposisi tersebut, berikut diberikan contoh mengenai Proposisi 2.2.6.

Contoh 2.2.6

Diberikan $\mathbb{Z}_9 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}\}$ merupakan himpunan bilangan bulat modulo 9 dan $+_9$ operasi penjumlahan modulo 9. Pada himpunan $\mathbb{Z}_9$ didefinisikan relasi R yaitu aRb dengan $a, b \in \mathbb{Z}_9$ jika dan hanya jika $a \equiv b (\text{mod } 4) \in \mathbb{Z}$. Dengan kata lain, $4|(a - b)$. Berikut akan dibuktikan bahwa R adalah relasi ekuivalensi pada himpunan $\mathbb{Z}_9$.

1. Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_9$ maka $a \equiv a (\text{mod } 4) \in \mathbb{Z}$ artinya $a - a = 4k$ dengan $k \in \mathbb{Z}$, hal ini benar untuk bilangan bulat $k = 0$. Oleh karena itu, R bersifat refleksif.
2. Jika $a \equiv b (\text{mod } 4) \in \mathbb{Z}$ maka $b \equiv a (\text{mod } 4) \in \mathbb{Z}$, $a \equiv b (\text{mod } 4)$ artinya $a - b = 4k$ dan $b \equiv a (\text{mod } 4)$ artinya $b - a = -4k$ karena $k \in \mathbb{Z}$. Oleh karena itu, jika aRb maka bRa. Dengan kata lain R bersifat simetris.
3. Jika aRb dan bRc maka aRc,

   $a \equiv b (\text{mod } 4)$ artinya $a - b = 4k$

   $c \equiv b (\text{mod } 4)$ artinya $c - b = 4l$

   diperoleh $\quad (a - b) - (c - b) = 4k - 4l$

   $$(a - c) = 4(k - l).$$

   Karena $(k - l) \in \mathbb{Z}$ artinya $a \equiv c (\text{mod } 4)$. Oleh karena itu, R bersifat transitif.

Dengan demikian, relasi R merupakan relasi ekuivalensi pada himpunan $\mathbb{Z}_9$.

Selanjutnya akan ditentukan kelas-kelas ekuvalensi $\mathbb{Z}_9$ adalah

$E_1 = \{\bar{1}, \bar{5}\}$,

$E_2 = \{\bar{2}, \bar{6}\}$,

$E_3 = \{\bar{3}, \bar{7}\}$,

$E_4 = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$.

Jika $X = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{5}\}$ dan $Y = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$, maka aproksimasi bawah dan aproksimasi atas dari X dan Y adalah sebagai berikut:

$\underline{X} = E_1 = \{\bar{1}, \bar{5}\}$,

$\bar{X} = E_1 \cup E_2 \cup E_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{8}\}$,

$\underline{Y} = E_1 \cup E_2 = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{5}, \bar{6}\}$,

$\bar{Y} = E_1 \cup E_2 \cup E_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{8}\}$.

Setelah menunjukkan aproksimasi bawah dan aproksimasi atas dari X dan Y, selanjutnya akan diberikan contoh sesuai sifat-sifat pada Proposisi 2.2.6.

1. Diketahui $X = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{5}\}$ dengan $\underline{X} = E_1 = \{\bar{1}, \bar{5}\}$ dan $\bar{X} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{8}\}$.

   Dengan demikian, terbukti bahwa $\underline{X} \subseteq X \subseteq \bar{X}$, yaitu: $\{\bar{1}, \bar{5}\} \subseteq \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{5}\} \subseteq \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{8}\}$.

2. Diketahui $U = \mathbb{Z}_9$, maka

   $\underline{U} = \mathbb{Z}_9$,

   $\bar{U} = \mathbb{Z}_9$.

   Dengan demikian, terbukti $\underline{U} = U = \bar{U}$.

3. $X \cap Y = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{5}\}$,

   $\underline{X \cap Y} = \{\bar{1}, \bar{5}\}$,

   $\underline{X} \cap \underline{Y} = \{\bar{1}, \bar{5}\}$.

   Dengan demikian, terbukti bahwa $\underline{X \cap Y} = \underline{X} \cap \underline{Y}$ yaitu: $\{\bar{1}, \bar{5}\}$.

4. $X \cup Y = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$,

   $\overline{X \cup Y} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{8}\}$,

   $\bar{X} \cup \bar{Y} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{8}\}$.

   Dengan demikian, terbukti bahwa $\overline{X \cup Y} = \bar{X} \cup \bar{Y}$ yaitu: $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{8}\}$.

5. Diketahui $X \subseteq Y$,

   $\bar{X} \subseteq \bar{Y}$ diperoleh $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{8}\} \subseteq \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{8}\}$,

$\underline{X} \subseteq \underline{Y}$ diperoleh $\{\bar{1}, \bar{5}\} \subseteq \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{5}, \bar{6}\}$.

Dengan demikian, terbukti bahwa $X \subseteq Y$ berarti $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$ dan $\underline{X} \subseteq \underline{Y}$.

6. $X \cup Y = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$,

   $\underline{X \cup Y} = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{5}, \bar{6}\}$,

   $\underline{X} \cup \underline{Y} = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{5}, \bar{6}\}$.

   Dengan demikian, terbukti bahwa $\underline{X \cup Y} = \underline{X} \cup \underline{Y}$ yaitu: $\{\bar{1}, \bar{2}, \bar{5}, \bar{6}\}$.

7. $X \cap Y = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{5}\}$,

   $\overline{X \cap Y} = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{5}, \bar{6}\}$,

   $\bar{X} \cap \bar{Y} = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{5}, \bar{6}\}$.

   Dengan demikian, terbukti bahwa $\overline{X \cap Y} = \bar{X} \cap \bar{Y}$ yaitu: $\{\bar{1}, \bar{2}, \bar{5}, \bar{6}\}$.

Selanjutnya akan didefinisikan mengenai himpunan *rough*.

Himpunan *rough* pertama kali diperkenalkan oleh Pawlak pada awal tahun 1980-an. Menurut Pawlak (2002), metode himpunan *rough* adalah suatu pendekatan matematis baru untuk menganalisa pola data yang bersifat samar atau tak pasti.

Definisi 2.2.7 Misalkan θ adalah relasi ekuivalensi pada himpunan semesta S, pasangan (S, θ) adalah ruang aproksimasi.

Suatu himpunan bagian $X \subseteq S$, jika $\overline{X} - \underline{X} \neq \emptyset$, maka X disebut himpunan *rough* (Pawlak, 1982).

Contoh 2.2.7

Berdasarkan Contoh 2.2.5, diketahui $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $\underline{X} = \{x_1, x_2\} \cup \{x_4\} = \{x_1, x_2, x_4\}$, dan $\overline{X} = \{x_1, x_2\} \cup \{x_4\} \cup \{x_3, x_7, x_{10}\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_7, x_{10}\}$. Oleh karena itu, diperoleh $Apr(X) = (\{x_1, x_2\} \cup \{x_4\}, \{x_1, x_2\} \cup \{x_4\} \cup \{x_3, x_7, x_{10}\})$. Jadi, $Apr\ (X) = (\{x_1, x_2, x_4\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_7, x_{10}\})$ merupakan himpunan *rough* karena $\overline{X} - \underline{X} \neq \emptyset$.

2.3 Grup dan Subgrup *Rough*

Setelah memahami definisi himpunan *rough*, berikut akan diberikan definisi dari grup *rough*.

Definisi 2.3.1 Misalkan $K = (S, \theta)$ adalah ruang aproksimasi dan $*$ adalah operasi biner pada S. Himpunan $G \subseteq S$ disebut grup *rough* jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. untuk setiap $x, y \in G$, berlaku $x * y \in \overline{G}$,
2. untuk setiap $x, y, z \in G$, berlaku $(x * y) * z = x * (y * z) \in \overline{G}$ ($*$ bersifat assosiatif di $\overline{G}$),
3. terdapat $e \in \overline{G}$ sedemikian sehingga $x * e = e * x = x$, untuk setiap $x \in G$, Elemen e disebut sebagai elemen identitas *rough* di G,
4. untuk setiap $x \in G$, terdapat $y \in G$ sedemikian sehingga $x * y = y * x = e$. Elemen y disebut sebagai elemen invers *rough* dari x di G (Miao dkk., 2005).

Berikut akan diberikan contoh grup *rough*.

Contoh 2.3.1 (Miao dkk., 2005)

Diberikan $\mathbb{Z}_9 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}\}$ merupakan himpunan kelas modulo 9 dan $+_9$ operasi penjumlahan modulo 9. Kelas-kelas ekuivalensi $\mathbb{Z}_9$ adalah ${}^{\mathbb{Z}_9}/_{R} = \{E_1, E_2, E_3\}$, dengan

$E_1 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$,

$E_2 = \{\overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$,

$E_3 = \{\overline{6}, \overline{7}, \overline{8}\}$.

Diberikan $X_1 = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{7}, \overline{8}\}$, diperoleh $\overline{X_1} = E_1 \cup E_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}\}$

Karena $\overline{2}(+_9)\overline{1} = \overline{3} \notin \overline{X_1}$, sehingga X_1 bukan grup *rough*.

Diberikan $X_2 = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}\}$, diperoleh $\overline{X_2} = E_1 \cup E_2 \cup E_3 = \mathbb{Z}_9$. Karena

(1) untuk setiap $x, y \in X_2$, $x(+_9)y \in \overline{X_2}$;

(2) operasi $(+_9)$ bersifat assosiatif di $\overline{X_2}$;

(3) terdapat $\bar{0} \in \overline{X_2}$, sehingga $\bar{2}(+_9)\bar{0} = \bar{0}(+_9)\bar{2} = \bar{2}$;

(4) untuk setiap $\bar{x} \in X_2$, terdapat $\bar{y} \in X_2$ sehingga $\bar{x}(+_9)\bar{y} = \bar{0}$ atau $\bar{y} = (\bar{x})^{-1}$, yaitu $(\bar{0})^{-1} = \bar{0} \in X_2$ $(\bar{2})^{-1} = \bar{7} \in X_2$, $(\bar{7})^{-1} = \bar{2} \in X_2$, $(\bar{3})^{-1} = \bar{6} \in X_2$, $(\bar{6})^{-1} = \bar{3} \in X_2$, $\left(\bar{5}\right)^{-1} = \bar{4} \in X_2$, dan $(\bar{4})^{-1} = \bar{5} \in X_2$.

Oleh karena itu, X_2 merupakan grup *rough*.

Setelah memahami grup *rough*, selanjutnya akan didefinisikan subgrup pada himpunan *rough*.

Definisi 2.3.2 Jika $H \subseteq G \subseteq U$, dengan $H \neq 0$ dan $(Apr(H),*)$ grup *rough*, maka $Apr(H)$ merupakan subgrup *rough* dari $Apr(G) = (\underline{G}, \overline{G})$ dan dinotasikan dengan $Apr(H) \leq Apr(G)$ (Miao dkk., 2005).

Untuk lebih memahami Definisi 2.3.2 berikut diberikan teorema subgrup.

Teorema 2.3.2 Himpunan bagian H dari grup *rough* G merupakan subgrup *rough* jika dan hanya jika:

(i) untuk setiap $x, y \in H, x * y \in \overline{H}$;

(ii) untuk setiap $x \in H, x^{-1} \in H$ (Miao dkk., 2005).

Bukti:

Jika H merupakan subgrup *rough* G, maka (i) dan (ii) terpenuhi. Sebaliknya, berdasarkan (i) diperoleh untuk setiap $x, y \in H$ berlaku $x * y \in \overline{H}$, dan berdasarkan (ii) diperoleh untuk setiap $x \in H, x^{-1} \in H$. Berdasarkan (i) dan (ii), diperoleh untuk setiap $x \in H, x * x^{-1} = e \in \overline{H}$. Karena sifat assosiatif berlaku di $\bar{G}$, sifat assosiatif juga berlaku di $\overline{H}$. Oleh karena itu,terbukti H merupakan subgrup *rough* G. ■

Berikut akan diberikan contoh mengenai subgrup *rough*.

Contoh 2.3.2

Berdasarkan Contoh 2.3.1, diberikan $Y \subseteq X_2$ dengan $Y = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}\}$ diperoleh $\overline{Y} = E_1 \cup E_2 \cup E_3 = \mathbb{Z}_9$. Karena

(i) untuk setiap $x, y \in Y$, $x(+_9)y \in \overline{Y}$, yaitu $\overline{3}(+_9)\overline{6} = \overline{0} \in \overline{Y}$,

(ii) untuk setiap $\bar{x} \in Y$, terdapat $\bar{y} \in Y$ sehingga $\bar{x}(+_9)\bar{y} = \overline{0}$ atau $\bar{y} = (\bar{x})^{-1}$, yaitu $(\overline{3})^{-1} = \overline{6} \in Y$.

Akibatnya Y merupakan subgrup *rough* dari grup *rough* X_2.

2.4 Homomorfisma Grup *Rough*

Setelah memahami grup *rough*, selanjutnya akan diberikan definisi mengenai homomorfisma himpunan *rough*.

Definisi 2.4.1 Diberikan (S_1, θ_1), (S_2, θ_2) merupakan dua ruang aproksimasi dan dilengkapi dengan operasi biner $*$ pada S_1 dan operasi biner $\overline{*}$ pada S_2. Misalkan $G_1 \subseteq S_1$ dan $G_2 \subseteq S_2$ merupakan dua grup *rough*. G_1, G_2 dikatakan homomorfisma himpunan *rough* jika terdapat pemetaan surjektif $\varphi: \overline{G_1} \to \overline{G_2}$ sedemikian sehingga untuk setiap x, $y \in \overline{G_1}$, berlaku $\varphi(x * y) = \varphi(x) \overline{*} \varphi(y)$ (Miao dkk., 2005).

Berikut akan diberikan contoh mengenai homomorfisma dari grup *rough*.

Contoh 2.4.1

Pertama akan dibentuk grup *rough* dari suatu ruang aproksimasi. Diberikan $(\mathbb{Z}_{12}, \theta_1)$ merupakan ruang aproksimasi dengan $\mathbb{Z}_{12}$ himpunan kelas modulo 12, θ_1 merupakan relasi ekuivalensi pada $\mathbb{Z}_{12}$ yang didefinisikan $x\theta_1 y$ jika dan hanya jika $4|(x - y)$ serta dilengkapi operasi biner $+_{12}$ pada $\mathbb{Z}_{12}$ sehingga diperoleh kelas-kelas ekuvalensi sebagai berikut:

$E_1 = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{9}\}$,

$E_2 = \{\bar{2}, \bar{6}, \overline{10}\}$,

$E_3 = \{\bar{3}, \bar{7}, \overline{11}\}$,

$E_4 = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$.

Selanjutnya diberikan $G_1 = \{\bar{0}, \bar{2}, \overline{10}\}$, diperoleh $\overline{G_1} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}\}$. Karena

(1) untuk setiap $x, y \in G_{1,}\, x(+_{12})y \in \overline{G_1}$;

(2) operasi $(+_{12})$ bersifat assosiatif di $\overline{G_1}$;

(3) terdapat $\bar{0} \in \overline{G_1}$, sehingga $\bar{2}(+_{12})\bar{0} = \bar{0}(+_{12})\bar{2} = \bar{2}$;

(4) untuk setiap $\bar{x} \in G_1$, terdapat $\bar{y} \in G_1$ sehingga $\bar{x}(+_{12})\bar{y} = \bar{0}$ atau $\bar{y} = (\bar{x})^{-1}$,
yaitu $(\bar{0})^{-1} = \bar{0} \in G_1$, $(\bar{2})^{-1} = \overline{10} \in G_1$, dan $(\overline{10})^{-1} = \bar{2} \in G_1$.

Oleh karena itu, G_1 merupakan grup *rough*.

Langkah berikutnya akan dibentuk grup *rough* kedua dari suatu ruang aproksimasi. Diberikan $(\mathbb{Z}_{24}, \theta_2)$ merupakan ruang aproksimasi dengan $\mathbb{Z}_{24}$ himpunan kelas modulo 24, θ_2 merupakan relasi ekuivalensi pada $\mathbb{Z}_{24}$ yang didefinisikan $x\theta_2 y$ jika dan hanya jika $4|(x-y)$ serta dilengkapi operasi biner $+_{24}$ pada $\mathbb{Z}_{24}$ sehingga diperoleh kelas-kelas ekuvalensi sebagai berikut:

$E_1 = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{9}, \overline{13}, \overline{17}, \overline{21}\}$,

$E_2 = \{\bar{2}, \bar{6}, \overline{10}, \overline{14}, \overline{18}, \overline{22}\}$,

$E_3 = \{\bar{3}, \bar{7}, \overline{11}, \overline{15}, \overline{19}, \overline{23}\}$,

$E_4 = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}\}$.

Selanjutnya diberikan $G_2 = \{\overline{10}, \overline{12}, \overline{14}\}$, diperoleh $\overline{G_2} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}, \overline{22}\}$. Karena

(1) untuk setiap $x, y \in G_{2,}\, x(+_{24})y \in \overline{G_2}$;

(2) operasi $(+_{24})$ bersifat assosiatif di $\overline{G_2}$;

(3) terdapat $\bar{0} \in \overline{G_2}$, sehingga $\overline{10}(+_{24})\bar{0} = \bar{0}(+_{24})\overline{10} = \overline{10}$;

(4) untuk setiap $\bar{x} \in G_2$, terdapat $\bar{y} \in G_2$ sehingga $\bar{x}(+_{24})\bar{y} = \bar{0}$ atau $\bar{y} = (\bar{x})^{-1}$,
yaitu $(\overline{10})^{-1} = \overline{14} \in G_2$, $(\overline{14})^{-1} = \overline{10} \in G_2$, dan $(\overline{12})^{-1} = \overline{12} \in G_2$.

Oleh karena itu, G_2 merupakan grup *rough*.

Setelah mengkonstruksi dua grup *rough* dari suatu ruang aproksimasi yang berbeda, G_1 dan G_2 dapat dikatakan homomorfisma grup *rough* karena terdapat pemetaan $\varphi: \overline{G_1} \to \overline{G_2}$ dengan $\varphi(a) = 2a$ sedemikian sehingga untuk setiap $a, b \in \overline{G_1}$ berlaku $\varphi(a +_{12} b) = \varphi(a) +_{24} \varphi(b)$.

Akan ditunjukkan $\varphi: \overline{G_1} \to \overline{G_2}$ dengan $\varphi(a +_{12} b) = \varphi(a) +_{24} \varphi(b)$.

$\varphi(a +_{12} b) = 2(a +_{24} b)$

$= 2(a) +_{24} 2(b)$

$= \varphi(a) +_{24} \varphi(b)$.

Karena $\varphi(a +_{12} b) = 2(a +_{24} b)$, sehingga dapat disimpulkan bahwa $\varphi: \overline{G_1} \to \overline{G_2}$ merupakan homomorfisma grup *rough*.

Selanjutnya akan diberikan definisi *kernel* dan *image*. Berikut definisi *kernel*.

Definisi 2.4.2 Diberikan $\varphi: G \to G_1$ homomorfisma grup, maka *kernel* dari φ, dinotasikan ker (φ), didefinisikan sebagai berikut:

$$\ker(\varphi) = \varphi^{-1}(e_1) = \{ a \in G \mid \varphi(a) = e_1 \},$$

dengan e_1 elemen identitas di G_1 (Gallian, 2010).

Contoh 2.4.2

Berdasarkan Contoh 2.4.1 diberikan grup *rough* G_1, G_2 dan $\varphi: \overline{G_1} \to \overline{G_2}$ dengan $\varphi(a) = 2a$, untuk setiap $a \in \overline{G_1}$. Akan ditunjukkan *kernel* dari φ.

ker (φ) = $\{a \in \overline{G_1} | \varphi(a) = e_2\}$

$= \{ a \in \overline{G_1} | \varphi(a) = 0\}$

$= \{ a \in \overline{G_1} | 2a = 0\}$

$= \{ a \in \overline{G_1} \mid a = 0\}$

$= \{0\}$.

Selanjutnya akan diberikan definisi bayangan (*image*) dari suatu homomorfisma grup.

Definisi 2.4.3 Diberikan $\varphi: G \rightarrow G_1$. Himpunan semua anggota dari G_1 yang mempunyai kawan di G disebut peta atau bayangan (*image*) dari G oleh φ, dinotasikan im (φ) yaitu:

im $(\varphi) = \{b \in G_1 | (\exists\, a \in G)\varphi(a) = b\} = \{\varphi(a) | a \in G\}$ (Gallian, 2010).

Contoh 2.4.3

Berdasarkan Contoh 2.4.1, diberikan grup *rough* G_1, G_2 dan $\varphi: \overline{G_1} \rightarrow \overline{G_2}$ dengan $\varphi(a) = 2a$, untuk setiap $a \in \overline{G_1}$. Akan ditunjukkan *image* dari φ.

im (φ) = $\{ b \in \overline{G_2} | \exists a \in \overline{G_1}, b = \varphi(a)\}$

= $\{ b \in \overline{G_2} | \exists a \in \overline{G_1}, b = 2a \}$

= $\{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}\}$

2.5 Barisan Eksak dan Barisan U-eksak

Pada bagian ini akan didefinisikan barisan eksak dan U-eksak pada ruang aproksimasi yang akan digunakan untuk penentuan barisan eksak pada himpunan *rough*.

Namun terlebih dahulu perlu diingat kembali definisi modul, submodul dan homomorfisma modul.

Berikut ini akan diberikan definisi modul atas ring.

Definisi 2.5.1 Diberikan grup komutatif $\langle M, +\rangle$ dan ring R dengan elemen satuan 1_R, serta operasi $\circ: R \times M \rightarrow M$. Grup M disebut modul kiri atas ring R apabila memenuhi aksioma-aksioma:

1. $r \circ (m + n) = r \circ m + r \circ n$
2. $(r + s) \circ m = r \circ m + s \circ m$
3. $(r.s) \circ m = r \circ (s \circ m)$
4. $1_R \circ m = m$, 1_R adalah unsur satuan di R

untuk setiap r, s di R dan m, n di M.

Diberikan grup komutatif $\langle M, +\rangle$ dan ring R dengan elemen satuan 1_R, serta operasi $\circ: M \times R \to M$. Grup M disebut modul kanan atas ring R apabila memenuhi aksioma-aksioma:

1. $(m+n) \circ r = m \circ r + n \circ r$
2. $m \circ (r+s) = m \circ r + m \circ s$
3. $m \circ (r.s) = (m \circ r) \circ s$
4. $m \circ 1_R = m$, 1_R adalah unsur satuan di R

untuk setiap r, s di R dan m, n di M (Wahyuni dkk., 2016).

Untuk lebih memahami Definisi 2.5.1, berikut ini akan diberikan contoh modul atas ring.

Contoh 2.5.1

Diberikan sebarang ring R. Akan ditunjukkan grup komutatif R^n merupakan modul kiri atas R terhadap operasi pergandaan skalar: $a(r_1, r_2, \dots, r_n) = (ar_1, ar_2, \dots, ar_n)$, untuk setiap $a \in R$ dan $(r_1, r_2, \dots, r_n) \in R^n$.

Untuk menunjukkan bahwa grup komutatif R^n merupakan modul kiri atas R, operasi pergandaan skalar terhadap modul kiri atas R harus memenuhi aksioma-aksioma modul.

Untuk setiap $a, b \in R$ dan $(r_1, r_2, \dots, r_n), (s_1, s_2, \dots, s_n) \in R^n$, berlaku:

i. $$\begin{aligned} a\big((r_1, r_2, \dots, r_n) + (s_1, s_2, \dots, s_n)\big) &= a(r_1 + s_1, r_2 + s_2, \dots, r_n + s_n) \\ &= (ar_1 + as_1, ar_2 + as_2, \dots, ar_n + as_n) \\ &= (ar_1, ar_2, \dots, ar_n) + (as_1, as_2, \dots, as_n) \\ &= a(r_1, r_2, \dots, r_n) + a(s_1, s_2, \dots, s_n) \end{aligned}$$

ii. $$\begin{aligned} (a+b)(r_1, r_2, \dots, r_n) &= \big((a+b)r_1, (a+b)r_2, \dots, (a+b)r_n\big) \\ &= (ar_1 + br_1, ar_2 + br_2, \dots, ar_n + br_n) \\ &= (ar_1, ar_2, \dots, ar_n) + (br_1, br_2, \dots, br_n) \\ &= a(r_1, r_2, \dots, r_n) + b(r_1, r_2, \dots, r_n) \end{aligned}$$

iii. $(ab)(r_1, r_2, \dots, r_n) = \big((ab)r_1, (ab)r_2, \dots, (ab)r_n\big)$
$= \big(a(br_1), a(br_2), \dots, a(br_n)\big)$
$= a(br_1, br_2, \dots, r_n)$
$= a\big(b(r_1, r_2, \dots, r_n)\big)$

iv. $1(r_1, r_2, \dots, r_n) = (1r_1, 1r_2, \dots, 1r_n)$
$= (r_1, r_2, \dots, r_n)$

Karena aksioma modul kiri terpenuhi, akibatnya R^n merupakan modul kiri atas R.

Setelah memahami definisi modul, berikutnya akan diberikan definisi submodul.

Definisi 2.5.2 Diberikan R-modul M. Suatu himpunan tak kosong $S \subseteq M$ disebut submodul dari M jika S merupakan subgrup dari M terhadap operasi penjumlahan, serta S juga merupakan modul atas R terhadap operasi pergandaan skalar yang sama dengan operasi pergandaan pada R-modul M (Wahyuni dkk., 2016).

Contoh 2.5.2

Pada modul $\mathbb{Z}$ atas $\mathbb{Z}$, himpunan $5\mathbb{Z}$ merupakan submodul dari $\mathbb{Z}$. Karena apabila diambil sebarang $5k_1, 5k_2 \in 5\mathbb{Z}$ dan $r \in \mathbb{Z}$, diperoleh bahwa $5k_1 - 5k_2 = 5(k_1 - k_2) \in 5\mathbb{Z}$ dan $r5k_1 = 5(rk_1) \in 5\mathbb{Z}$.

Selanjutnya diberikan definisi homomorfisma modul atas ring.

Definisi 2.5.3 Diberikan modul M dan M' atas ring R serta pemetaan $f: M \to M'$. Pemetaan f disebut homomorfisma R-modul jika untuk setiap $m_1, m_2 \in M$ dan $r \in R$ memenuhi:

(i) $f(m_1 + m_2) = f(m_1) +' f(m_2)$ untuk setiap $m_1, m_2 \in M$,

(ii) $f(r \circ m_1) = r \circ' f(m_1)$ untuk setiap $r \in R$, $m_1 \in M$ (Wahyuni dkk., 2016).

Contoh 2.5.3

Diberikan modul $\mathbb{Z}$ atas ring $\mathbb{Z}$. Didefinisikan: $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, dengan $f(a) = 3a$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$.

Akan ditunjukkan $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ merupakan homomorfisma modul $\mathbb{Z}$ atas ring $\mathbb{Z}$.

i. Diberikan sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$, berlaku:

$$\begin{aligned} f(a+b) &= 3(a+b) \\ &= 3a + 3b \\ &= f(a) + f(b). \end{aligned}$$

ii. Diberikan sebarang $n \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{Z}$, berlaku:

$$\begin{aligned} f(na) &= 3(na) \\ &= n(3a) \\ &= nf(a). \end{aligned}$$

Setelah memahami modul atas ring, submodul dan homomorfisma modul, berikutnya akan diberikan definisi barisan eksak.

Definisi 2.5.4 Misalkan R ring. Barisan R -modul

$$\ldots \rightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \rightarrow \ldots$$

dikatakan eksak pada M_i jika terdapat R-homomorfisma f_i dan f_{i+1} serta memenuhi im (f_i) = ker (f_{i+1}).

Barisan dikatakan eksak jika untuk setiap barisan pada M_i merupakan barisan eksak (Davvaz & Garamaleky, 1999).

Berikut akan diberikan contoh mengenai barisan eksak.

Contoh 2.5.4 (Yanita, 2007)

Barisan $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_m \rightarrow 0$ dengan $f(a) = \mathrm{m}a$ untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ dan $g(a) = \bar{k}$ untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$; $\bar{0} \leq \bar{k} < \overline{m-1}$; $a \bmod m = \bar{k}$. Barisan ini adalah barisan eksak.

Langkah pertama akan dibuktikan bahwa f dan g adalah homomorfisma R-modul.

Didefinisikan $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, dengan $f(a) = \mathrm{m}a$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ akan ditunjukkan f adalah homomorfisma R-modul.

i. Diberikan sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$. Berlaku:

$f\ (a+b) = m\ (a+b)$

$= ma + mb$

$= f\ (a) + f\ (b)$.

ii. Diberikan sebarang $n \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{Z}$. Berlaku:

$f(na) = m(na)$

$= n(ma)$

$= nf(a)$.

Karena kedua aksioma terpenuhi, akibatnya f adalah homomorfisma R-modul.

Selanjutnya didefinisikan $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$ dengan $g(a) = \bar{k}$ untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$; $\bar{0} \leq \bar{k} < \overline{m-1}; a \bmod m = \bar{k}$ akan ditunjukkan g adalah homomorfisma R-modul.

i. Diberikan sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$. Berlaku:

$g\ (a+b) = (a+b) \bmod m$

$= a \bmod m + b \bmod m$

$= g\ (a) + g(b)$.

ii. Diberikan sebarang $n \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{Z}$. Berlaku:

$g(na) = (na) \bmod m$

$= n(a \bmod m)$

$= ng(a)$.

Karena kedua aksioma terpenuhi, akibatnya g adalah homomorfisma R-modul.

Langkah berikutnya untuk membuktikan barisan ini barisan eksak cukup ditunjukkan f injektif, g surjektif dan $\mathrm{im}\ (f) = \ker\ (g)$.

a. Akan ditunjukkan f injektif. Dengan sifat fungsi cukup dibuktikan $\ker(f) = \{0\}$. Ambil sebarang $x \in \ker(f)$. Diperoleh $f(x) = 0 = mx$. Dengan kata lain diperoleh $x = 0$. Atau terbukti $\ker(f) = \{0\}$.

b. Akan ditunjukkan g surjektif. Dengan sifat fungsi dibuktikan $\mathrm{im}(g) = \mathbb{Z}_m$. $\mathrm{im}\ (g) = \{g(z) | z \in \mathbb{Z}\} = \left\{\bar{k} \middle| \bar{0} \leq \bar{k} < \overline{m-1}; \bar{k} = z \bmod m\right\} = \mathbb{Z}_m$.

c. Akan ditunjukkan im $(f) = \ker(g)$.

$$\begin{aligned}\text{im }(f) &= \{f(a)|a \in \mathbb{Z}\}\\ &= \{ma|a \in \mathbb{Z}\}\\ &= \{g(a) = \bar{0}|a \in \mathbb{Z}\}\\ &= \ker(g).\end{aligned}$$

Setelah memahami definisi barisan eksak, berikut ini akan diberikan definisi dari barisan U-eksak.

Definisi 2.5.5 Barisan dari R-modul dan R-homomorfisma

$$\ldots \to M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \to \ldots$$

disebut barisan U_{i+1}–eksak di M_i jika Im $(f_i) = f_{i+1}^{-1}(U_{i+1})$ dengan U_{i+1} adalah submodul dari M_{i+1} (Davvaz & Garamaleky, 1999).

Untuk memahami Definisi 2.5.5, berikut akan diberikan contoh mengenai barisan U-eksak.

Contoh 2.5.5

Diberikan modul $\mathbb{Z}$ atas $\mathbb{R}$ dan U submodul dari $\mathbb{Z}_4$. Barisan $0 \to 2\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_4 \to 0$ dengan $f: 2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(a) = a$ untuk setiap $a \in 2\mathbb{Z}$ dan $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_4, g(a) = a$ mod 4 untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$. Barisan ini merupakan barisan U-eksak di $\mathbb{Z}_4$.
Hal ini dikarenakan, asumsikan f injektif, g surjektif dan im $(f) = \ g^{-1}(U_{\mathbb{Z}_4})$.

2.6 Barisan Eksak *Rough*

Setelah memahami definisi grup *rough* dan barisan eksak, berikut ini akan diberikan definisi dari barisan eksak *rough*.

Definisi 2.6.1 Barisan $\overline{M'} \xrightarrow{\alpha} \overline{M} \xrightarrow{\beta} \overline{M''}$. Homomorfisma modul *rough* atas ring Apr (R) dikatakan eksak jika im $(\alpha) = \ker(\beta)$.

Hal ini terjadi jika dan hanya jika :

1. Untuk setiap $\beta\alpha = 0$;
2. Relasi $\beta(x) = 0$, $x \in \overline{M}$ berakibat $x = \alpha(x)$, untuk suatu $x' \in \overline{M'}$ (Sinha & Prakash, 2016).

Berikut ini diberikan contoh barisan eksak *rough*.

Contoh 2.6.1

Barisan $0 \rightarrow \overline{M'} \xrightarrow{p} \overline{M} \xrightarrow{q} \overline{M''} \rightarrow 0$ adalah eksak *rough* jika p adalah injektif (eksak di $\overline{M'}$), im (p) = ker (q) (eksak di $\overline{M}$) dan q surjektif (eksak di $\overline{M''}$). Barisan eksak *rough* tersebut merupakan barisan eksak *rough* pendek (Sinha & Prakash, 2016).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian dilaksanakan pada semester genap tahun ajaran 2021/2022 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

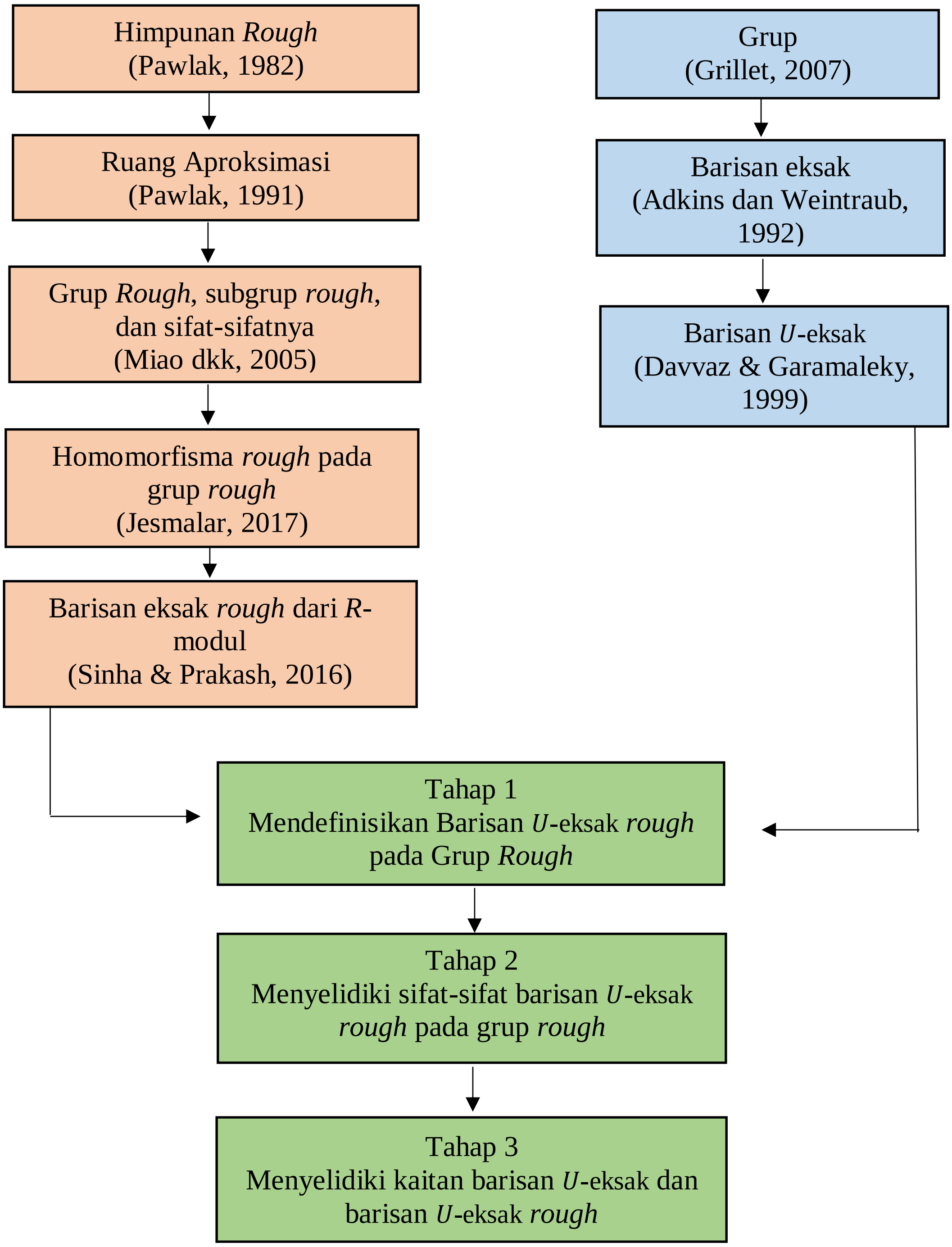
Penelitian ini menggunakan pendekatan studi literatur dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. studi literatur buku-buku dan jurnal ilmiah yang berhubungan dengan penelitian ini,
2. mempelajari definisi-definisi dan teorema yang berhubungan dengan penelitian ini.

Penelitian ini menggunakan metode analisis dengan mencari teori dan referensi yang sesuai dengan permasalahan. Oleh karena itu, diperlukan langkah-langkah penelitian sebagai berikut:

1. mendefinisikan barisan U-eksak *rough* pada grup *rough;*
2. menyelidiki sifat-sifat barisan U-eksak *rough* pada grup *rough;*
3. menyelidiki kaitan barisan U-eksak dan barisan U-eksak *rough*.

Berikut ini akan disajikan langkah-langkah penelitian



Gambar 3.2 Diagram Tahap Penelitian

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Barisan U-eksak *rough* pada grup *rough* merupakan perumuman dari barisan eksak *rough* dalam grup *rough*. Untuk mengkonstruksi barisan U-eksak *rough* pada grup *rough*, terlebih dahulu menentukan suatu ruang aproksimasi berhingga, menentukan grup *rough*, sampai membentuk suatu barisan dalam grup *rough*. Diberikan ruang aproksimasi tak kosong (S, θ), himpunan K, L, M merupakan himpunan bagian dari S. Misalkan K, L, M merupakan grup *rough*, dan U adalah subgrup *rough* dari M. Barisan $\overline{K} \xrightarrow{f} \overline{L} \xrightarrow{g} \overline{M}$ disebut U-eksak *rough* pada grup *rough*, jika Im $(f) = g^{-1}(\overline{U})$.

Selanjutnya diperoleh salah satu sifat barisan yaitu diberikan (S, θ) ruang aproksimasi, dan K, L, M grup *rough* kemudian U_1 dan U_2 merupakan subgrup *rough* dari M, $U_1 \neq U_2$ dengan $\overline{U_1} = \overline{U_2}$ sehingga barisan $\overline{K} \xrightarrow{f} \overline{L} \xrightarrow{g} \overline{M}$ merupakan U_1-eksak *rough* maka diperoleh juga U_2-eksak *rough*.

5.2 Saran

Berdasarkan penelitian yang dilakukan, dalam mengkonstruksi suatu barisan U-eksak masih sedikit ditemukan sifat-sifatnya dalam grup *rough*. Hal ini dapat memungkinkan masih terdapat sifat-sifat lain dari barisan U-eksak *rough* pada grup *rough* dari himpunan semesta yang berhingga ataupun tidak berhingga.

DAFTAR PUSTAKA

Anvanriyeh, S. M., and Davvaz, B. On Quasi-Exact Sequences. *Bull. Korean Math. Soc. 2005, 42,* 149-155.

Adkins, W. A. dan Weintraub, S.H. 1992. *Algebra An Approach Via Module Theory.*Springer-Verlag, New York.

Barnier, W., Feldman, N. 1990. *Introduction to Advanced Mathematics, Prentice-hall International*, New Jersey: 116 - 153.

Biswas, R. dan Nanda, S. 1994. Rough Groups and Rough Subring. *Bull. Polish Acad. Sci. Math*. 42:251-254.

Davvaz, B dan Parnian-Garamaleky, Y. A. 1999. A note on exact sequences. *Bull, Malays. Math.*Sci. Soc. (2) 22 (1), 53-56.

Davvaz, B. 2004. Roughness in rings. *Information Sciences,164*, 147–163.

Davvaz, B. dan Mahdavipour, M. 2016. *Roughness in Modules*, Information Sciences 176, 3658-3674. DOI: 10.1016/j.ins.2006.02.014.

Fitriani, Surodjo, B. dan Wijayanti, I. E. 2016. On Sub-Exact Sequences. *Far East J. Math. Sci*. vol. 100. No. 7. pp. 1055-1065.

Fitriani, Surodjo, B., & Wijayanti, I. E. 2018. Generalization of $\mathcal{U}$-generator and m-sub-generator related to category $\sigma[m]$. *Journal of Mathematics Research*. 10(4): 101-106.

Gallian. J.A. 2010. Contemporary Abstract Algebra. United State of America

Grillet, P. A. 2007. *Abstract Algebra (2^{nd} edition)*. New York: Springer.

Han, S. 2001. The Homomorphism and Isomorphism of Rough Groups. *Academy of Shanxi University*, 24, 303-305.

Herstein, I. N. 1975. *Topics in Algebra*. New York: John Wiley & Sons.

Issac, P dan Nelima, C.A. 2013. Rough ideals and their properties. *Journal of Global Research in Mathematical Archives*. 1(6), 90-97.

Jesmalar, L. 2017. Homomorphism and isomorphism of Rough Groups. *International Journal of Advance Research, Ideas and Innovations in Technology*. 3(X), 1382-1387.

Kuroki, N. 1997. Rough Ideals in Semigroups. *Information Sciences*. North Holland. 139-163.

Madanshekaf, A. Quasi-Exact Sequence and Finitely Presented Modules. *Iran. J. Math. Sci. Informatics* 2008, 3, 49-53.

Miao, D., Han, S., Li, D., dan Sun, L. 2005. Rough group, Rough subgroup and their properties. *Lecture Notes in Artificial Intelligences*, 3641, 104-113.

Noor, H. 2017. *Cara Mudah Memahami Struktur Aljabar*. Malang: UB Press.

Pawlak, Z. 1982. *Rough Set, Internat J Comput Inform Sci*. 11(5), 341-356.

Pawlak, Z. 1991. *Rough sets-theoretical aspects of reasoning about data*. Dordrecht: Kluwer.

Pawlak, Z. 2002. *Primer On Rough Set :A New Approach To Drawing Conclusion From Data*. Vol. 22:1407.

Setyaningsih, N., Fitriani, dan A. Faisol. 2021. Sub-exact Sequence of Rough Groups. *Al-Jabar: Jurnal Pendidikan Matematika*. Vol. 12. No. 2. pp. 267-272.

Sinha dan Prakash. 2016. Rough Exact Sequences of Modules. *International Journal of Applied Engineering Research*.

Sripatmi dan Anwar, Y. S. 2015. Perumuman Lemma Snake dan Lemma Lima. *J. Pijar MIPA*. Vol. 10. No. 1.

Sriwahyuni, Wijayanti, I. E., D., 2016. *Teori Ring dan Modul*. Yogyakarta: Gadjah Mada University Press.

Suwilo, S., Tulus, dan Lubis, S.R. 1987. *Aljabar Abstrak Suatu Pengantar*. Medan: USU Press.

Yanita. 2007. Barisan Modul Eksak dan Barisan Homomorfisma Modul Eksak. *Jurnal Matematika*. Vol. 7. No. 1. pp. 1-8.