BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF SPLIT LINTASAN

(Tesis)

Oleh

SITI RAHMATALIA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2022

ABSTRAK

BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF SPLIT LINTASAN

Oleh

SITI RAHMATALIA

Graf split lintasan $spl(P_n)$ adalah graf G yang diperoleh dengan menambahkan setiap titik u pada G satu titik baru v, sedemikian sehingga v bertentangga dengan setiap titik yang bertetangga dengan u di G, dinyatakan dengan $spl(P_n)$. Graf barbel split lintasan $B_{spl(P_n)}$ adalah graf sederhana yang diperoleh dari dua graf barbel split lintasan yang dihubungkan oleh suatu jembatan. Subdivisi dari graf barbel split lintasan $B_{spl(P_n)}$ yang dinotasikan dengan $B^{*1}_{spl(p_n)}$ adalah graf yang diperoleh dari graf barbel split lintasan dengan menyisipkan $w = 1$ titik pada jembatan. Bilangan kromatik lokasi dari graf split lintasan $spl(P_n)$ untuk $n \geq 3$, adalah 4, demikian juga untuk graf barbel dan subdivisinya.

Kata kunci: Bilangan kromatik, graf split lintasan, graf barbel split lintasan, subdivisi dari graf barbel split lintasan

ABSTRACT

THE LOCATING CHROMATIC NUMBER OF SPLIT PATH GRAPH

Oleh

SITI RAHMATALIA

The split path graph $spl(P_n)$ is the graph G obtained by adding each vertices u to G a new vertices v, such that v is opposite to every vertices adjacent to u in G, denoted by $spl(P_n)$. The barbell split path graph $B_{spl(P_n)}$ is a simple graph obtained from two barbell split path graphs connected by a bridge. The subdivision graph of a barbell split graph, denoted by $B^{*w}_{spl(p_n)}$ is the graph obtained from the barbell split path graph by inserting $w = 1$ vertices on the bridge. The locating chromatic number of the split path graph $spl(P_n)$ for $n \geq 3$ is 4, as well as for the barbell graph and its subdivisions.

Keywords: the locating chromatic number, split path graph, barbell split path graph, subdivision of barbell split path graph

BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF SPLIT LINTASAN

Oleh

SITI RAHMATALIA

Tesis

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
MAGISTER MATEMATIKA

Pada

Program Studi Magister Matematika
Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2022

Judul Tesis : **BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF SPLIT LINTASAN**

Nama Mahasiswa : Siti Rahmatalia

Nomor Pokok Mahasiswa : 2027031008

Program Studi : Magister Matematika

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.	**Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si.**
NIP 19760411 200012 2 001	NIP 19731109 200012 2 001

2. Ketua Program Studi Magister Matematika

Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.
NIP 19760411 200012 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **1. Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.** ....

2. Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si. ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, S.Si., M.T.
NIP 19740705 200003 1 001

3. Direktur Program Pascasarjana

Prof. Dr. Ahmad Saudi Samosir, S.T., M.T.
NIP 19710415 199803 1 005

4. Tanggal Lulus Ujian Tesis : **1 Agustus 2022**

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	:	**Siti Rahmatalia**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**2027031008**
Program Studi	:	**Magister Matematika**
Jurusan	:	**Matematika**

Dengan ini menyatakan bahwa tesis saya bejudul, **"BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF SPLIT LINTASAN"** adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Semua tulisan yang tertuang dalam tesis ini telah mengikuti kaidah karya penulisan ilmiah Universitas Lampung. Apabila kemudian hari terbukti bahwa tesis ini merupakan salinan atau telah dibuat orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 10 Agustus 2022
Penulis,

10000
METERAI TEMPEL
CEDDEAJX931468241

SITI RAHMATALIA
NPM: 2027031008

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Bandar Lampung pada tanggal 01 April 1997. Sebagai anak kedua dari pasangan Bapak Sarifuddin dan Ibu Desi Deria Herawati, adik dari M. Aprizal Husni, serta kakak dari Muhammad Iqbal dan Winda Salsabila.

Penulis menempuh pendidikan Sekolah Dasar Negeri (SDN) 1 Sukarame pada tahun 2003-2009, Madrasah Tsanawiyah Negeri (MTsN) 2 Bandar Lampung pada tahun 2009-2012, Madrasah Aliyah Negeri (MAN) 1 Bandar Lampung pada tahun 2012-2015, penulis melanjutkan pendidikan di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung dan lulus pada tahun 2019.

Pada tahun 2020, penulis terdaftar sebagai mahasiswa program studi magister Matematika di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

KATA INSPIRASI

"Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan."
(Q.S. Al-Insyirah: 5-6)

"Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya."
(Q.S. Al-Baqarah: 286)

"Ada dua jenis orang yang susah dikalahkan di dunia ini yaitu, orang yang sabar dan orang yang tidak mudah menyerah ."
(Tere Liye)

"Setiap manusia adalah pemeran utama di kehidupannya. Jadi dirimulah yang menentukan bagaimana warna kehidupanmu."

"Niscaya Allah akan mengangkat (derajat) orang-orang yang beriman diantaramu dan orang-orang yang diberi ilmu beberapa derajat."
(Q.S. Al-Mujadilah : 11)

PERSEMBAHAN

Puji Syukur kepada Allah SWT, atas hidayah dan kasih sayang-Nya.

Kupersembahkan sebuah karya sederhana penuh perjuangan ini kepada:

Papa Sarifuddin dan Mama Desi Deria Herawati

Serta

M. Aprizal Husni

Muhammad Iqbal

Winda Salsabila

Terimakasih atas limpahan kasih sayang, pengorbanan, semangat, motivasi, serta doa dan sujud yang selalu menantikan keberhasilanku dengan sabar dan penuh pengertian. Karena atas doa dan ridho kalian, Allah memudahkan setiap perjalanan hidup ini.

Terimalah bukti kecil ini sebagai kado keseriusanku untuk membalas semua pengorbanan, keikhlasan, dan jerih payah yang selama ini telah diberikan.

SANWACANA

Penulis mengucapkan puji syukur kehadirat Allah SWT, karena dengan ridho dan karunia-Nya serta atas berkah dan rahmat-Nya sehinga penulis dapat menyelesaikan tesis yang berjudul “Bilangan Kromatik Lokasi Graf Split Lintasan”. Penyusunan tesis ini tidak lepas dari dukungan dan kerjasama berbagai pihak yang telah memberikan bimbingan, kritik, dan saran yang bermanfaat bagi penulis.

Penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Ibu Dr. Asmiati, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing I yang telah sabar membimbing, menyemangati dan memotivasi penulis.
2. Ibu Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si. selaku pembimbing II yang telah memberihan arahan, saran, serta dukungan bagi penulis.
3. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M. Sc. selaku Dosen Pembahas atas kesediaannya dalam menguji dan dengan sabar memberikan kritik atau saran yang membangun
4. Bapak Dr. Muslim Ansori S.Si., M. Si. selaku Dosen Pembahas atas kesediaannya kesediaannya dalam menguji, dan atas segala masukan yang sangat berarti.
5. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung.

6. Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, M. T. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung.
7. Seluruh Dosen dan Karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung.
8. Mama, Papa, Kakak, Adik-adik, dan keluarga tercinta yang selalu memberikan motivasi, semangat, dan doa yang tak terhingga kepada penulis.
9. Akika Mega Fadillah, Wahyu Megarani, Attiya Yiliana, Fitri Ayuni, Listia, Hilda Venelia, Zulfikar Fakhri Bismar, Desfan Hafifullah, Tatang Bahtiar, Rizki Agung Wibowo Ramadhani, Aditya Putra Pradana, Maharani Damayanti, Kasandra Prawinasti, dan seluruh rekan – rekan program magister matematika atas canda dan tawa yang telah membuat hidup penulis lebih berwarna. Suatu kebahagiaan dapat menjalani program magister bersama rekan – rekan.
10. Sahabat – sahabatku Wike Winarti, mba Anis, mba Novita, mba Desi, mba Resti yang telah memberikan keceriaan dan semangat bagi penulis.
11. Almamater tercinta Universitas Lampung.

Penulis menyadari bahwa tesis ini masih terdapat kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran demi perbaikan tesis ini.

Bandar Lampung, 10 Agustus 2022
Penulis

Siti Rahmatalia
NPM. 2027031008

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Konsep pewarnaan graf muncul sebagai model dalam menyelesaikan permasalahan pewarnaan peta. Pada tahun 1852, Frederick Guthri (1833-1886), mahasiswa di University College London, mengunjungi professor matematika, Augustus De Morgan (1806-1871), untuk menyampaikan penemuan matematika dari kakak lelakinya, Francis Guthrie (1831-1899). Beliau mendapatkan konjektur empat warna (*The Four Color Conjecture*) yang menyatakan: Semua negara di peta dapat diwarnai dengan menggunakan maksimal empat warna sedemikian sehingga dua negara yang berbatasan mempunyai warna berbeda. Keinginan yang kuat dari para matematikawan untuk menyelesaikan permasalahan empat warna tersebut menginspirasi munculnya konsep pewarnaan daerah, titik, sisi, dan graf planar. Konsep inilah yang digunakan untuk mewarnai graf secara umum.

Bilangan kromatik lokasi graf yang diperkenalkan oleh Chartrand dkk., pada tahun 2002 merupakan penggabungan dari konsep dimensi partisi graf dan pewarnaan graf. Chartrand dkk., telah memperkenalkan konsep dimensi partisi graf pada tahun 1998 yang merupakan pengembangan dari konsep dimensi metrik graf yang pertama kali diperkenalkan oleh Harary dan Melter pada tahun 1976. Banyak aplikasi yang dapat diterapkan menggunakan konsep dimensi metrik graf diantaranya adalah navigasi robotik, optimisasi penempatan sensor kebakaran, dan klasisfikasi data senyawa kimia. Bilangan kromatik lokasi suatu graf merupakan pengelompokan titik berdasarkan warnanya yang disebut kelas-kelas warna dengan syarat setiap titik pada graf tersebut mempunyai kode warna berbeda.

Bilangan kromatik lokasi graf merupakan topik yang menarik untuk dipelajari karena belum terdapatnya teorema yang dapat digunakan untuk menentukan bilangan kromatik lokasi sebarang graf secara umum. Pada tahun 2002, Chatrand dkk., telah berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi beberapa kelas graf, diantaranya pada graf lengkap, siklus, lintasan, dan graf multipartite. Mereka juga telah berhasil mengkonstruksi graf pohon berorde $n \geq 5$ dengan bilangan kromatik lokasi bervariasi dari 3 sampai n, kecuali $(n-1)$.

Pada tahun 2011, Asmiati dkk., telah berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi amalgamasi bintang seragam dan tak seragam, kemudian Behtoei dkk., juga berhasil memperoleh bilangan kromatik lokasi kneser graf. Pada tahun 2012, Purwasih dkk., telah berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi dari graf Harlin $H = T \cup C$, dimana T adalah subdivisi dari graf bintang dan bintang ganda, dan C adalah siklus.

Pada tahun 2013, Baskoro dan Asmiati berhasil mengkarakterisasi semua pohon dengan bilangan kromatik lokasi 3, Syofyan dkk., (2013) menentukan bilangan kromatik lokasi graf lobster yang homogen, kemudian Welyyanti dkk., (2013) memperoleh bilangan kromatik lokasi untuk pohon $n-ary$ lengkap lokasi kneser graf. Behtoei dkk., (2014) berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi gabungan lintasan, lingkaran, dan graf lengkap multipartite. Purwasih dkk., (2015) berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi subdivisi lengkap dan graf bintang dengan satu sisi.

Pada tahun 2016, Asmiati dkk., berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi graf ulat dan graf kembang api dan Behtoei dkk., (2016) juga berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi hasil kali kartesian dari lintasan dan graf lengkap. Pada tahun 2017, Asmiati berhasil mengkaji bilangan kromatik lokasi n amalgamasi bintang yang dihubungkan oleh suatu lintasan. Pada tahun 2018, Muthuramakrishnan dan Jayaraman telah berhasil mendapatkan total pewarnaan graf split dari lintasan, siklus dan bintang. Kemudian Asmiati dkk., (2018) berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi dari graf barbel $B_{n,n}$ untuk $n \geq 3$ dimana graf $B_{n,n}$ memuat dua graf isomorfik dari graf lengkap K_n. Irawan dkk., (2018) berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi dari subdivisi graf kembang api. Ganesan dkk., (2018) telah berhasil mendapatkan pelabelan prima graf split lintasan PN.

Pada tahun 2019, Asmiati dkk., berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi dari subdivisi graf barbel yang memuat graf Petersen diperumum. Damayanti dkk., (2021) telah menentukan bilangan kromatik lokasi dari beberapa modifikasi graf lintasan dengan siklus. Prawinasti dkk., (2021) telah menentukan bilangan kromatik lokasi graf split siklus.

Sejauh penelusuran literatur yang telah dilakukan, belum ada penelitian yang membahas tentang masalah penentuan bilangan kromatik lokasi pada graf split lintasan. Oleh karena itu pada penelitian ini akan ditentukan bilangan kromatik lokasi graf split lintasan, graf barbel dari graf split lintasan dan subdivisi dari graf barbel split lintasan.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. menentukan bilangan kromatik lokasi graf split lintasan;
2. menentukan bilangan kromatik lokasi graf barbel dari graf split lintasan;
3. menentukan bilangan kromatik lokasi subdivisi dari graf barbel split lintasan.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah:

1. memberi pemahaman dan wawasan mengenai bilangan kromatik lokasi graf, khususnya graft split lintasan yang memuat graf barbel dan subdivisi dari graf barbel;
2. sebagai referensi untuk penelitian lanjutan mengenai bilangan kromatik lokasi graf split lainnya.

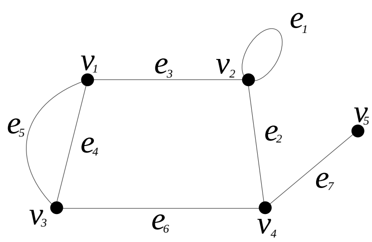
II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Graf

Teori graf diperkenalkan oleh Leonhard Euler tahun 1736 dalam pembuktian kemungkinan melewati dalam sekali jalan empat daerah yang dihubungkan dengan tujuh jembatan di atas sungai Pregel di Konigsberg, Rusia. Permasalahan yang dikenal sebagai masalah Jembatan Konigsberg ini direpresentasikan dalam bentuk gambar yang akan dikenal sebagai representasi graf, dengan titik menyatakan daerah dan sisi menyatakan jembatan yang menghubungkan dua daerah. Pada permasalahan tersebut dengan menggunakan representasi graf Euler dapat membuktikan bahwa tidak mungkin melewati setiap jembatan tepat satu kali dan kembali ke posisi semula (Sugeng dkk., 2014).

Gambar 2.1 Representasi graf untuk masalah perjalanan melintasi jembatan konigsberg
(sumber: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Konisberg_bridges.png)

Beberapa konsep dasar yang digunakan dalam penelitian ini diambil dari (Deo, 1989) dan (Sugeng dkk., 2014). Suatu graf G adalah himpunan terurut $\big(V(G), E(G)\big)$, dengan $V(G)$ menyatakan himpunan titik $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dari G dengan $V(G) \neq \emptyset$ dan $E(G)$ menyatakan himpunan sisi $\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_m\}$, yakni pasangan tak terurut dari $V(G) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), \dots, , (v_{n-1}, v_n)\}$. Banyaknya himpunan titik $V(G)$ disebut dengan orde dari graf . Jika titik v_1 dan v_2 dihubungkan oleh sisi e, maka titik v_1 dan v_2 dikatakan menempel pada sisi e, begitu juga dengan sisi e menempel pada titik v_1 dan v_2, sehingga saling bertetangga. Himpunan tetangga dari suatu titik dinotasikan dengan $N(v)$ adalah himpunan titik – titik yang bertetangga dengan v.



Gambar 2.2 Contoh graf dengan 5 titik dan 7 sisi

Pada Gambar 2.2, merupakan graf $G(V, E)$ dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$. Titik yang bertetangga dengan titik v_1 adalah titik v_2 dan v_3, sedangkan sisi yang menempel dengan titik v_1 adalah sisi e_3, e_4 dan e_5 menempel pada titik v_1.

Derajat suatu titik v pada graf G adalah banyaknya sisi yang menempel pada titik v yang dinotasikan dengan $d(v)$. Daun adalah titik yang berderajat satu pada Gambar 2.2 yang dikatakan sebagai daun adalah titik v_5. Derajat masing – masing titik pada Gambar 2.2 adalah $d(v_1) = 3, d(v_2) = 4, d(v_3) = 3, d(v_4) =$

$3, d(v_5) = 1$. Sisi paralel adalah beberapa sisi yang memiliki daun dan titik ujung yang sama. *Loop* adalah sisi yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. *Loop* pada Gambar 2.2 adalah sisi e_1 dan terdapat sisi paralel pada titik v_1 dan v_3.

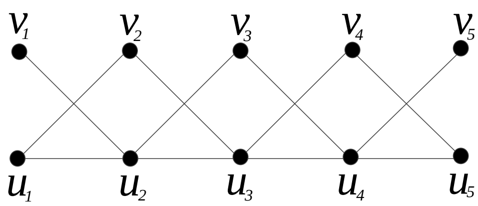
Jalan adalah barisan berhingga dari titik dan sisi dimulai dan diakhiri dengan titik sedemikian sehingga setiap sisi menempel dengan titik sebelumnya dan sesudahnya pada suatu graf. Lintasan adalah jalan yang melewati titik yang berbeda – beda dimana titik – titik yang dilewati tepat satu kali pada suatu graf. Pada Gambar 2.2 yang merupakan jalan adalah $v_4, e_2, v_2, e_3, v_1, e_5, v_3, e_6, v_4, e_7, v_5$. Sedangkan, lintasan pada Gambar 2.2 adalah $v_2, e_3, v_1, e_4, v_3, e_6, v_4, e_7, v_5$. Sirkuit adalah lintasan tertutup, yaitu yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. Sirkuit dibedakan menjadi dua macam, yaitu sirkuit ganjil dan sirkuit genap. Sirkuit ganjil adalah sirkuit yang memuat banyaknya titik berjumlah ganjil, sedangkan sirkuit genap adalah sirkuit yang memuat banyaknya titik berjumlah genap. Contoh sirkuit ganjil pada Gambar 2.2 adalah $v_2, e_3, v_1, e_4, v_3, e_6, v_4, e_2, v_2$.

2.2 Graf Lintasan dan Graf Split Lintasan

Suatu graf terhubung yang setiap titiknya berderajat dua kecuali dua titik ujung yang berderajat satu disebut sebagai graf lintasan. Graf lintasan dengan n titik dinotasikan dengan P_n.

Gambar 2.3 Contoh graf lintasan dengan n titik

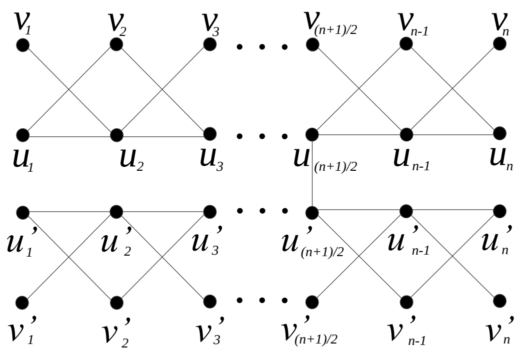
Graf split adalah graf G yang diperoleh dengan menambahkan setiap titik u pada G satu titik baru v, sedemikian sehingga v bertentangga dengan setiap titik yang bertetangga dengan u di G. Graf yang dihasilkan dinyatakan dengan $spl(P_n)$. Pada Gambar 2.4 diberikan graf split dari lintasan P_5 yang dinotasikan dengan $spl(P_5)$ (Sugeng dkk., 2014).



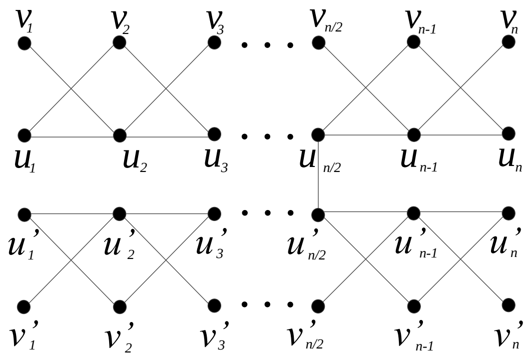
Gambar 2.4 Contoh graf split lintasan $spl(P_5)$

2.3 Graf Barbel dan Graf Subdivisi dari Graf Barbel Split Lintasan

Graf Barbel adalah graf sederhana yang dibentuk dengan menghubungkan dua tiruan atau jiplakan dari graf lengkap yang dihubungkan dengan sebuah sisi yang dinotasikan dengan $B_{n,n}$ (Ihwan dkk., 2014). Graf barbel split lintasan $B_{spl(P_n)}$ adalah graf sederhana yang diperoleh dari dua graf split lintasan yang dihubungkan oleh suatu jembatan, yaitu sisi $\left(u_{\frac{n+1}{2}}\, u'_{\frac{n+1}{2}}\right)$ untuk n ganjil dan $\left(u_{\frac{n}{2}}\, u'_{\frac{n}{2}}\right)$ untuk n genap.

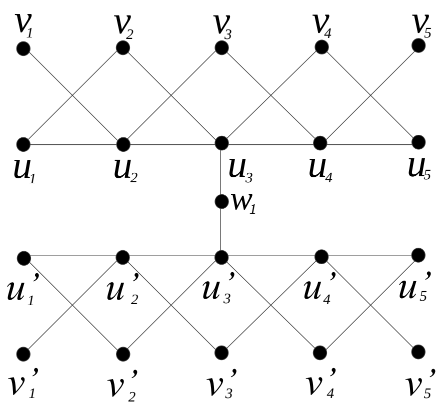


Gambar 2.5 Contoh Graf $B_{spl(P_n)}$untuk n ganjil



Gambar 2.6 Contoh Graf $B_{spl(P_n)}$untuk n genap

Graf subdivisi dari graf barbel split lintasan $B_{spl(P_n)}$ yang dinotasikan dengan $B^{*w}_{spl(p_n)}$ adalah graf yang diperoleh dari graf $B_{spl(P_n)}$ dengan menyisipkan $w \geq 1$ titik pada jembatan graf barbelnya (Purwasih dkk., 2013).



Gambar 2.7 Contoh graf $B^{*1}_{spl(p_5)}$yang di subdivisi satu titik pada jembatannya

2.4 Bilangan Kromatik Lokasi Graf

Definisi dari bilangan kromatik lokasi menurut Chatrand dkk., pada 2002. Bilangan kromatik lokasi didefinisikan misalkan $G = (V, E)$ adalah graf terhubung dan c suatu pewarnaan sejati di graf G dengan $c(u) \neq c(v)$ untuk titik u dan titik v yang bertetangga di graf. Jarak titik v terhadap titik w dinotasikan $d(u, w)$ adalah panjang lintasan terpendek dari titik v terhadap titik w. Misalkan C_i adalah himpunan titik-titik yang diberi warna, yang selanjutnya disebut kelas warna, maka $\Pi = \{C_1, C_2, C_3, \dots, C_k\}$ adalah himpunan yang terdiri dari kelas-kelas warna dari $V(G)$. Kode warna c_Π dari v adalah k-pasang terurut $\big(d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_k)\big)$ dengan $d(v, C_i) = \min\{d(v, x) | x \in C_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik di G mempunyai kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi dari G. Bilangan kromatik lokasi dari G, dinotasikan dengan $\chi_L(G)$ adalah bilangan terkecil k sehingga G mempunyai pewarnaan k lokasi.

Berikut teorema dasar yang telah dibuktikan oleh Chartrand dkk., pada tahun 2002 tentang bilangan kromatik lokasi graf. Himpunan tetangga di titik v, dinotasikan dengan $N(v)$.

Teorema 2.1 (Chartrand dkk., 2002**)**

Misalkan c adalah pewarnaan lokasi pada graf G. Jika u dan v adalah dua titik yang berbeda di G sedemikian sehingga $d(v, w) = d(u, w)$ untuk setiap $w \in V(G) -$

$\{u, v\}$, maka $c(u) \neq c\,(v)$. Secara khusus, jika u dan v titik-titik yang tidak bertetangga di G sedemikian sehingga $N(u) = N(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$.

Bukti :

Misalkan c adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung G dan misalkan $\Pi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ adalah partisi dari titik-titik G ke dalam kelas warna C_i. Untuk suatu titik $u, v \in V(G)$, andaikan $c(u) = c(v)$ sedemikian sehingga titik u dan v berada dalam kelas warna yang sama, misal C_i dari Π. Akibatnya, $d(u, C_i) = d(v, C_i) = 0$. Karena $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$, maka $d(u, C_j) \neq d(v, C_j)$ untuk setiap $j \neq i, 1 \leq j \leq k$. Akibatnya $c_\Pi(u) = c_\Pi(v)$. Sehingga c bukan pewarnaan lokasi. Jadi $c(u) \neq c(v)$.

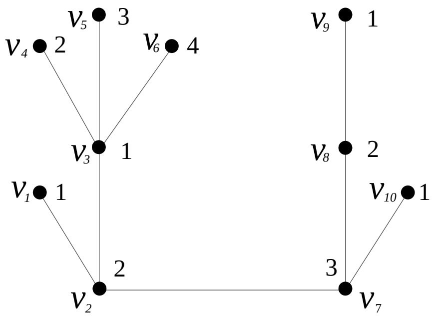
Akibat dari Teorema 2.1 didapatkan batas bawah dari bilangan kromatik lokasi untuk graf sebarang.

Akibat 2.1 (Chartrand dkk., 2002)

Jika G adalah graf terhubung dengan suatu titik yang bertetangga dengan k daun, maka $\chi_L\,(G) \geq k + 1$.

Bukti:

Misalkan v adalah suatu titik yang bertetangga dengan k daun, yaitu $x_1, x_2, \dots, x_k$ di G. Berdasarkan Teorema 2.1, setiap pewarnaan lokasi dari G mempunyai warna yang berbeda untuk setiap x_i, $i = 1,2, \dots, k$. Karena v bertetangga dengan semua x_i, maka v harus mempunyai warna yang berbeda dengan semua daun x_i. Akibtnya, $\chi_L\,(G) \geq k + 1$ (Chartrand, dkk. 2002).



Gambar 2.8 Pewarnaan lokasi minimum pada G

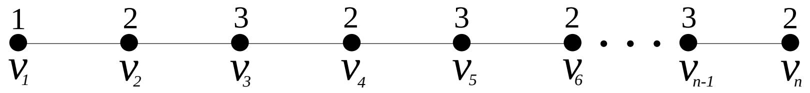
Gambar 2.8 derajat titik maksimumnya adalah 3. Berdasarkan Akibat 2.1. $\chi_L\ (G) \geq k+1$ dengan k derajat titik maksimum, maka membutuhkan sekurang-kurangnya 4 warna. Oleh karena itu $\chi_L\ (G) \geq 4$ Gambar 2.8 menunjukkan bahwa $\Pi = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ dengan $C_1 = \{v_1, v_3, v_9, v_{10}\}$, $C_2 = \{v_2, v_4, v_8\}$, $C_3 = \{v_5, v_7\}$, dan $C_4 = \{v_6\}$. Kode warna pada graf G ialah $c_\Pi(v_1)$ = (0,1,2,3), $c_\Pi(v_2)$ = (1,0,1,2), $c_\Pi(v_3)$ = (0,1,1,1), $c_\Pi(v_4)$ = (1,0,2,2), $c_\Pi(v_5)$ = (1,2,0,2), $c_\Pi(v_6)$ = (1,2,2,0), $c_\Pi(v_7)$ = (1,1,0,3), $c_\Pi(v_8)$ = (1,0,1,4), $c_\Pi(v_9)$ = (0,1,2,5), $c_\Pi(v_{10})$ = (0,2,1,4). Karena setiap titik pada graf G mempunyai kode warna yang berbeda maka c adalah pewarnaan lokasi. Akibatnya $\chi_L\ (G) \geq 4$. Jadi, $\chi_L\ (G) = 4$.

Teorema 2.2 (Chartrand dkk., 2002)

Bilangan kromatik lokasi graf lintasan P_n adalah 3, untuk $n\ \geq\ 3$.

Bukti:

Perhatikan bahwa $X_L(P_1) = 1$ dan $X_L(P_2) = 2$. Jelas bahwa $X_L(P_n) \geq 3$ untuk $n \geq 3$. Berdasarkan Akibat 1. $X_L(G) \leq k+1$, dengan k derajat titik maksimum. Karena pada $P_n, k = 2$ maka $X_L(P_n) \leq 2+1 = 3$. Akibatnya, $X_L(P_n) = 3$, untuk $n \geq 3$.



Gambar 2.9 Pewarnaan lokasi minimum pada graf lintasan P_n

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada semester genap tahun akademik 2021/2022 di Program Studi Magister Matematika Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metodologi Penelitian

Langkah-langkah yang dilakukan untuk menentukan bilangan kromatik lokasi graf split lintasan, graf barbel dari graf split lintasan dan subdivisi dari graf barbel split lintasan adalah sebagai berikut:

1. Metode menentukan bilangan kromatik lokasi graf split lintasan $spl(P_n)$ sebagai berikut:
   a. Menentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi graf split lintasan $spl(P_n)$ untuk $n \geq 3$ dengan menggunakan batas bawah trivial. Jika batas trivial tersebut belum memenuhi syarat pewarnaan lokasi, maka dilakukan penambahan bertahap pewarnaannya sedemikian sehingga syarat pewarnaan lokasi terpenuhi.

b. Menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi graf split lintasan $spl(P_n)$ untuk $n \geq 3$. Mengkonstruksi pewarnaan titk-titik dengan melihat struktur grafnya. Pewarnaan titik dimulai dengan label terkecil sedemikian sehingga diperoleh minimum pewarnaan titik yang memenuhi syarat pewarnaan lokasi.

c. Jika batas bawah dan batas atas bilangan kromatik lokasi $spl(P_n)$ sama, misal x maka diperoleh bilangan kromatik lokasinya, yaitu $\chi_L(spl(P_n)) = x$.

d. Memformulasikan hasil - hasil yang diperoleh dalam suatu pernyataan matematika.

e. Membuktikan hasil - hasil yang diperoleh pada langkah d.

2. Metode menentukan bilangan kromatik lokasi graf barbel split lintasan $B_{spl(P_n)}$ sebagai berikut:

   a. Menentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi graf barbel split lintasan $B_{spl(P_n)}$ dengan $n \geq 3$ dengan menggunakan batas bawah trivial, karena graf barbel split lintasan $B_{spl(P_n)}$ memuat graf split lintasan $spl(P_n)$ maka sekurang - kurangnya memuat warna dari graf split lintasan $spl(P_n)$. Jika batas trivial tersebut belum memenuhi syarat pewarnaan lokasi, maka dilakukan penambahan bertahap pewarnaannya sedemikian sehingga syarat pewarnaan lokasi terpenuhi.

   b. Menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi graf barbel split lintasan $B_{spl(P_n)}$ dengan $n \geq 3$. Mengkonstruksi pewarnaan titk-titik dengan melihat struktur grafnya. Pewarnaan titik dimulai dengan label terkecil sedemikian sehingga diperoleh minimum pewarnaan titik yang memenuhi syarat pewarnaan lokasi.

c. Jika batas bawah dan batas atas bilangan kromatik lokasi $B_{spl(P_n)}$ sama, missal x maka diperoleh bilangan kromatik lokasinya, yaitu $\chi_L\left(B_{spl(P_n)}\right) = x$.

d. Memformulasikan hasil - hasil yang diperoleh dalam suatu pernyataan matematika.

e. Membuktikan hasil - hasil yang diperoleh pada langkah d.

3. Metode menentukan bilangan kromatik lokasi subdivisi dari graf barbel split lintasan $B^{*1}_{spl(P_n)}$ sebagai berikut:

a. Menentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi subdivisi dari graf barbel split lintasan $B^{*1}_{spl(P_n)}$ dengan $n \geq 3$ dengan menggunakan batas bawah trivial, karena subdivisi dari graf barbel split lintasan $B^{*1}_{spl(P_n)}$ memuat graf barbel split lintasan $B_{spl(P_n)}$ maka sekurang - kurangnya memuat warna dari graf barbel split lintasan $B_{spl(P_n)}$. Jika batas trivial tersebut belum memenuhi syarat pewarnaan lokasi, maka dilakukan penambahan bertahap pewarnaannya sedemikian sehingga syarat pewarnaan lokasi terpenuhi.

b. Menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi subdivisi dari graf barbel split lintasan $B^{*1}_{spl(P_n)}$ dengan $n \geq 3$. Mengkonstruksi pewarnaan titk-titik dengan melihat struktur grafnya. Pewarnaan titik dimulai dengan label terkecil sedemikian sehingga diperoleh minimum pewarnaan titik yang memenuhi syarat pewarnaan lokasi.

c. Jika batas bawah dan batas atas bilangan kromatik lokasi $B^{*1}_{spl(P_n)}$ sama, missal x maka diperoleh bilangan kromatik lokasinya, yaitu $\chi_L\left(B^{*1}_{spl(P_n)}\right) = x$.
d. Memformulasikan hasil - hasil yang diperoleh dalam suatu pernyataan matematika.
e. Membuktikan hasil - hasil yang diperoleh pada langkah d.

V. KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Pada penelitian ini telah berhasil ditentukan dan dibuktikan bahwa bilangan kromatik lokasi dari graf split lintasan $spl(P_n)$ untuk $n \geq 3$, adalah 4, demikian juga untuk graf barbel dan subdivisinya.

5.2 Saran

Penelitian ini dapat dikembangkan dengan menentukan bilangan kromatik lokasi pada graf barbel split lintasan untuk operasi graf yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Asmiati, Assiyatun, H., dan Baskoro, E. T. 2011. Locating Chromatic Number of Amalgamation of Stars. ITB J. Sci. **43(1)**: 1-8.

Asmiati. 2016. On The Locating-Chromatic Numbers Of Non-Homogeneous Caterpillars And Firecracker Graphs. *Far East Journal Of Mathematical Sciences* (FJMS). **100(8)**: 1305-1316.

Asmiati. 2017. Bilangan Kromatik Lokasi n Amalgamasi Bintang yang dihubungkan oleh suatu Lintasan. *Jurnal Matematika Integratif*. **13(2)**: 115-121.

Asmiati, Yana, I. K. D. C., dan Yulianti, L. 2018. On the Locating Chromatic Number of Certain Barbell Graphs. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. **100(8)**: 1-5.

Asmiati, Yana, I. K. S. G., dan Yulianti. 2019. On the Location Chromatic Number of Subdivition of Barbell Graphs Containing Generalized Petersen Graph. *IJCSNS International Journal of Computer Science an Network Security*. **19(7)**: 45-50.

Baskoro, E. T dan Asmiati. 2013. Characterizing all trees with locating-chromatic number 3. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*. **1(2)**: 109–117.

Behtoei, A., dan Omoomi, B. 2011. On the locating chromatic number of kneser graphs. *Discrete Appl.Math.* **159(18):** 2214–2221.

Behtoei, A. dan Anbarloei, M. 2014. The Locating Chromatic Number of The Join of Graphs. *Bulletin of The Iranian Mathematical Society*. **40(6):** 1491 – 1504.

Behtoei, A. dan Omoomi, B. 2016. On the locating chromatic number of Cartesian product of graphs. *Ars Combinatoria.* **126**: 221-235.

Chartrand, G., P. Zhang, dan E. Salehi. 1998. On the partition dimension of graph. *Congr. Numer*. **130**: 157–168.

Chartrand., G. Erwin., D. Henning., M. A. Slater, P. J. dan Zhang. P. 2002. The Locating - Chromatic Number of a Graph. *Bull. Inst. Combin. Appl*. **36**: 89-101.

Damayanti, M., Asmiati., Fitriani., Ansori., dan Faradila, A. 2021. The Locating Chromatic Number of some Modified Path with Cycle having Locating Number Four. *J.Phys. Conf. Ser*. **1751**: 1-5.

Deo, N. 1989. *Graph Theory with Applications to Enggineering and Computer Science*. Prentice Hall og India Prive Limited, New Delhi.

Ganesan, Dr. V., Vijayaraj, S., dan Velmurugan, M. 2018. Prime Labeling of Split Graph of Path Graph PN. *International Journal of Applied and Advanced Scienced Research*. **3(2)**: 28-30.

Harary, F., dan Melter, RA. 1976. On the metric dimension of a graph. *Ars Combinatori*. **2**: 191-195.

Ihwan, M. D., Rahmawati, A., dan Sumargono. 2014. Kajian Bilangan Clique Graf Gear dan Graf Barbel . *Jurnal Gagasan Matematika dan Informatika*. **5(1)**:39-50.

Irawan, A. dan Asmiati. 2018. The Locating-Chromatic Number of Subdivision Fireracker Graphs. *International Mathematical Forum*. **13(10)**: 485-492.

Muthuramakishnan, D., dan Jayaraman, G. 2018. Total Coloring of Splitin Graph of Path, Cycle and Star Graphs. *Int. J. Math*. And Appl. **6**: 659-664.

Prawinasti, K., Ansori, M., Asmiati., Notiragayu., dan Rofi, G. N. AR1. 2021 The Locating Chromatic Number for Split Graph of Cycle. *J.Phys. Conf. Ser*. **1751**: 1-5.

Purwasih, I, A, dan Baskoro, E, T. 2012. The locating-chromatic number for Halin graphs. *AIP Conference Proceedings*. **1450(1)**: 342-345.

Purwasih, I, A., Baskoro, E, T., Assiyatun, H., dan Suprijanto, D. 2015. The Bounds on The Locating-Chromatic Number for a Subdivision of a Graph on One Egde. *Procedia Computer Science*. **74**: 84-88.

Sofyan, D. K., Baskoro, E. T., dan Assiyatun, H. 2013. On the locating chromatic number of homogeneous lobster. *AKCE Int. J. Graphs Comb.* **10(3)**: 245-252.

Sugeng, K. A., Slamet, S., dan Sibalan, D. R. 2014. *Teori Graf dan Aplikasinya*. Department Matematika FMIPA Universitas Indonesia, Depok.

Welyyanti, D., Baskoro, E. T., Simanjuntak. R dan Uttunggadewa, S. 2013. On the locating chromatic number of complete $n - ary$ tree. *AKCE Int. J. Graphs Comb.* **10(3)**: 309-315.