

**BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF BARBEL DAN SUBDIVISI  
DARI MODIFIKASI GRAF LINTASAN DAN SIKLUS**

**(Tesis)**

**Oleh**

**AKIKA MEGA FADILLAH**



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS LAMPUNG  
BANDAR LAMPUNG  
2022**

## **ABSTRAK**

### **BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF BARBEL DAN SUBDIVISI DARI MODIFIKASI GRAF LINTASAN DAN SIKLUS**

**Oleh**

**AKIKA MEGA FADILLAH**

Graf barbel dari modifikasi graf lintasan dan siklus adalah graf yang dibentuk dengan menghubungkan dua graf modifikasi graf lintasan dan siklus dengan sebuah jembatan yang dinotasikan dengan  $B_{P_n(C_3)}$  dan  $B_{P_n(C_4)}$ . Subdivisi dari graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus diperoleh dari graf barbel dari modifikasi graf lintasan dan siklus dengan menyisipkan beberapa titik pada jembatan graf barbelnya dinotasikan  $B_{P_n(C_3)}^{*W}$  atau  $B_{P_n(C_4)}^{*W}$ . Bilangan kromatik lokasi dari Graf barbel dari modifikasi graf lintasan dan siklus adalah 4. Bilangan kromatik lokasi subdivisi dari graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus adalah 4 atau 5.

**Kata kunci:** Bilangan kromatik lokasi, graf barbel dari modifikasi graf lintasan dan siklus, Subdivisi dari graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus.

## ABSTRACT

### THE LOCATING CHROMATIC NUMBER OF THE BARBELL GRAPH AND SUBDIVISION SOME MODIFIED PATH WITH CYCLE

BY

AKIKA MEGA FADILLAH

The barbell graph of some modified path with cycle graph is a graph obtained from two some modified path with cycle connected by bridge,  $B_{P_n(C_3)}$  and  $B_{P_n(C_4)}$ . The subdivision of some modified path with cycle is obtained from the barbell graph modified path with cycle by inserting some vertices on the bridge,  $B_{P_n(C_3)}^{*w}$  or  $B_{P_n(C_4)}^{*w}$ . The locating chromatic number of the barbell graph of the modified path with cycle graph is 4. The locating chromatic number for barbell graph of some modified path with cycle graph is 4. The locating chromatic number for subdivision of barbell some modified path with cycle, is 4 or 5.

Keywords: The locating chromatic number, barbell graph of some modified path with cycle, subdivision of barbell graph of some modified path with cycle.

**BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF BARBEL DAN SUBDIVISI  
DARI MODIFIKASI GRAF LINTASAN DAN SIKLUS**

**Oleh**

**AKIKA MEGA FADILLAH**

**Tesis**

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar  
**Magister Matematika**

Pada

Program Studi Magister Matematika  
Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam



**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS LAMPUNG  
BANDAR LAMPUNG  
2022**

Judul Tesis

: **BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF  
BARBEL DAN SUBDIVISI DARI  
MODIFIKASI GRAF LINTASAN DAN  
SIKLUS**

Nama Mahasiswa

: **Akika Mega Fadillah**

Nomor Pokok Mahasiswa

: 2027031003

Program Studi

: Magister Matematika

Jurusan

: Matematika

Fakultas

: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



1. Komisi Pembimbing

**Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.**  
NIP 19760411 200012 2 001

**Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si.**  
NIP 19731109 200012 2 001

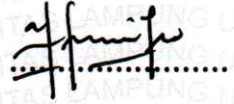
2. Ketua Program Studi Magister Matematika

**Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.**  
NIP 19760411 200012 2 001

## MENGESAHKAN

### 1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.**



Sekretaris : **Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si.**



Penguji

Bukan Pembimbing : **1. Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.** .....



**2. Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.**



### 2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

**Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, S.Si., M.T.**

NIP 19740705 200003 1 001



### 3. Direktur Program Pascasarjana

**Prof. Dr. Ahmad Saudi Samosir, S.T., M.T.**

NIP 19710415 199803 1 005



### 4. Tanggal Lulus Ujian Tesis : **2 Agustus 2022**

## PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Akika Mega Fadillah  
Nomor Pokok Mahasiwa : 2027031003  
Program Studi : Magister Matematika  
Jurusa : Matematika

Dengan ini menyatakan bahwa tesis saya berjudul, **“BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF BARBEL DAN SUBDIVISI DARI MODIFIKASI GRAF LINTASAN DAN SIKLUS”** adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Semua tulisan yang tertuang dalam tesis ini telah mengikuti kaidah karya penulisan ilmiah Universitas Lampung. Apabila kemudian hari terbukti bahwa tesis ini merupakan salinan atau telah dibuat orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 08 Agustus 2022  
Penulis,



**AKIKA MEGA FADILLAH**  
**NPM. 2027031003**

## **RIWAYAT HIDUP**

Penulis bernama lengkap Akika Mega Fadillah, anak pertama dari dua bersaudara. Penulis dilahirkan di Bandar Lampung, pada tanggal 9 Oktober 1997 dari pasangan Almarhum Bapak Anang Kiswo Adi dan Ibu Ika Kartika.

Penulis menempuh pendidikan di Sekolah Dasar Negeri 3 Perumnas Wayhalim Kota Bandar Lampung diselesaikan pada tahun 2008. Pada tahun 2009 melanjutkan di Madrasah Tsanawiyah Al-Hikmah 2 Jawa Tengah diselesaikan pada tahun 2013. Kemudian pada tahun 2013 melanjutkan di Madrasah Aliyah Al-Hikmah 2 Jawa Tengah diselesaikan pada tahun 2015. Pada tahun 2015, penulis melanjutkan Pendidikan di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung dan lulus pada tahun 2019.

Pada tahun 2020, penulis terdaftar sebagai mahasiswa program studi magister Matematika di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.



*Sesungguhnya sesudah kesulitan itu terdapat  
kemudahan*

*(Q. S. Al-Insyirah / 94:5)*

*Barang siapa yang bersungguh - sungguh,  
sesungguhnya kesungguhan tersebut untuk kebaikan  
dirinya sendiri*

*(Q.S. Al - Ankabut / 6)*

*Bertaqwalah kepada Allah, maka Dia akan  
membimbingmu. Sesungguhnya Allah mengetahui  
segala sesuatu*

*(Q.S. Al - Baqarah / 282)*

## *PERSEMBAHAN*

Alhamdulillahirabbil alamin

Dengan menyebut nama Allah Yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang dan

Segala Puji dan Syukur kepada Allah SWT

Kupersembahkan Tesis ini teruntuk :

*Kedua Orang tua ku, Ayahanda tercinta Alm. Anang Kiswo*

*Adi dan Ibunda tercinta Ika Kartika yang tak henti -*

*hentinya memberikan kasih sayang, do'a, dan motivasi*

*dalam segala hal. Serta adikku tersayang Lintang Antika*

*Fadillah yang selalu memberikan semangat.*

*Guru - guru yang selalu membagi ilmunya untukku*

*Seluruh keluarga ku*

*Teman dan sahabatku*

*Almamater Unila*

## SANWACANA

Assalamualaikum Wr. Wb.

Dengan mengucapkan Alhamdulillah penulis panjatkan puji syukur kehadirat Allah SWT berkat Rahmat dan Hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini dengan baik. Shalawat serta salam senantiasa tercurah kepada junjungan kita Nabi Muhammad SAW, suri tauladan terbaik sepanjang masa. Penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Ibu Dr. Asmiati, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing I yang telah sabar membimbing, menyemangati, dan memotivasi penulis.
2. Ibu Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing II yang telah memberikan saran, pengarahan, nasehat, kesabaran, dan bantuan yang sangat berharga untuk perbaikan penulisan tesis.
3. Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembahas atas kesediaannya dalam menguji dan dengan sabar memberikan kritik atau saran yang membangun.
4. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M. Sc. selaku Dosen Pembahas atas kesediaannya dalam menguji dan atas segala masukan yang berarti.
5. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung.

6. Dr. Eng. Suropto Dwi Yuwono, M. T. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung.
7. Seluruh Dosen dan Staff Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung .
8. Kedua orang tua ku yang aku sayangi (Ayahanda Alm. Anang Kiswo Adi & Ibunda Ika Kartika) adikku tersayang (Lintang Antika Fadillah) serta untuk seluruh keluarga terima kasih atas kasih sayang, do'a, nasehat perhatian dan dukungan yang tidak henti – hentinya.
9. Tiwi, Desun, Dai, Mona, Yuni, Ratri, Rahma, Maharani, Yunda Kasandra yang telah memberikan semangat serta patner sharing terbaik.
10. Teman – teman program magister matematika angkatan 2020, terima kasih suka duka selama kurang lebih 2 tahun.
11. Almamater tercinta Universitas Lampung.

Penulis menyadari bahwa tesis ini masih terdapat banyak kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran demi perbaikan tesis ini. Semoga tesis ini dapat bermanfaat bagi penulis khususnya dan bagi pembaca pada umumnya. Terima kasih.

Bandar Lampung, 08 Agustus 2022

Penulis

Akika Mega Fadillah  
NPM. 2027031003

## DAFTAR ISI

Halaman

<b>DAFTAR GAMBAR.....</b>	<b>xv</b>
<b>I. PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang dan Masalah .....	1
1.2 Tujuan Penelitian.....	3
1.3 Manfaat Penelitian.....	4
<b>II. TINJAUAN PUSTAKA</b>	
2.1 Konsep Dasar Graf .....	5
2.2 Graf Modifikasi Lintasan dan Siklus.....	7
2.3 Graf Barbel dan Graf Subdivisi dari Modifikasi Graf Lintasan dan Siklus.....	8
2.4 Bilangan Kromatik Lokasi Graf .....	10
2.5 Bilangan Kromatik Lokasi dari Modifikasi Graf Lintasan dan Siklus.....	15
<b>III. METODOLOGI PENELITIAN</b>	
3.1 Waktu dan Tempat Penelitian .....	18
3.2 Metode Penelitian.....	18

**IV. HASIL DAN PEMBAHASAN**

4.1 Bilangan Kromatik Lokasi Graf Barbel dari Modifikasi Graf Lintasan dan Siklus ..... 21

4.2 Bilangan Kromatik Lokasi Subdivisi pada Graf Barbel dari Modifikasi Graf Lintasan dan Siklus ..... 37

**V. KESIMPULAN**

5.1 Kesimpulan..... 106

5.2 Saran..... 106

**DAFTAR PUSTAKA**

## DAFTAR GAMBAR

Gambar	Halaman
1. Representasi graf untuk masalah perjalanan melintasi jembatan Konigsberg .....	5
2. Contoh graf $G$ dengan 5 titik dan 8 sisi.....	6
3. Graf $P_5(C_3)$ .....	8
4. Graf $P_5(C_4)$ .....	8
5. Contoh Graf $B_{P_n(C_3)}$ untuk $n$ ganjil.....	9
6. Contoh Graf $B_{P_n(C_4)}$ untuk $n$ ganjil.....	9
7. Contoh Graf $B_{P_5(C_3)}^{*w}$ yang disubdivisi satu titik .....	10
8. Pewarnaan lokasi minimum pada graf siklus $C_7$ .....	15
9. Pewarnaan lokasi minimum pada graf lintasan $P_6$ .....	15
10. Pewarnaan lokasi minimum pada graf $P_5(C_3)$ .....	16
11. Pewarnaan lokasi minimum pada graf $P_5(C_4)$ .....	17
12. Graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus $B_{P_3(C_3)}$ .....	21
13. Minimum pewarnaan lokasi pada $B_{P_3(C_3)}$ .....	22
14. Graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus $B_{P_4(C_3)}$ .....	23
15. Minimum pewarnaan lokasi pada $B_{P_4(C_3)}$ .....	23
16. Graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus $B_{P_5(C_3)}$ .....	24
17. Minimum pewarnaan lokasi pada $B_{P_5(C_3)}$ .....	25
18. Graf $B_{P_n(C_3)}$ untuk $n$ ganjil .....	26
19. Graf $B_{P_n(C_3)}$ untuk $n$ genap .....	26
20. Minimum pewarnaan lokasi pada $B_{P_n(C_3)}$ .....	27
21. Graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus $B_{P_3(C_4)}$ .....	29

22. Minimum pewarnaan lokasi pada $B_{P_3(C_4)}$ .....	29
23. Graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus $B_{P_4(C_4)}$ .....	30
24. Minimum pewarnaan lokasi pada $B_{P_4(C_4)}$ .....	31
25. Graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus $B_{P_5(C_4)}$ .....	32
26. Minimum pewarnaan lokasi pada $B_{P_5(C_4)}$ .....	32
27. Graf $B_{P_n(C_4)}$ untuk $n$ ganjil .....	34
28. Graf $B_{P_n(C_4)}$ untuk $n$ genap .....	34
29. Minimum pewarnaan lokasi pada $B_{P_n(C_4)}$ .....	35
30. Subdivisi dari graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus $B_{P_3(C_3)}^{*1}$ .....	37
31. Minimum pewarnaan lokasi pada $B_{P_3(C_3)}^{*1}$ .....	38
32. Subdivisi dari graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus $B_{P_3(C_3)}^{*3}$ .....	39
33. Minimum pewarnaan lokasi pada $B_{P_3(C_3)}^{*3}$ .....	39
34. Subdivisi dari graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus $B_{P_3(C_3)}^{*5}$ .....	40
35. Minimum pewarnaan lokasi pada $B_{P_3(C_3)}^{*5}$ .....	41
36. Subdivisi pada graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus $B_{P_4(C_3)}^{*1}$ .....	42
37. Minimum pewarnaan lokasi pada $B_{P_4(C_3)}^{*1}$ .....	43
38. Subdivisi pada graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus $B_{P_4(C_3)}^{*3}$ .....	44
39. Minimum pewarnaan lokasi pada $B_{P_4(C_3)}^{*3}$ .....	44
40. Subdivisi pada graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus $B_{P_4(C_3)}^{*5}$ .....	45
41. Minimum pewarnaan lokasi pada $B_{P_4(C_3)}^{*5}$ .....	46
42. Subdivisi pada graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus $B_{P_5(C_3)}^{*1}$ .....	47
43. Minimum pewarnaan lokasi pada $B_{P_5(C_3)}^{*1}$ .....	48



44. Subdivisi pada graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus $B_{P_5(C_3)}^{*3}$ .....	49
45. Minimum pewarnaan lokasi pada $B_{P_5(C_3)}^{*3}$ .....	49
46. Subdivisi pada graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus $B_{P_5(C_3)}^{*5}$ .....	50
47. Minimum pewarnaan lokasi pada $B_{P_5(C_3)}^{*5}$ .....	51
48. Subdivisi pada graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus $B_{P_n(C_3)}^{*w}$ dengan $n$ ganjil. ....	53
49. Minimum pewarnaan lokasi pada $B_{P_n(C_3)}^{*w}$ .....	54
50. Subdivisi pada graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus $B_{P_n(C_3)}^{*w}$ dengan $n$ genap .....	56
51. Minimum pewarnaan lokasi pada $B_{P_n(C_3)}^{*w}$ .....	57
52. Subdivisi dari graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus $B_{P_3(C_3)}^{*2}$ .....	59
53. Minimum pewarnaan lokasi pada $B_{P_3(C_3)}^{*2}$ .....	60
54. Subdivisi dari graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus $B_{P_3(C_3)}^{*4}$ .....	61
55. Minimum pewarnaan lokasi pada $B_{P_3(C_3)}^{*4}$ .....	61
56. Subdivisi dari graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus $B_{P_3(C_3)}^{*6}$ .....	62
57. Minimum pewarnaan lokasi pada $B_{P_3(C_3)}^{*6}$ .....	63
58. Subdivisi dari graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus $B_{P_4(C_3)}^{*2}$ .....	64
59. Minimum pewarnaan lokasi pada $B_{P_4(C_3)}^{*2}$ .....	64
60. Subdivisi dari graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus $B_{P_4(C_3)}^{*4}$ .....	65
61. Minimum pewarnaan lokasi pada $B_{P_4(C_3)}^{*4}$ .....	66
62. Subdivisi dari graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus $B_{P_4(C_3)}^{*6}$ .....	67

63. Minimum pewarnaan lokasi pada $B_{P_4(C_3)}^{*6}$ .....	67
64. Subdivisi dari graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus $B_{P_5(C_3)}^{*2}$ .....	68
65. Minimum pewarnaan lokasi pada $B_{P_5(C_3)}^{*2}$ .....	69
66. Subdivisi dari graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus $B_{P_5(C_3)}^{*4}$ .....	70
67. Minimum pewarnaan lokasi pada $B_{P_5(C_3)}^{*4}$ .....	70
68. Subdivisi dari graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus $B_{P_5(C_3)}^{*6}$ .....	71
69. Minimum pewarnaan lokasi pada $B_{P_5(C_3)}^{*6}$ .....	72
70. Subdivisi dari graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus $B_{P_n(C_3)}^{*W}$ $n$ ganjil .....	74
71. Minimum pewarnaan lokasi pada $B_{P_n(C_3)}^{*W}$ .....	74
72. Subdivisi dari graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus $B_{P_n(C_3)}^{*W}$ $n$ ganjil .....	76
73. Minimum pewarnaan lokasi pada $B_{P_n(C_3)}^{*W}$ .....	77
74. Subdivisi dari graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus $B_{P_3(C_4)}^{*1}$ .....	79
75. Minimum pewarnaan lokasi pada $B_{P_3(C_4)}^{*1}$ .....	79
76. Subdivisi pada graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus $B_{P_3(C_4)}^{*2}$ .....	80
77. Minimum pewarnaan lokasi pada $B_{P_3(C_4)}^{*2}$ .....	81
78. Subdivisi pada graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus $B_{P_3(C_4)}^{*3}$ .....	82
79. Minimum pewarnaan lokasi pada $B_{P_3(C_4)}^{*3}$ .....	82
80. Subdivisi dari graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus $B_{P_3(C_4)}^{*W}$ .....	84
81. Minimum pewarnaan lokasi pada $B_{P_3(C_4)}^{*W}$ .....	84

82. Subdivisi dari graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus $B_{P_3(C_4)}^{*W}$ .....	85
83. Minimum pewarnaan lokasi pada $B_{P_3(C_4)}^{*W}$ .....	87
84. Subdivisi dari graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus $B_{P_4(C_4)}^{*1}$ .....	88
85. Minimum pewarnaan lokasi pada $B_{P_4(C_4)}^{*1}$ .....	88
86. Subdivisi dari graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus $B_{P_4(C_4)}^{*2}$ .....	89
87. Minimum pewarnaan lokasi pada $B_{P_4(C_4)}^{*2}$ .....	90
88. Subdivisi dari graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus $B_{P_4(C_4)}^{*3}$ .....	91
89. Minimum pewarnaan lokasi pada $B_{P_4(C_4)}^{*3}$ .....	92
90. Subdivisi dari graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus $B_{P_4(C_4)}^{*W}$ .....	93
91. Minimum pewarnaan lokasi pada $B_{P_4(C_4)}^{*W}$ .....	93
92. Subdivisi dari graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus $B_{P_4(C_4)}^{*W}$ .....	95
93. Minimum pewarnaan lokasi pada $B_{P_4(C_4)}^{*W}$ .....	95
94. Subdivisi dari graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus $B_{P_n(C_4)}^{*1}$ $n$ ganjil.....	97
95. Subdivisi dari graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus $B_{P_n(C_4)}^{*1}$ $n$ genap.....	98
96. Minimum pewarnaan lokasi pada $B_{P_n(C_4)}^{*1}$ .....	98
97. Subdivisi dari graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus $B_{P_n(C_4)}^{*W}$ $n$ ganjil.....	100
98. Subdivisi dari graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus $B_{P_n(C_4)}^{*W}$ $n$ genap .....	100
99. Minimum pewarnaan lokasi pada $B_{P_n(C_4)}^{*W}$ .....	101
100. Subdivisi dari graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus $B_{P_n(C_4)}^{*W}$ $n$ ganjil.....	103

101. Subdivisi dari graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus $B_{P_n(C_4)}^{*w}$ $n$ genap.....	103
102. Minimum pewarnaan lokasi pada $B_{P_n(C_4)}^{*w}$ .....	104

## I. PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Bilangan kromatik lokasi suatu graf adalah salah satu konsep dalam teori graf yang hingga kini masih menjadi topik yang menarik untuk dikaji. Konsep bilangan kromatik lokasi merupakan perpaduan antara pewarnaan dan dimensi partisi pada graf. Konsep dimensi partisi pertama kali dikaji oleh Chartrand dkk., pada tahun 1998 kemudian pada tahun 2002 Chartrand dkk., mengkaji bilangan kromatik lokasi dan mendefinisikan bilangan kromatik lokasi didasarkan pada banyaknya warna minimum yang digunakan pada pewarnaan lokasi dengan kode warna yang berbeda di setiap titik pada graf tersebut.

Pada tahun 2002 Chartrand, dkk., telah berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi beberapa kelas graf, diantaranya pada graf lengkap diperoleh  $\chi_L(K_n) = n$ , pada graf siklus diperoleh  $\chi_L(C_n) = 3$  untuk  $n$  ganjil 4 untuk  $n$  genap. Selain itu, Chartrand, dkk., juga mendapatkan pohon berorde  $n \geq 5$  dengan bilangan kromatik lokasi  $k \in \{3, 4, \dots, n - 2, n\}$ . Asmiati, dkk. (2011) telah mendapatkan bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi bintang seragam  $S_{k,m}$  dan tak seragam  $S_{k,(n_1, \dots, n_k)}$  untuk  $k \geq 2$ . Pada tahun 2012 Baskoro, dkk., berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi dari operasi dua graf corona. Kemudian Purwasih, dkk.,

(2012) telah berhasil membahas bilangan kromatik lokasi dari graf Harlin  $H = T \cup C$ , dimana  $T$  adalah subdivisi dari graf bintang dan bintang ganda dan  $C$  adalah siklus.

Penelitian bilangan kromatik lokasi terus berkembang, pada tahun 2013, Welyyanti, dkk., berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi pohon  $n$  – ary lengkap, selanjutnya Baskoro, dkk., (2013) berhasil mengkarakterisasi semua pohon dengan bilangan kromatik lokasi 3. Behtoei, dkk., (2014) juga berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi dari graf gabungan lintasan, lingkaran dan graf lengkap multipartit. Purwasih, dkk., (2015) berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi subdivisi lengkap dan graf bintang dengan satu sisi.

Pada tahun 2016, Asmiati, dkk., telah menentukan bilangan kromatik lokasi graf ulat dan graf kembang api dan Behtoei, dkk., (2016) juga membahas tentang bilangan kromatik lokasi hasil kali kartesian dari lintasan dan graf lengkap. Kemudian Asmiati, dkk., (2018) berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi dari graf barbel  $B_{n,n}$  untuk  $n \geq 3$  dimana graf  $B_{n,n}$  memuat dua graf isomorfik dari graf lengkap  $K_n$ . Irawan, dkk., (2018) berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi graf subdivisi dari graf kembang api untuk  $n \geq 2$ . Selanjutnya Asmiati, dkk., (2019) juga telah berhasil mendapatkan bilangan kromatik lokasi graf tak terhubung dari beberapa graf bintang ganda. Selanjutnya Asmiati, dkk., (2019) berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi subdivisi dari graf barbel yang memuat graf Petersen diperumum. Ghanem, dkk., (2019) juga telah berhasil mendapatkan bilangan kromatik lokasi hasil kali lintasan dan siklus.

Bilangan kromatik lokasi dari graf yang diperoleh dari operasi beberapa graf juga menarik untuk dipelajari. Pada tahun 2021 Damayanti, dkk., telah berhasil menentukan graf lintasan yang dimodifikasi dengan graf siklus dan memiliki bilangan kromatik lokasi 4. Asmiati dkk (2021) juga berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi graf barbel shadow lintasan. Irawan, dkk., (2021) telah berhasil menginvestigasi bilangan kromatik lokasi subdivisi dari operasi graf barbel tertentu yang memuat graf origami  $B_{O_n}^s$  untuk  $n \geq 3, s \geq 1$  adalah 5.

Berdasarkan penelusuran literatur yang telah dilakukan belum ada penelitian yang membahas tentang masalah penentuan bilangan kromatik lokasi graf barbel dan subdivisi dari modifikasi graf lintasan dan siklus. Oleh karena itu, pada penelitian ini akan dibahas penentuan bilangan kromatik lokasi graf barbel dan subdivisi dari modifikasi graf lintasan dan siklus.

## 1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Menentukan bilangan kromatik lokasi graf barbel dari modifikasi graf lintasan dan siklus.
2. Menentukan bilangan kromatik lokasi subdivisi dari graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus

### **1.3 Manfaat Penelitian**

Manfaat dari penelitian ini adalah :

1. Memberikan wawasan dan pemahaman mengenai bilangan kromatik lokasi graf, khususnya modifikasi graf lintasan dan siklus yang memuat graf barbel dan subdivisinya.
2. Sebagai referensi untuk penelitian lanjutan mengenai bilangan kromatik lokasi dari suatu graf.



## II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dijabarkan beberapa definisi, istilah-istilah yang berhubungan dengan materi yang akan dibahas pada penelitian ini.

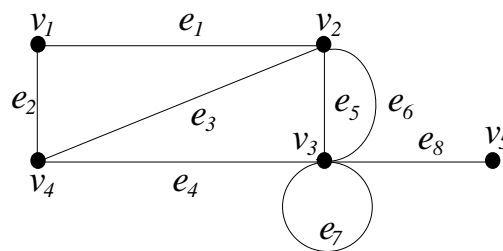
### 2.1 Konsep Dasar Graf

Teori graf diperkenalkan oleh Leonhard Euler tahun 1736 pada pembuktian kemungkinan melewati dalam sekali jalan empat daerah yang dihubungkan menggunakan tujuh jembatan diatas sungai Pregel di Konigsberg, Rusia. Permasalahan ini yang dikenal sebagai persoalan Jembatan Konigsberg ini direpresentasikan pada bentuk gambar yang akan dikenal menjadi representasi graf, dengan titik menyatakan wilayah dan sisi menyatakan jembatan yang menghubungkan 2 daerah. Pada permasalahan tersebut menggunakan representasi graf Euler dapat membuktikan bahwa tidak mungkin melewati setiap jembatan tepat satu kali dan kembali ke posisi semula (Sugeng dkk., 2014).



Gambar 2.1 Representasi graf untuk masalah perjalanan melintasi jembatan konigsberg (sumber: [http://en.wikipedia.org/wiki/File:Konisberg\\_bridges.png](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Konisberg_bridges.png))

Beberapa konsep dasar yang digunakan dalam penelitian ini diambil dari (Deo, 1989) dan (Sugeng dkk., 2014) Suatu graf  $G$  adalah himpunan terurut  $(V(G), E(G))$ , dengan  $V(G)$  menyatakan himpunan titik  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  dari  $G$  dengan  $V(G) \neq \emptyset$  dan  $E(G)$  menyatakan himpunan sisi  $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ , yakni pasangan tak terurut dari  $V(G)$ . Banyaknya himpunan titik  $V(G)$  disebut dengan orde dari graf  $G$ . Jika titik  $v_1$  dan  $v_2$  dihubungkan oleh sisi  $e$ , maka titik  $v_1$  dan  $v_2$  dikatakan menempel pada sisi  $e$ , begitu juga dengan sisi  $e$  menempel pada titik  $v_1$  dan  $v_2$ , sehingga saling bertetangga. Himpunan tetangga dari suatu titik  $v$  dinotasikan dengan  $N(v)$  adalah himpunan titik – titik yang bertetangga dengan  $v$



Gambar 2.2 Contoh graf  $G$  dengan 5 titik dan 8 sisi.

Pada Gambar 2.2 merupakan graf  $G(V, E)$  dengan himpunan titik  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  dan himpunan sisi  $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$ . Titik yang bertetangga dengan titik  $v_3$  adalah titik  $v_2, v_4, v_5$  sedangkan sisi yang menempel dengan titik  $v_3$  adalah sisi  $e_4, e_5, e_6$  dan  $e_8$  menempel pada titik  $v_3$ .

Derajat dari suatu titik  $v$  pada graf  $G$  adalah banyak sisi yang menempel pada titik  $v$  yang dinotasikan dengan  $d(v)$ . Daun adalah titik yang berderajat satu pada Gambar 2.2 yang dikatakan sebagai daun adalah titik  $v_5$ . Derajat masing – masing titik pada Gambar 2.2 adalah  $d(v_1) = 2, d(v_2) = 4, d(v_3) = 5, d(v_4) =$

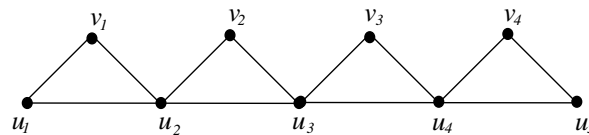
$3, d(v_5) = 1$ . Sisi paralel adalah beberapa sisi yang memiliki daun dan titik ujung yang sama. *Loop* adalah sisi yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. *Loop* pada Gambar 2.2 adalah  $e_7$ .

Barisan berhingga bergantian antara titik dan sisi yang dimulai dan diakhiri dengan titik sedemikian sehingga setiap sisi menempel dengan titik sebelum dan sesudahnya, pada suatu graf disebut dengan jalan. Lintasan adalah jalan yang melewati titik yang berbeda – beda pada suatu graf dimana titik - titik yang dilewati tepat sekali. Pada Gambar 2.2 yang merupakan jalan adalah  $v_1, e_1, v_2, e_3, v_4, e_4, v_3, e_5, v_2, e_6, v_3, e_8, v_5$ . Sedangkan, lintasan pada Gambar 2.2 adalah  $v_1, e_1, v_2, e_3, v_4, e_4, v_3, e_8, v_5$ . Sirkuit adalah lintasan yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama, yang sering disebut juga dengan lintasan tertutup. Pada suatu graf sirkuit dibedakan menjadi dua macam, yaitu sirkuit genap dan ganjil. Sirkuit genap adalah sirkuit yang memuat banyaknya titik yang berjumlah genap, sedangkan sirkuit ganjil adalah sirkuit yang memuat banyaknya titik berjumlah ganjil. Contoh sirkuit pada Gambar 2.2 adalah  $v_1, e_1, v_2, e_3, v_4, e_2, v_1$  yang merupakan sirkuit genap, sedangkan  $v_2, e_6, v_3, e_4, v_4, e_2, v_1, e_1, v_2$  merupakan sirkuit ganjil.

## 2.2 Graf Modifikasi Lintasan dan Siklus

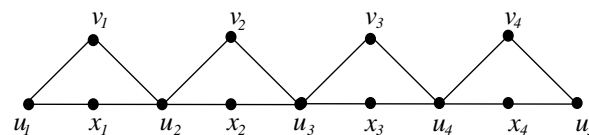
Pada bagian ini akan didefinisikan graf modifikasi lintasan dengan siklus yang terdiri dari 2 jenis yang diambil dari Damayanti, dkk., (2021).

Graf pertama adalah graf modifikasi lintasan  $P_n$  dengan siklus  $C_n$  yang dinotasikan  $P_n(C_3)$  diperoleh dari lintasan  $P_n$  dengan  $u_i$  titik,  $i = 1, \dots, n$  menambahkan titik di  $P_n$  yang akan membentuk  $C_3$ , dengan himpunan titik  $V(P_n(C_3)) = \{u_i, v_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i; 1 \leq i \leq n-1\}$  dan himpunan sisi  $E(P_n(C_3)) = \{u_i v_i, u_{i+1} v_i; i \in [1, n-1]\} \cup \{u_n u_{n+1}; i \in [1, n-1]\}$ .



Gambar 2.3 Graf  $P_5(C_3)$

Graf kedua adalah graf modifikasi graf lintasan  $P_n$  dengan siklus  $C_n$  yang dinotasikan  $P_n(C_4)$  diperoleh dengan cara mensubdivisi satu titik  $x_i$  ke sisi  $(u_i, u_{i+1})$  yang akan membentuk  $C_4$ , dengan himpunan titik  $V(P_n(C_4)) = \{u_i, v_i, x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i, x_i; 1 \leq i \leq n-1\}$ , dan himpunan sisi  $E(P_n(C_4)) = \{u_{2i-1} v_i; i \in [1, n-1]\} \cup \{u_{2i+1} v_i; i \in [1, n-1]\} \cup \{u_i x_i; i \in [1, n-1]\} \cup \{x_i u_{i+1}; i \in [1, n-1]\}$  (Damayanti, dkk., 2021).

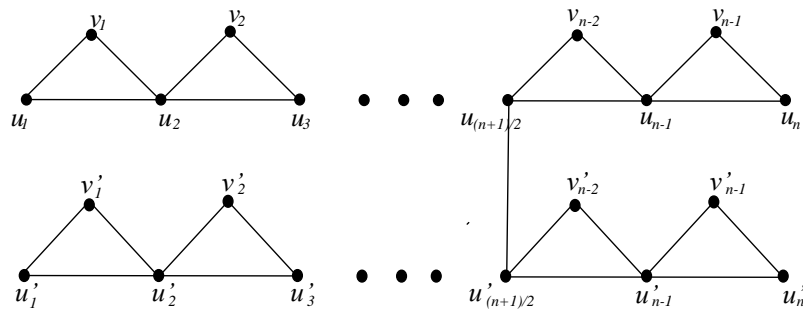


Gambar 2.4 Graf  $P_5(C_4)$

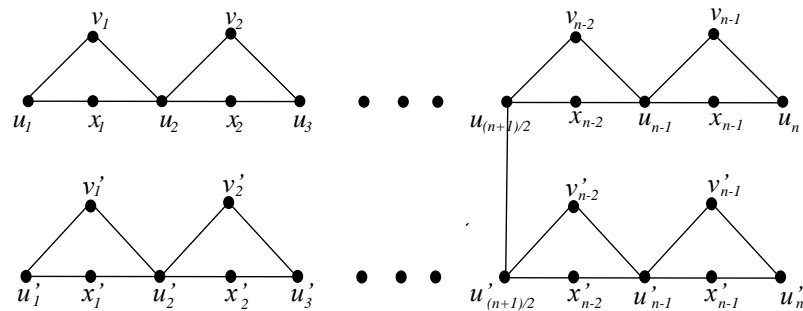
### 2.3 Graf Barbel dan Graf Subdivisi dari Modifikasi Graf Lintasan dan Siklus

Graf barbel adalah graf sederhana yang dibentuk dengan menghubungkan dua graf tiruan yang dihubungkan dengan sebuah sisi (Ihwan, dkk., 2014).

Graf barbel yang memuat modifikasi Graf Lintasan dan Siklus  $P_n(C_3)$  atau  $P_n(C_4)$  dinotasikan dengan  $B_{P_n(C_3)}$  atau  $B_{P_n(C_4)}$  adalah graf sederhana yang diperoleh dari tiruan graf  $P_n(C_3)$  atau  $P_n(C_4)$  yang dihubungkan oleh suatu jembatan, yaitu sisi  $\left(\frac{u_{n+1} u'_{n+1}}{2}\right)$  untuk  $n$  ganjil dan  $\left(\frac{u_n u'_n}{2}\right)$  untuk  $n$  genap, dengan  $u'_n$  dan  $u'_{n+1}$  adalah titik-titik dari graf tiruannya.

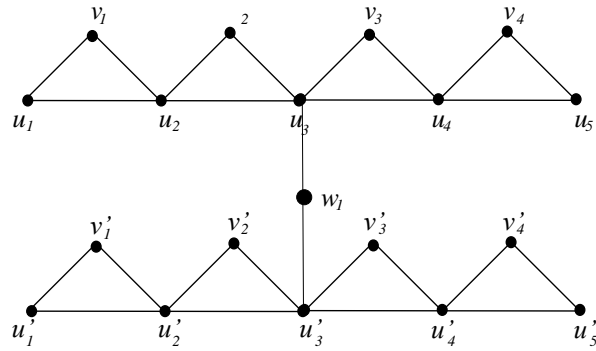


Gambar 2.5 Contoh Graf  $B_{P_n(C_3)}$  untuk  $n$  ganjil



Gambar 2.6 Contoh Graf  $B_{P_n(C_4)}$  untuk  $n$  ganjil

Graf subdivisi dari graf barbel yang memuat modifikasi Graf Lintasan dan Siklus  $P_n(C_3)$  atau  $P_n(C_4)$  yang dinotasikan dengan  $B_{P_n(C_3)}^{*w}$  atau  $B_{P_n(C_4)}^{*w}$  adalah graf yang diperoleh dari graf  $B_{P_n(C_3)}$  atau  $B_{P_n(C_4)}$  dengan menyisipkan beberapa titik pada jembatan graf barbelnya (Purwasih, dkk. 2013).



Gambar 2.7 Contoh Graf  $B_{P_5}^{*w}(C_3)$  yang disubdivisi satu titik

## 2.4 Bilangan Kromatik Lokasi Graf

Bilangan kromatik lokasi merupakan pengembangan dari dua konsep dalam graf, yaitu pewarnaan titik dan dimensi partisi graf. Pewarnaan titik graf  $G$  adalah  $c:V(G) \rightarrow \{1,2,3,\dots,l\}$ , dengan syarat dua titik yang bertetangga tidak boleh memiliki warna yang sama. Bilangan kromatik lokasi didefinisikan misalkan  $G = (V, E)$  adalah graf terhubung dan  $c$  suatu pewarnaan sejati di graf  $G$  dengan  $c(u) \neq c(v)$  untuk titik  $u$  dan titik  $v$  yang bertetangga di graf. Jarak titik  $v$  terhadap titik  $w$  dinotasikan  $d(u, w)$  adalah panjang lintasan terpendek dari titik  $v$  terhadap titik  $w$ . Misalkan  $C_i$  adalah himpunan titik-titik yang diberi warna, yang selanjutnya disebut kelas warna, maka  $\Pi = \{K_1, K_2, K_3, \dots, K_m\}$  adalah himpunan yang terdiri dari kelas-kelas warna dari  $V(G)$ . Kode warna  $c_\Pi$  dari  $v$  adalah  $k$ -pasang terurut  $(d(v, K_1), d(v, K_2), \dots, d(v, K_m))$  dengan  $d(v, K_i) = \min \{d(v, x) | x \in K_i\}$  untuk  $1 \leq i \leq m$ . Jika setiap titik di  $G$  mempunyai kode warna yang berbeda, maka  $c$  disebut pewarnaan lokasi dari  $G$ . Bilangan kromatik lokasi dari  $G$ , dinotasikan dengan  $\chi_L(G)$  adalah bilangan terkecil  $k$  sehingga  $G$  mempunyai pewarnaan  $k$  lokasi.

Berikut teorema dasar yang telah dibuktikan oleh Chartrand dkk., pada tahun 2002 tentang bilangan kromatik lokasi graf. Himpunan tetangga dari titik  $v$ , dinotasikan dengan  $N(v)$ .

Teorema 2.1 (Chartrand, dkk., 2002)

Misalkan  $c$  adalah pewarnaan lokasi pada graf  $G$ . Jika  $u$  dan  $v$  adalah dua titik yang berbeda di graf  $G$  sedemikian sehingga  $d(v, w) = d(u, w)$  untuk semua  $w \in V(G) - \{u, v\}$ , maka  $c(u) = c(v)$ . Secara khusus, jika  $u$  dan  $v$  titik-titik yang tidak bertetangga di  $G$  sedemikian sehingga  $N(u) = N(v)$ , maka  $c(u) \neq c(v)$ .

Bukti:

Misal  $c$  adalah suatu pewarnaan lokasi graf terhubung  $G$  dan misalkan  $\Pi = \{K_1, K_2, K_3, \dots, K_m\}$  adalah partisi dari titik-titik  $G$  ke dalam kelas warna  $K_i$ . Untuk suatu  $u, v \in V(G)$ , andaikan  $c(u)$  sedemikian sehingga titik  $u$  dan titik  $v$  berada dalam kelas warna yang sama, misal  $K_i$  dari  $\Pi$ . Akibatnya  $d(u, K_i) = d(v, K_i) = 0$ . Karena  $d(u, w)$  untuk setiap  $w \in V(G) - \{u, v\}$ , maka  $d(u, K_j) \neq d(v, K_j)$  untuk setiap  $j \neq i, 1 \leq j \leq m$ . Akibatnya  $c_{\Pi}(u) \neq c_{\Pi}(v)$  sehingga  $c$  bukan pewarnaan lokasi. Jadi,  $c(u) \neq c(v)$ .

Akibat 2.2 (Chartrand, dkk., 2002)

Jika  $G$  adalah graf terhubung dengan suatu titik yang bertetangga dengan  $k$  daun, maka  $\chi_L(G) \geq k + 1$ .

Bukti:

Misalkan  $v$  adalah suatu titik yang bertetangga dengan  $k$  daun, yaitu  $x_1, x_2, \dots, x_k$  di  $G$ . Berdasarkan Teorema 2.1, setiap pewarnaan lokasi dari  $G$  mempunyai warna yang berbeda untuk setiap  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  karena  $v$  bertetangga dengan semua  $x_i$ . Akibatnya,  $\chi_L(G) \geq k + 1$ .

Teorema 2.3 (Chartrand, dkk., 2002)

Pada graf siklus  $C_n$  misalkan  $n \geq 3$  maka

$$\chi_L(C_n) = \begin{cases} 3, & \text{jika } n \text{ ganjil} \\ 4, & \text{jika } n \text{ genap} \end{cases}$$

Bukti:

Kasus I

Jika  $n \geq 3$  adalah ganjil. Misal himpunan titik graf siklus  $V(C_n) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$  ditetapkan warna 1 untuk  $v_1$ , warna 2 untuk  $v_i$  jika  $i$  adalah genap dan warna 3 untuk  $v_i$ , jika  $i \geq 3$  dan  $i$  ganjil. Berdasarkan akibat 1 perlu ditunjukkan bahwa ini adalah pewarnaan lokasi untuk membuktikan bahwa  $\chi_L(C_n) = 3$ . Pertimbangkan dua subkasus berikut:

*Subkasus 1.1*

Jika  $n \geq 4k + 1$ , dimana  $k \geq 1$ , untuk  $1 \leq i \leq k$ ,  $c(v_{2i}) = (2i - 1, 0, 1)$  dan untuk  $k + 1 \leq i \leq 2k$ ,  $c(v_{2i}) = (2k + 2 - 2i, 0, 1)$ . Juga untuk  $1 \leq i \leq k$ ,  $c(v_{2i}) = (2i - 1, 1, 0)$  dan untuk  $k + 1 \leq i \leq 2k$ ,  $c(v_{2i}) = (2k + 2 - 2i, 0, 1)$ . Karena vektor-vektor,  $c(v_i)$  berbeda, sehingga pewarnaan tersebut adalah perwarnaan lokasi jadi  $\chi_L(C_{4k+1}) = 3$ .



### Subkasus 1.2

Jika  $n = 4k + 3$ , dimana  $k \geq 0$ . Membuktikan bahwa  $\chi_L(C_{4k+3}) = 3$  caranya sama seperti pada subkasus 1.1.

### Kasus 2

Jika  $n \geq 4$  adalah genap. Misalkan kembali himpunan titik graf siklus  $V(C_n) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ . Diberi warna 1 untuk  $v_1$ , warna 2 untuk  $v_2$ , warna 3 untuk  $v_3$  jika  $i \geq 3$ ,  $i$  ganjil dan warna 4 untuk  $v_i$  jika  $i \geq 4$  genap. Akan ditunjukkan bahwa pewarnaan lokasi dari  $C_n$  adalah  $\chi_L(C_{4k}) = 4$ .

### Subkasus 2.1

Jika  $n = 4k$ , dimana  $k \geq 1$ , untuk  $1 \leq i \leq k$ ,  $c(v_{2i}) = (2i, 2i - 1, 0, 1)$ . Dimana  $k + 1 \leq i \leq 2k$ ,  $c(v_{2i}) = (4k - 2i, 4k + 1 - 2i, 0, 1)$ . Untuk  $2 \leq i \leq k$ ,  $c(v_{2i}) = (2i - 1, 2i - 1, 0, 1)$ ; dimana  $k + 1 \leq i \leq 2k$ ,  $c(v_{2i}) = (4k + 1 - 2i, 4k + 2 - 2i, 0, 1)$ . Karena vektor-vektor  $c(v_i)$  berbeda, pewarnaan tersebut adalah pewarnaan lokasi, dan  $\chi_L(C_{4k}) = 4$ .

### Subkasus 2.2

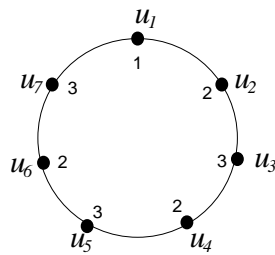
$n = 4k + 2$ , dimana  $k \geq 1$ . Pembuktian bahwa pewarnaan tersebut adalah pewarnaan lokasi sama seperti Subkasus 2.1. selanjutnya hanya perlu membuktikan bahwa  $\chi_L(C_{4k}) = 4$  jika  $n$  genap. Asumsikan sebaliknya, bahwa terdapat pewarnaan lokasi  $c$  dari  $C_n$  memerlukan 3 warna, misalkan 1,2,3 untuk  $n \geq 4$ . Setidaknya terdapat satu warna, misalkan 2 adalah warna bilangan genap  $t$  dari titik  $C_n$ , dimana  $2 \leq t \leq \frac{n}{2}$ . seperti proses siklus pada  $C_n$ , dimulai dengan  $v_1$ , misalkan

$v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_4}$  adalah titik-titik di  $C_n$  berwarna 2. Karena tidak ada 2 titik yang bertetangga termasuk untuk setiap bilangan bulat  $j$  dengan  $1 \leq j \leq t$ . Interval  $I_j = \{v_{i_{j+1}}, v_{i_{j+2}}, \dots, v_{i_{j+1-1}}\}$  adalah tak kosong.

Pertama, akan ditunjukkan bahwa tidak ada interval yang memiliki kardinalitas ganjil untuk 3 atau lebih, asumsikan secara kontradiksi, beberapa selang  $I_j$  memuat bilangan ganjil pada titik 3 atau lebih. Tanpa menghilangkan secara umum, asumsikan bahwa  $v_{i_{j+1}}$  dan  $v_{i_{j+1-1}}$  diberi warna 1. Meskipun demikian,  $c_{\Pi}(v_{i_{j+1-1}}) = (0,1,1)$  tetapi tidak mungkin.

Kedua, akan ditunjukkan bahwa tidak ada selang yang memuat bilangan genap pada titik-titiknya. Sebaliknya, terdapat selang-selang yang memuat bilangan genap di titik-titiknya. Karena  $C_{2k}$  memiliki susunan genap, pasti terdapat bilangan genap dari selang yang memuat bilangan genap di titik-titiknya. Asumsikan, tanpa kehilangan keumuman, bahwa  $v_{i_{j+1}}$  diberi pewarnaan 1. Tepat hanya 1 dari  $v_{i_{k+1}}$  dan  $v_{i_{k+1-1}}$  diberi warna 1, maka  $c_{\Pi}(v_{i_{j+1-1}}) = c_{\Pi}(v_{i_{j+1-1}}) = (0,1,1)$ , kontradiksi.

Akibatnya, semua selang  $t = \frac{n}{2}$  memuat tepat satu titik. Sehingga, terdapat bilangan bulat  $i_j$  ( $1 \leq j \leq \frac{n}{2}$ ), maka  $v_{i_{k+1}}$  dan  $v_{i_{j+1}}$  diberi warna secara berbeda, misalkan 1 dan 3 secara berturut-turut terdapat bilangan bulat  $i_k > i_j$  bahwa  $v_{i_{k+1-1}}$  diberi warna 3 dan  $v_{i_{k+1}}$  diberi warna 1. Meskipun demikian,  $c(v_{i_j}) = (1,0,1)$ , hasil akhir kontradiksi. Oleh karena itu,  $\chi_L(C_n) = 4$  jika  $n$  adalah genap.



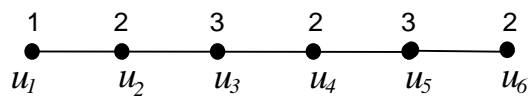
Gambar 2.8 Pewarnaan lokasi minimum pada graf siklus  $C_7$

Teorema 2.4 (Chartrand, dkk., 2002)

Bilangan kromatik lokasi graf lintasan  $P_n$  adalah 3, untuk  $n \geq 3$ .

Bukti:

Perhatikan bahwa  $\chi_L(P_1) = 1$  dan  $\chi_L(P_2) = 1$ . terbukti bahwa  $\chi_L(P_n) \geq 3$ . untuk  $n \geq 3$ . Berdasarkan Teorema 2.2,  $\chi_L(G) \leq k + 1$ , dengan  $k$  merupakan derajat titik maksimum. Karena pada  $P_n$ ,  $k = 2$ , maka  $\chi_L(G) \leq k + 2$ . Akibatnya  $\chi_L(G) \leq 3$ . Oleh karena kode warna dari semua titik di  $G$  berbeda, maka  $c$  adalah pewarnaan lokasi. Jadi,  $\chi_L(G) \geq 3$ . Berdasarkan Akibat 2.1 dan Teorema 2.2, maka  $\pi$  adalah pewarnaan lokasi dari  $G$  sehingga  $\chi_L(G) = 3$ .



Gambar 2.9 Pewarnaan lokasi minimum pada graf lintasan  $P_6$

## 2.5 Bilangan Kromatik Lokasi dari Modifikasi Graf Lintasan dan Siklus

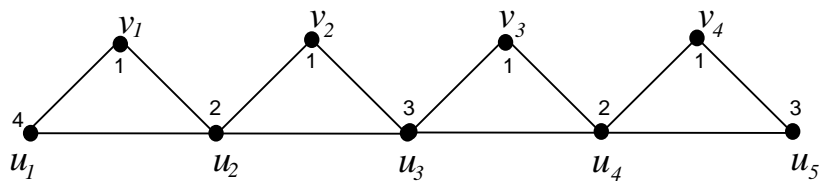
Berikut beberapa teorema yang telah dibuktikan oleh Maharani, dkk., pada tahun 2021 tentang bilangan kromatik lokasi dari modifikasi graf lintasan dan siklus.

Teorema 2.5 (Damayanti, dkk., 2021)

Graf  $P_n(C_3)$  merupakan graf modifikasi lintasan yang diperoleh dari lintasan  $P_n$ , dengan  $v_i$  titik,  $i = 1, \dots, n$ . Dengan menambahkan titik di  $P_n$ , yang akan membentuk  $C_3$ , didapatkan bilangan kromatik lokasi  $P_n(C_3)$  adalah 4.

Bukti :

Misalkan  $P_n(C_3)$   $n \geq 3$ , dengan himpunan titik  $V(P_n(C_3)) = \{u_i, v_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i; 1 \leq i \leq n-1\}$ , dan himpunan sisi  $E(P_n(C_3)) = \{u_i v_i, u_i v_{i+1}; i \in [1, n-1]\} \cup \{v_n v_{n+1}; i \in [1, n-1]\}$ . Pertama akan ditentukan batas bawah terlebih dahulu. Misalkan  $c$  adalah pewarnaan lokasi pada  $P_n(C_3)$  pada bilangan kromatik 4. Misalkan  $c(v_i) = \{1, 2, 3\} = c(u_i)$ , karena  $u_i$  berdekatan dengan  $v_i$  dan  $v_{i+1}$ , jika  $c(v_i) = c(u_j)$ , maka  $c_\pi(u_i) = c_\pi(v_j)$ ,  $d i \neq j$ , merupakan sebuah kontradiksi. Akibatnya dibutuhkan minimal 4 warna untuk mewarnai graf  $P_n(C_3)$ . Jadi  $\chi_L P_n(C_3) \geq 4$ . Selanjutnya akan ditentukan batas atas graf  $P_n(C_3)$ . Misalkan  $c$  pewarnaan lokasi menggunakan 4 warna, dan menghasilkan setiap titik pada  $P_n(C_3)$  memiliki kode warna yang berbeda, maka  $c$  adalah pewarnaan lokasi dengan menggunakan 4 warna, Maka  $\chi_L(P_n(C_3)) \leq 4$ . Oleh karena itu  $\chi_L P_n(C_3) = 4$ .



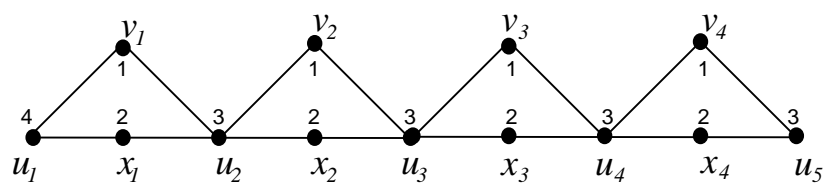
Gambar 2.10 Pewarnaan lokasi minimum pada graf  $P_5(C_3)$

Teorema 2.6 (Damayanti, dkk., 2021)

Graf  $P_n(C_4)$  merupakan graf yang diperoleh dengan cara mensubstitusi satu titik  $x_i$  ke dalam  $u_i, u_{i+1}$  dilambangkan dengan  $P_n(C_4)$ , didapatkan bilangan kromatik lokasi  $P_n(C_4)$  adalah 4.

Bukti:

Misalkan  $P_n(C_4)$   $n > 3$ , dengan himpunan titik  $V(P_n(C_4)) = \{u_i, v_i, x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i, x_i; 1 \leq i \leq n-1\}$ , dan himpunan sisi  $E(P_n(C_4)) = \{v_{2i-1}, u_i; i \in [1, n-1]\} \cup \{u_i v_{2i+1}; i \in [1, n-1]\} \cup \{v_i x_i; i \in [1, n-1]\} \cup \{x_i v_{i+1}; i \in [1, n-1]\}$ . Pertama akan ditentukan batas bawah terlebih dahulu. Karena graf  $P_n(C_4)$  memuat graf  $P_n(C_3)$  Akibatnya  $\chi_L(P_n(C_3)) \geq 4$ . Selanjutnya akan ditentukan batas atas graf  $P_n(C_4)$ . Misalkan  $c$  pewarnaan lokasi menggunakan 4 warna, dan menghasilkan setiap titik pada  $P_n(C_4)$  memiliki kode warna yang berbeda, maka  $c$  adalah pewarnaan lokasi dengan menggunakan 4 warna, Maka  $\chi_L(P_n(C_4)) \leq 4$ . Oleh karena itu  $\chi_L(P_n(C_4)) = 4$ .



Gambar 2.11 Pewarnaan lokasi minimum pada graf  $P_5(C_4)$

### III. METODOLOGI PENELITIAN

#### 3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada semester genap tahun akademik 2021/2022 di Program Studi Magister Matematika Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

#### 3.2 Metode Penelitian

Langkah-langkah yang dilakukan untuk menentukan bilangan kromatik lokasi bilangan kromatik lokasi graf barbel dan subdivisi dari modifikasi graf lintasan dan siklus adalah sebagai berikut :

1. Metode menentukan bilangan kromatik lokasi graf barbel dari modifikasi graf lintasan dan siklus  $B_{P_n(C_3)}$  dan  $B_{P_n(C_4)}$  sebagai berikut:
  - a. Menentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi graf barbel dari modifikasi graf lintasan dan siklus  $B_{P_n(C_3)}$  dan  $B_{P_n(C_4)}$  dengan  $n \geq 3$  dengan menggunakan batas bawah trivial, karena graf barbel dari modifikasi graf lintasan dan siklus  $B_{P_n(C_3)}$  dan  $B_{P_n(C_4)}$  memuat graf modifikasi graf lintasan dan siklus  $P_n(C_3)$  dan  $P_n(C_4)$ , maka sekurang-kurangnya memuat warna dari graf modifikasi graf lintasan dan siklus

$P_n(C_3)$  dan  $P_n(C_4)$  . Jika batas trivial tersebut belum memenuhi syarat pewarnaan lokasi, maka dilakukan penambahan bertahap pewarnaannya sedemikian sehingga syarat pewarnaan lokasi terpenuhi.

- b. Menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi graf barbel dari modifikasi graf lintasan dan siklus  $B_{P_n(C_3)}$  dan  $B_{P_n(C_4)}$  dengan  $n \geq 3$ . Mengkontruksi pewarnaan titik-titik dengan melihat struktur grafnya. Pewarnaan titik dimulai dengan label terkecil sedemikian sehingga diperoleh minimum pewarnaan titik memenuhi syarat pewarnaan lokasi.
  - c. Jika batas bawah dan batas atas bilangan kromatik lokasi  $B_{P_n(C_3)}$  sama, misal  $x$  maka diperoleh bilangan kromatik lokasinya, yaitu  $x$ , dan untuk  $B_{P_n(C_4)}$ , jika batas bawah dan batas atas bilangan kromatik lokasi  $B_{P_n(C_4)}$  sama, misal  $x$  maka diperoleh bilangan kromatik lokasinya, yaitu  $x$ ;
  - d. Memformulasikan hasil-hasil yang diperoleh dalam suatu pernyataan matematika;
  - e. Membuktikan hasil-hasil yang diperoleh pada langkah d;
2. Metode menentukan bilangan kromatik lokasi subdivisi dari graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus  $B_{P_n(C_3)}^{*w}$  dan  $B_{P_n(C_4)}^{*w}$ :
- a. Menentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi subdivisi dari graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus  $B_{P_n(C_3)}^{*w}$  dan  $B_{P_n(C_4)}^{*w}$ , karena subdivisi dari graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus  $B_{P_n(C_3)}^{*w}$  dan  $B_{P_n(C_4)}^{*w}$  memuat graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus  $B_{P_n(C_3)}$

dan  $B_{P_n(C_4)}$  maka sekurang-kurangnya memuat warna dari graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus  $B_{P_n(C_3)}$  dan  $B_{P_n(C_4)}$ ,

- b. Menentukan batas atas bilangan kromatik subdivisi dari graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus  $B_{P_n(C_3)}^{*w}$  dan  $B_{P_n(C_4)}^{*w}$ . Mengkontruksi pewarnaan titik-titik dengan melihat struktur grafnya. Pewarnaan titik dimulai dengan label terkecil sedemikian sehingga diperoleh minimum pewarnaan titik yang memenuhi syarat pewarnaan lokasi.
- c. Jika batas bawah dan batas atas bilangan kromatik lokasi subdivisi dari graf barbel  $B_{P_n(C_3)}^{*w}$  sama, misal  $x$  maka diperoleh bilangan kromatik lokasinya, yaitu  $x$ , dan untuk  $B_{P_n(C_4)}^{*w}$  jika batas bawah dan batas atas bilangan kromatik lokasi  $B_{P_n(C_4)}^{*w}$  sama, misal  $x$  maka diperoleh bilangan kromatik lokasinya, yaitu  $x$ ;
- d. Memformulasikan hasil-hasil yang diperoleh dalam suatu pernyataan matematika;
- e. Membuktikan hasil-hasil yang diperoleh pada langkah d;



## V. KESIMPULAN

### 5.1 Kesimpulan

Pada penelitian ini telah berhasil ditentukan dan dibuktikan bilangan kromatik lokasi dari graf barbel modifikasi graf lintasan dan siklus  $B_{P_n(C_3)}$  dan  $B_{P_n(C_4)}$  adalah 4. Selanjutnya untuk subdivisi diperoleh bilangan kromatik lokasinya 4 atau 5.

### 5.2 Saran

Penelitian ini dapat dilanjutkan dengan bilangan kromatik lokasi graf modifikasi graf lintasan dan siklus untuk operasi graf yang lain.

## DAFTAR PUSTAKA

- Asmiati, Assiyatun, H., dan Baskoro, E.T. 2011. Locating-Chromatic Number of Amalgamation of Stars. *ITB J Journal of Science*.**43**(1):1-8.
- Asmiati. 2016. On the locating-chromatic numbers of non homogeneous caterpillars and firecracker graphs. *Far East Journal of Mathematical Sciences*. **100**(8):1305-1316.
- Asmiati., Yana, K. S. G., dan Yulianti, L. 2018. On the Locating Chromatic Number of Certain Barbell Graphs. *Internasional Journal of Math and Math Science*. **2018**:1-5.
- Asmiati, Yana IKSG., dan Yulianti L. 2019. On the Locating Chromatic Number of subdivision of Barbell Graphs containing generalized Petersen graphs. *International Journal of Computer Science and Network Security*.; **19**(7): 45-50.
- Asmiati, Yulianti, L., Aldino, Aristteles, dan Junaidi. 2019. The Locating Chromatic Number of Subdivision of a Disjoin Union of Some Double Stars. . *IOP Conf. Series:Journal of Physics*. **1338**:1-5.
- Asmiati, Damayanti M., dan Yulianti L. 2021. On the locating chromatic number of barbell shadow path graphs. *Indonesian Journal of Combinatorics*. **5**(2):82-93.
- Baskoro, E. T., dan Purwasih, A. I. 2012. The locating chromatic number for corona product of graphs. *Sotheast-Asian J. of sciences*. **1**(1):126-136.
- Behtoei, A. dan Anbarloei, M. 2014. The Locating Chromatic Number of The Join of Graphs. *Bulletin of The Iranian Mathematical Society*. **40**(6):1491 – 1504.

- Behtoei, A. dan Omoomi, B. 2016. On the locating chromatic number of Cartesian product of graphs. *Ars Combinatoria*. **126**:221-235.
- Chartrand, G., P. Zhang, dan E. Salehi. 1998. On the partition dimension of graph. *Congr. Numer.* **130**:157-168.
- Chartrand, G. Erwin., D. Henning., M. A. Slater, P. J. dan Zhang. P. 2002. The Locating - Chromatic Number of a Graph. *Bull. Inst. Combin. Appl.* **36**:89-101.
- Damayanti, M., Asmiati., Fitriani., Ansori, M., dan Faradilla, A. 2021. The Locating Chromatic Number of some Modified Path with Cycle having Locating Number Four. *J. Phys. Conf. Ser.* **1751**. 1-5.
- Deo, N. 1989. Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science. *Prentice Hall of India Private Limited, New Delhi*
- Ghanem, M., AL-Ezeh, H., dan Dabbour, A. 2019. Locating Chromatic Number of Power of Path and Cycle. *Symmetry*. **1338**(1):1-6.
- Ihwan, M, D., Rahmawati, A., dan Sumargono. 2014. Kajian Bilangan Clique Graf Gear  $G_n$  dan Graf Barbel  $B_n$ . *Jurnal Gagasan Matematika dan Informatika*. **5**(1):39-50.
- Irawan, A. dan Asmiati. 2018. The Locating-Chromatic Number of Subdivision Firecracker Graphs. *International Mathematical Forum*. **13**(10):485-492.
- Irawan, A, Asmiati, Zakaria L, Muludi K., dan Bernadhita U. 2021. Subdivision of Certain Barbell Operation of Origami Graphs has Locating-Chromatic Number Five. *International Journal of Computer Science and Network Security*. **21** (9):1738-7906.
- Purwasih, I, A, dan Baskoro, E, T. 2012. The locating-chromatic number for Halin graphs. *AIP Conference Proceedings*. **1450**(1): 342-345.

Purwasih, I.A., Baskoro, E. T., Assiyatun, H., dan Djohan, W. 2013. The locating-chromatic number for a subdivision of a wheel on one cycle edge. *AKCE Int. J. Graphs Comb.* **10(3)**:327-336.

Purwasih, I. A., Baskoro, E. T., Assiyatun, H., dan Suprijanto, D. 2015. The Bounds on The Locating-Chromatic Number for a Subdivision of a Graph on One Edge. *Procedia Computer Science.* **74**: 84-88.

Sugeng, K. A., Slamet, S. dan Silaban, D. R. 2014. *Teori Graf dan Aplikasinya*. Departemen Matematika FMIPA UI, Depok.

Welyyanti, D., Baskoro, E. T., Simanjuntak, R. dan Uttunggadewa, S. 2013. The Locating-chromatic Number of Complete  $n$ -ary Tree. *AKCE Int. J. Graph Combs.* **10(3)**:309-315.