DINAMIKA PERKEMBANGAN KASUS WABAH COVID-19 DENGAN VAKSINASI MENGGUNAKAN MODEL *SUSCEPTIBLE, INFECTED,* DAN *RECOVERED* (*SIR*)

Skripsi

Oleh
M. Is’ad Arifaldi P.

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2022

ABSTRACT

DYNAMICS OF THE DEVELOPMENT OF COVID-19 OUTBREAK WITH VACCINATION USING THE SUSCEPTIBLE, INFECTED, AND RECOVERED (SIR) MODEL

By

M. IS'AD ARIFALDI P.

The Covid-19 pandemic in 2020 has caused severe problems in Indonesia. The Covid-19 virus epidemic can be modeled using the Susceptible, Infected, and Recovered (*SIR*) model. This modeling aims to look at the dynamics of Covid-19 in order to be able to predict when disease-free and endemic disease occurs and to find the primary reproduction number (R_0) for policy making in suppressing the spread of Covid-19. Modeling *S*, *I*, and *R* with assumptions. Determine the model error percentage with MAPE. The SIR Covid-19 model was made using 8 parameters, namely $N, \alpha, \beta, \tau, \mu, \sigma, \delta, \gamma$ and they are all positive. The results showed that the disease-free and disease-endemic equilibrium points were locally asymptotically stable after being analyzed using the Routh-Hurwitz stability criteria. The model trial using data from UPTD Puskesmas Batanghari. From this study, obtained $R_0 = \frac{\beta\sigma}{\alpha+\mu}$. This means that if you want to reduce the rate of spread, then reduce the number of people who are easily infected (σ) and reduce contacts (β) and increase the healing rate (α). The condition of the Batanghari Health Center in East Lampung is stable for the next 100 months, with an MAPE of 2.8%.

Keywords: SIR Model, Covid-19, Basic Reproduction Number, Routh-Hurwitz Criteria

ABSTRAK

DINAMIKA PERKEMBANGAN KASUS WABAH COVID-19 DENGAN VAKSINASI MENGGUNAKAN MODEL *SUSCEPTIBLE, INFECTED,* DAN *RECOVERED* (*SIR*)

Oleh

M. IS'AD ARIFALDI P.

Pandemi Covid-19 pada tahun 2020 telah menimbulkan masalah yang cukup berat di Indonesia. Epidemi virus Covid-19 dapat dimodelkan dengan menggunakan model *Susceptible*, *Infected*, dan *Recovered* (*SIR*). Pemodelan ini bertujuan untuk melihat dinamika Covid-19 agar dapat memprediksi kapan bebas penyakit dan endemik penyakit terjadi serta menemukan bilangan reproduksi dasar (R_0) untuk pengambilan kebijakan dalam menekan penyebaran Covid-19. Pemodelan *S*, *I*, dan R dengan asumsi. Tentukan persentase kesalahan model dengan MAPE. Model *SIR* Covid-19 dibuat dengan menggunakan 8 parameter yaitu $N, \alpha, \beta, \tau, \mu, \sigma, \delta, \gamma$ dan semuanya positif. Hasil penelitian menunjukkan bahwa titik ekuilibrium bebas penyakit dan endemik penyakit stabil asimtotik lokal setelah dianalisis menggunakan kriteria stabilitas Routh-Hurwitz. Uji coba model menggunakan data dari UPTD Puskesmas Batanghari. Dari penelitian ini, diperoleh $R_0 = \frac{\beta\sigma}{\alpha+\mu}$, artinya jika ingin mengurangi tingkat penyebaran, maka kurangi jumlah orang yang mudah terinfeksi (σ) dan kurangi kontak (β) dan tingkatkan tingkat penyembuhan (α). Kondisi Puskesmas Batanghari Lampung Timur stabil hingga 100 bulan ke depan, dengan MAPE sebesar 2,8%.

Keywords: Model SIR, Covid-19, Bilangan Reproduksi Dasar, Kriteria Routh-Hurwit

DINAMIKA PERKEMBANGAN KASUS WABAH COVID-19 DENGAN VAKSINASI MENGGUNAKAN MODEL *SUSCEPTIBLE, INFECTED,* DAN *RECOVERED* (*SIR*)

Oleh

M. Is'ad Arifaldi P.

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2022

Judul Skripsi	:	**DINAMIKA PERKEMBANGAN KASUS WABAH COVID-19 DENGAN VAKSINASI MENGGUNAKAN MODEL *SUSCEPTIBLE, INFECTED,* DAN *RECOVERED* (*SIR*)**
Nama Mahasiswa	:	***M. Is'ad Arifaldi P.***
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**1817031051**
Jurusan	:	**Matematika**
Fakultas	:	**Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dra. Dorrah Aziz, M.Si.	**Prof. Dr. La Zakaria, M.Sc.**
NIP 19610128 198811 2 001	NIP 19690213 199402 1 001

2. Ketua Jurusan Matematika FMIPA Unila

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	: **Dra. Dorrah Aziz, M.Si.**	....
Sekretaris	: **Prof. Dr. La Zakaria, M.Sc.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	: **Drs. Tiryono, M. Sc., Ph.D.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, M.T.
NIP 19740705 200003 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **28 Juli 2022**

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI

Yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama Mahasiswa	:	**M. Is'ad Arifaldi P.**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**1817031051**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**Dinamika Perkembangan Kasus Wabah Covid-19 dengan Vaksinasi Menggunakan Model *Susceptible*, *Infected*, Dan *Recovered* (*SIR*)**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri, bukan hasil orang lain, dan semua hasil yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia merima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 30 Juli 2022

Penulis

M. Is'ad Arifaldi P.
NPM. 1817031051

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Muhammad Is’ad Arifaldi Purnomo dilahirkan di Metro pada tanggal 10 Mei 2000 sebagai anak pertama dari tiga bersaudara, dari pasangan Bapak Suji Purnomo dan Ibu Eva Sulistiyani.

Penulis memulai pendidikannya di TK Pertiwi Metro pada tahun 2005-2006 kemudian menempuh pendidikan tingkat dasar di SD Pertiwi Teladan Metro pada tahun 2006-2012. Pada tahun 2012 penulis melanjutkan pendidikan tingkat menengah pertama di SMPN 1 Metro dan lulus pada tahun 2015. Kemudian penulis melanjutkan pendidikan tingkat menengah atas di SMAN 1 Metro pada tahun 2015-2018.

Pada tahun 2018, penulis terdaftar sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur SBMPTN. Selama menjalani perkuliahan, penulis aktif dalam organisasi Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA) sebagai Anggota Bidang Keilmuan pada periode 2019 dan sebagai Wakil Ketua Umum pada periode 2020.

Pada tahun 2021, di bulan Januari-Februari penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Kelurahan Iringmulyo, Kecamatan Metro Timur, Kota Metro selama 40 hari. Pada bulan Juli-Agustus penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Lembaga Penjaminan Mutu Pendidikan (LPMP) Provinsi Lampung. Pada bulan Maret-Juli penulis mengikuti program Kampus Mengajar yang diselenggarakan oleh Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi sebagai salah satu program Merdeka Belajar Kampus Merdeka (MBKM).. Pada bulan Agustus-Desember penulis mengikuti program Magang dan Studi Independen Bersertifikat di Jaringan Penggerak Pendidikan Semua Murid Semua Guru KOP Schole Fitrah dan pada bulan Februari-Juli penulis mengikuti Magang dan Studi Independen Bersertifikat di PT. Bank X yang diselenggarakan olehKementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi sebagai salah satu program Merdeka Belajar Kampus Merdeka (MBKM).

MOTTO

"Tidaklah suatu kegalauan, kesedihan, kebimbangan, kekalutan yang menimpa seorang mukmin atau bahkan tertusuk duri sekalipun, melainkan karenanya Allah akan menggugurkan dosa-dosanya."

(HR. Bukhari dan Muslim)

"Ketahuilah bahwa kemenangan bersama kesabaran, kelapangan bersama kesempitan, dan kesulitan bersama kemudahan."

(HR. Tirmidzi)

"Barang siapa yang tidak mensyukuri yang sedikit, maka ia tidak akan mampu mensyukuri sesuatu yang banyak."

(HR. Ahmad)

"Barangsiapa yang memegang kuasa tentang sesuatu urusan kaum muslimin, lalu dia memberikan suatu tugas kepada seseorang, sedangkan dia mengetahui bahwa ada orang yang lebih baik daripada orang itu, dia telah mengkhianati Allah, RasulNya dan kaum muslimin."

(HR. Al-Hakim)

PERSEMBAHAN

Dengan mengharapkan rahmat dan ridha Allah Subhanahu wa Ta'ala, kupersembahkan karya sederhana ini kepada:

Papa dan Mama Tercinta

Yang tak pernah lelah merawat, menyayangi, dan mendidikku hingga saat ini. Yang selalu mendukung kegiatanku, dan selalu berdoa untuk keberhasilanku. Terima kasih karena selalu ada untukku, semoga karya ini adalah langkah awal kesuksesanku agar aku bisa membuat Papa dan Mama bangga kepadaku.

Dosen Pembimbing dan Penguji

Yang senantiasa telah meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan dan ilmu yang bermanfaat kepadaku. Terima kasih telah menjadi inspirasi bagiku.

Almamater Tercinta, Universitas Lampung

SANWACANA

Puji syukur atas kehadirat Allah Subhanahu wa Ta'ala yang telah melimpahkan segala rahmat dan hidayahnya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Dinamika Perkembangan Kasus Wabah Covid-19 dengan Vaksinasi Menggunakan Model *Susceptible*, *Infected*, dan *Recovered* (*SIR*)". Penulis menyadari bahwa dalam menyelesaikan skripsi ini, banyak pihak yang telah memberikan bimbingan, saran, dan juga semangat. Dalam kesempatan ini, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu Dra. Dorrah Aziz, M.Si. selaku Dosen Pembimbing Akademik dan Pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, motivasi dan saran kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Bapak Prof. Dr. La Zakaria, M.Sc. selaku Dosen Pembimbing II yang telah memberikan kritik, saran, dan motivasi kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D. selaku Dosen Penguji yang telah memberikan kritik dan saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan.
4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
5. Bapak Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, S.Si., M.T. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Seluruh Dosen, Staf, dan Karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang telah memberi ilmu dan bantuan kepada penulis.
7. Papa dan mama yang selalu memberikan doa, kasih sayang, pengertian, dan motivasi untuk keberhasilan penulis.

8. Antika Febiola Utami yang selalu memberikan semangat, bantuan, motivasi, kasih sayang,dan membersamai penulis selama masa perkuliahan dan penyusunan skripsi ini.
9. Teman-teman satu bimbingan yang telah berjuang bersama dan saling mendukung satu sama lain.
10. Teman-teman Pimpinan Himatika Periode 2020 yang telah berjuang bersama dan saling berbagi keceriaan dalam mewujudkan periode HIMATIKA terbaik.
11. Ferdi dan Fatur teman seperjuangan saat menjalankan Kerja Praktik (KP) di LPMP Provinsi Lampung.
12. Teman-teman Mahasiswa Jurusan Matematika FMIPA Unila Angkatan 2018 dan semua pihak yang membantu dan tidak dapat disebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih banyak kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun guna penelitian selanjutnya agar lebih baik.

Bandar Lampung, 30 Juli 2022

Penulis,

M. Is’ad Arifaldi P.

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Halaman

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Pada tanggal 31 Desember 2019, terdapat laporan di China akan adanya kasus pneumonia yang penyebabnya belum diketahui. Jumlah ini meningkat menjadi total 44 pasien yang mengalami pneumonia yang tidak diketahui penyebabnya, pada tanggal 3 Januari 2020 China melaporkan hal tersebut ke *World Health Organitation* (WHO). Tak lama dari laporan tersebut, China melaporkan kembali kepada WHO akan kondisi suatu wabah penyakit yang diindikasikan berhubungan dengan pasar seafood di Kota Wuhan, Provinsi Hubei, China. Pada tanggal 7 Januari 2020, China mengumumkan bahwa wabah penyakit yang terjadi adalah Coronavirus jenis baru, yang mana wabah ini belum ada obat dan vaksinnya. 13 Januari 2020, beberapa negara melaporkan adanya kasus impor Covid-19 yang berasal dari Wuhan, beberapa negara tersebut diantaranya adalah Thailand, Jepang, dan Indonesia. Sampai dengan tanggal 31 Oktober 2020 (pukul 16.00 WIB) berdasarkan data dari worldometer, jumlah kasus Global konfirmasi 45.954.446 kasus, kasus sembuh 33.275.706 (72,41%) dan kasus kematian 1.194.485 (CFR 2,60%). Di tahun 2020, dunia melakukan gaya hidup baru atau biasa disebut "*New Normal*". Pada tanggal 13 Januari 2021, dilaksanakannya vaksin di Indonesia. Setelah dilakukannya vaksinisasi, perlahan namun pasti, seluruh keadaan di dunia pulih, ekonomi bangkit, dan jumlah kematian menurun (Ellysa, 2020).

Penulis tertarik untuk menganalisa serta menerapkan bidang keilmuan yang telah penulis pelajari terhadap wabah Covid-19, yang mana hal ini dapat dimodelkan menggunakan matematis epidemiologi, metode yang sering digunakan dalam memodelkan suatu permasalahan di bidang kesehatan khususnya terhadap suatu penyakit adalah *SIR* (*Susceptible*, *Infected*, and *Recovered*). Model tersebut pertama kali diperkenalkan pada tahun 1927 oleh Kermack dan McKendrick (Murray, 2002).

Model *SIR* ini mengelompokkan individu-individu dalam suatu populasi menjadi tiga subpopulasi yaitu *susceptible* atau rentan (yaitu kelompok individu yang rentan terinfeksi penyakit), *infected* atau terinfeksi (yaitu kelompok individu yang terinfeksi penyakit), *recovered* atau sembuh (yaitu kelompok individu yang telah sembuh dari penyakit) (Faruk A., 2016). Pemodelan *SIR* merupakan pemodelan yang disusun dengan asumsi-asumsi terhadap suatu penyakit dimulai dari tahap sebelum terinfeksi suatu penyakit, terinfeksi, dan hingga individu tersebut mengalami kesembuhan. Hasil dari model ini dapat dijadikan gambaran tentang bagaimana menekan penyebaran penyakit dengan melihat jumlah individu ideal yang harus divaksinasi serta model ini dapat memprediksikan dalam kurun waktu tertentu suatu penyakit akan menjadi endemik, hal ini membutuhkan data lapangan dalam melakukan analisa dinamika perkembangan suatu penyakit. Kekurangan model ini adalah tidak bisa digunakan pada suatu penyakit yang belum diketahui dengan cukup jelas data-data seperti penyebarannya, penyembuhannya, serta individu mana yang rentan terserang.

Model penyebaran penyakit telah banyak dibahas oleh beberapa peneliti sebelumnya, beberapa diantaranya *Efektifitas Pembatasan Sosial Berskala Besar (PSBB) di Kota Bekasi Dalam Mengatasi COVID-19 dengan Model Susceptible-Infected-Recovered (SIR)* oleh Herlawati (2020), *Model berbasis SIR dalam prediksi awal penyebaran covid-19 di daerah istimewa Yogyakarta (DIY)* oleh Fajar Adi-Kusumo (2020), dan *Pantauan Prediktif Covid-19 Dengan Menggunakan Metode SIR dan Model Statistik Di Indonesia* oleh Hary Sabita (2020). Namun belum ada yang membahas terkait vaksinasi serta terinfeksi kembali untuk penyakit Covid-19.

Berdasarkan pembahasan pada jurnal-jurnal sebelumnya terkait Covid-19, penulis tertarik untuk meneliti model matematika *SIR* terhadap wabah penyakit covid-19 dan diakhiri dengan uji coba model terhadap kasus covid-19 di Batanghari menggunakan data dari Puskesmas Batanghari, dengan judul "Dinamika Perkembangan Kasus Wabah Covid-19 dengan Vaksinasi Menggunakan Model *Susceptible*, *Infected*, dan *Recovered* (*SIR*)".

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Untuk mengkaji secara mendalam pemodelan matematika tipe *SIR* terhadap penyakit Covid-19.
2. Mendapatkan bilangan reproduksi dasar (R_0) terhadap penyakit Covid-19 model *SIR*.
3. Mendapatkan gambaran tentang laju penyebaran penyakit Covid-19 ke depannya dengan melihat pemodelan data sepanjang tahun 2020-2021
4. Memprediksi dalam kurun waktu berapa tahun penyakit Covid-19 ini akan terjadi epidemi.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penilitian ini adalah sebagai berikut :

1. Memberikan edukasi terkait pemodelan matematika *SIR* yang digunakan untuk kasus wabah Covid-19.
2. Meningkatkan wawasan keilmuan bahwasannya vaksinasi berpengaruh dalam menekan penyebaran wabah suatu penyakit.
3. Mampu memprediksi pengendalian suatu penyakit pandemik di masa yang akan datang.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Model Matematika *SIR*

Kebanyakan model matematika penyebaran penyakit menular dimulai dengan dasar pemikiran yang sama, yaitu dengan membagi populasi menjadi beberapa subpopulasi. Salah satu model yang cukup populer adalah adalah model Kermack-McKendrick atau juga disebut sebagai model *SIR*. Model *SIR* membagi populasi menjadi subpopulasi rentan (S), terinfeksi (I), dan sembuh (R). Jumlah individu rentan, terinfeksi, dan sembuh pada waktu t secara berturut-turut dapat dituliskan dalam bentuk fungsi $S(t)$, $I(t)$, dan $R(t)$ (Faruk dkk., 2016).

Model *SIR* dapat digunakan untuk memprediksi bagaimana suatu penyakit menyebar, jumlah total yang terinfeksi, lamanya epidemic, dan memperkirakan berbagai parameter epidemiologis seperti jumlah reproduksi. Model ini dapat menentukan bagaimana intervensi kesehatan masyarakat yang berbeda dapat mempengaruhi hasil epidemik. Berikut tampilan model *SIR* menggunakan diagram alir dan panah transisinya (Sifriyani dan Rosandi, 2020).

Gambar 1. Diagram Model *SIR*

Model epidemi *SIR* diasumsikan sebagai berikut :

$$\frac{dS}{dt} = -rSI \quad (1)$$

$$\frac{dI}{dt} = rSI - aI \quad (2)$$

$$\frac{dR}{dt} = al \quad (3)$$

Keterangan:

S = jumlah individu yang rentan dalam populasi pada waktu

I = jumlah individu yang terinfeksi dalam populasi pada waktu

R = jumlah individu yang sembuh dalam populasi pada waktu

a = laju kesembuhan dari *infected* menjadi recovered

r = laju penularan penyakit dari susceptible menjadi *infected*

2.2 Titik Keseimbangan

Diberikan suatu sistem persamaan diferensial yang berbentuk:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) \text{ dan } \frac{dy}{dt} = g(x, y) \quad (4)$$

Sebuah titik (x_0, y_0) dapat dikatakan sebagai titik keseimbangan dan sistem (4), apabila dipenuhi syarat $f(x_0, y_0) = 0$ dan $g(x_0, y_0) = 0$. Karena turunan suatu konstanta sama dengan nol, maka sepasang fungsi konstan $x(t) = x_0$ dan $y(t) = y_0$ merupakan penyelesaian keseimbangan dari persamaan (4) (Campbell & Haberman 2008).

2.2.1 Teorema Titik Keseimbangan

Berikut diberikan teorema mengenai kestabilan suatu sistem nonlinear yang ditinjau dari nilai eigen matriks Jacobian:

Teorema 1 (Olsder *et al.*, 2011)

1. Apabila semua bagian real nilai eigen matriks Jacobian dari suatu sistem persamaan diferensial bernilai negatif, maka titik keseimbangan dari sistem tersebut stabil.
2. Jika terdapat satu nilai eigen matriks Jacobian dari suatu sistem persamaan diferensial bernilai positif, maka titik keseimbangan dari sistem tersebut tidak stabil.

2.3 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar R_0 dapat didefinisikan sebagai jumlah rata-rata individu terinfeksi akibat tertular oleh individu terinfeksi lainnya di dalam suatu populasi. Bilangan reproduksi dasar merupakan bilangan yang menunjukkan jumlah individu rentan yang dapat menderita penyakit yang disebabkan oleh satu individu terinfeksi (Faruk dkk., 2020).

Bilangan reproduksi dasar dilambangkan dengan R_0 dan dinyatakan dengan persamaan berikut :

$$R_0 = \rho(\boldsymbol{K}) = \rho(\boldsymbol{F}\boldsymbol{V}^{-1}) \tag{5}$$

Menurut Giesecke pada tahun 1994, beberapa kondisi yang akan timbul, yaitu :

1. Jika $R_0 < 1$, maka penyakit akan menghilang,
2. Jika $R_0 = 1$, maka penyakit akan menetap,
3. Jika $R_0 > 1$, maka penyakit akan meningkat menjadi wabah.

2.3.1 Teorama Bilangan Reproduksi Dasar

Teorema 2 (Rost & Wu, 2007)

1. Titik keseimbangan bebas penyakit dikatakan stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$ dan tidak stabil jika $R_0 > 1$,
2. Jika $R_0 < 1$ maka semua solusi konvergen ke titik keseimbangan bebas penyakit,

3. Titik keseimbangan endemik ada jika dan hanya jika $R_o > 1$, dan juga jika titik keseimbangan tersebut ada, maka titik keseimbangan tersebut stabil asimtotik lokal,
4. Jika $R_o > 1$ maka penyakit tersebut adalah endemik.

2.4 Sistem Persamaan Diferensial Nonlinear

Suatu persamaan diferensial biasa nonlinear adalah persamaan diferensial biasa yang tak linear. Misalkan suatu sistem persamaan diferensial biasa dinyatakan sebagai:

$$x = \frac{dx}{dt} = f(t,x) \tag{6}$$

Dengan $x = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$ dan $f(x,t) = \begin{bmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix}$ adalah fungsi tak linear dalam $x_1, x_2, \dots, x_n$. Berdasarkan sistem persamaan (6) disebut persamaan diferensial biasa nonlinear (Braun, 1983).

2.5 Linearisasi

Misalkan diberikan sistem persamaan diferensial biasa nonlinear berikut :

$$x = f(x), x \in R^n \tag{7}$$

dengan $x \in R^n$ adalah suatu fungsi bernilai vektor dalam t dan $f: U \to R^n$ adalah suatu fungsi mulus yang terdefinisi pada subhimpunan $U \cup R^n$.

dengan menggunakan ekspansi Taylor di sekitar titik tetap $\bar{x}$, maka sistem persamaan (7) dapat ditulis sebagai berikut :

$$\dot{x} = \dot{n} = Jn + \varphi(n) \tag{8}$$

dengan ***J*** adalah matriks Jacobian yang dinyatakan sebagai berikut :

$$J = \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$\bar{x}$ dan $\varphi(n)$ adalah suku berorde tinggi yang bersifat $\lim_{n\to 0} \varphi(n) = 0$, dengan $n = x - \bar{x}$. Jn pada sistem persamaan (8) disebut pelinearan sistem persamaan (7) (Tu, 1994).

2.6 Nilai Eigen dan Faktor Eigen

Diberikan matriks koefisien konstan $\boldsymbol{A}$ berukuran $n \times n$ dan sistem persamaan diferensial biasa homogeny $\dot{x} = \boldsymbol{A}x, x(0) = x_0, x \in R^n$. Suatu vektor tak nol x di dalam R^n disebut vektor eigen dari A jika untuk suatu skalar λ berlaku :

$$\boldsymbol{A}x = \lambda x \tag{9}$$

Nilai skalar λ dinamakan nilai eigen dari $\boldsymbol{A}$. Untuk mencari nilai λ dari $\boldsymbol{A}$, maka sistem persamaan (9) dapat ditulis :

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})x = 0 \tag{10}$$

Persamaan (10) merupakan persamaan karakteristik matriks $\boldsymbol{A}$ (Anton, 1995).

2.7 Kestabilan Titik Tetap

Misalkan diberikan sistem persamaan diferensial biasa sebarang $\dot{x} = f(x), x \in R^n$. Titik $\bar{x}$ disebut titik tetap jika $f(\bar{x}) = 0$. Titik tetap disebut juga titik kritis atau titik keseimbangan (Tu, 1994).

Misalkan terdapat persamaan diferensial linear $\dot{x} = \boldsymbol{A}x$ dengan $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix}$ mempunyai persamaan karakteristik $\lambda^2 - \tau\lambda + \delta = 0$ dimana $\tau = k + n$ dan

$\delta = det(A) = kn - ml$. Kestabilan titik tetap $\bar{x}$ dapat ditentukan dengan memperhatikan nlai-nilai eigen yaitu λ_i dimana $i = 1,2, \dots, n$ yang diperoleh dari persamaan karakteristik.

Secara umum kestabilan titik mempunyai perilaku sebagai berikut :

1. Stabil, jika :
   a. Setiap nilai eigen real adalah negatif ($\lambda_i < 0$ untuk semua i).
   b. Setiap komponen bilangan real dari nilai eigen kompleks, lebih kecil atau sama dengan nol ($R_e(\lambda_i) \leq 0$ untuk semua i).
2. Tidak stabil, jika :
   a. Terdapat nilai eigen real yang positif ($\lambda_i > 0$) untuk suatu i.
   b. Ada komponen bagian real dari nilai eigen kompleks, lebih besar dari nol ($Re(\lambda_i) > 0$ untuk suatu i).
3. Sadel atau pelana, jika perkalian dua buah nilai eigen real sembarang adalah negatif ($\lambda_i\lambda_j < 0$ untuk *i* dan *j* sembarang). Titik tetap sadel ini bersifat tak stabil (Tu, 1994).
4. Jika salah satu nilai eigen yang diperoleh bernilai nol $\lambda_1 = 0$ & $\lambda_2 \neq 1$ maka titik tetapnya akan berada dalam suatu garis. Jika $\lambda_2 < 0$ maka semua solusi yang tidak dimulai dari titik tetap ini cenderung untuk bergerak menuju garis tersebut, dan sebaliknya jika $\lambda_2 > 0$ maka akan bergerak menjauhi garis tersebut (Farlow, 1994).

2.8 Kriteria Kestabilan *Routh-Hurwitz*

Kriteria kestabilan *Routh-Hurwitz* merupakan suatu kriteria yang digunakan untuk memperlihatkan kestabilan suatu sistem dengan memperhatikan koefisien dari persamaan karakteristik tanpa menghitung akar-akarnya secara langsung. Jika suatu persamaan polinomial adalah persamaan karakteristik, maka metode ini dapat digunakan untuk menentukan kestabilan dari suatu sistem.

Adapun prosedur dalam penerapan kriteria *Routh-Hurwitz* adalah:

1. Persamaan polinom orde ke-*n* ditulis dalam bentuk
$$\det(\lambda I - A) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$
dengan koefisien-koefisiennya adalah bilangan real dan $a_m \neq 0$.

2. Jika terdapat koefisien bernilai 0 atau negatif, maka terdapat satu akar atau akar-akar imajiner atau memiliki bagian real positif yang berarti sistem tersebut tidak stabil.

3. Jika seluruh koefisien bernilai positif, maka dapat dibentuk suatu matriks yang sering disebut *array Routh* sebagai berikut :
$$\begin{vmatrix} \lambda^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\ \lambda^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\ \lambda^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\ \vdots & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\ \lambda^0 & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} \tag{11}$$
Koefisien $b_1, b_2, \dots, b_k$ dan $c_1, c_2, \dots, c_k$ dapat ditentukan dengan formula-formula berikut:
$$b_1 = -\frac{1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}, b_2 = -\frac{1}{a_{n-3}}\begin{vmatrix} a_{n-2} & a_{n-4} \\ a_{n-3} & a_{n-5} \end{vmatrix}, \cdots$$
$$c_1 = -\frac{1}{b_1}\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, c_2 = -\frac{1}{b_2}\begin{vmatrix} a_{n-3} & a_{n-5} \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \cdots$$

4. Jumlah akar yang tidak stabil dapat terlihat pada banyaknya perubahan tanda di kolom matriks pertama (11).
5. Syarat agar sistem dikatakan stabil adalah apabila koefisien dari persamaan karakteristik bernilai positif, sedangkan syarat cukupnya adalah apabila setiap suku dari kolom pertama matriks (11) bernilai positif. Iterasi dilanjutkan hingga kolom kedua telah mendapatkan nilai 0 (Gantmacher, 1959).

2.9 Matriks Next Generation

Misalkan terdapat n kelas terinfeksi dan m kelas tidak terinfeksi. Selanjutnya, dimisalkan juga x adalah sub populasi terinfeksi dan y menyatakan subpopulasi tidak terinfeksi (rentan atau sembuh), sehingga $\dot{x} = \varphi_i(x, y) - \omega_i(x, y)$, dan $\dot{y} = g_j(x, y)$, dengan $i = 1,2, \dots, n \; dan \; j = 1,2, \dots, m$. φ_i adalah laju infeksi sekunder yang ada pada kelas terinfeksi. ω_i adalah laju perkembangan penyakit, kematian, dan atau kesembuhan yang mengakibatkan berkurangnya populasi dari kelas terinfeksi (Diekmann, 1990).

Selanjutnya, didefinisikan matriks *next generation* $\boldsymbol{K}$ yang memiliki bentuk

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{V}^{-1} \tag{12}$$

dengan $\boldsymbol{F}$ dan $\boldsymbol{V}$ adalah matriks ukuran $n \times n$ yang dapat juga dituliskan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{F} = \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}\right] \text{ dan } \boldsymbol{V} = \left[\frac{\partial \omega_i}{\partial y_j}\right] \tag{13}$$

2.10 Mean Absolute Percentage Error (MAPE)

Mean Absolute Percentage Error merupakan metode mencari nilai rata-rata kesalahan absolut dalam bentuk persentase pada suatu perbandingan antara data actual dengan data proyeksi atau peramalan yang ada. $MAPE$ dirumuskan sebagai berikut:

$$MAPE = \sum \frac{|A - P|}{n} \times 100\%$$

Dengan A: data peramalan, P: data peramalan, dan n: jumlah data.

Menurut Lewis pada tahun 1982, persentase $MAPE$ dibagi menjadi 4, sebagai berikut:

1. $MAPE < 10\%$ (Akurasi Peramalan Tinggi)
2. $MAPE = 10 - 20\%$ (Akurasi Peramalan Baik)
3. $MAPE = 20\% - 50\%$ (Akurasi Peramalan Cukup)
4. $MAPE > 50\%$ (Tidak Akurat)

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung. Waktu penelitian dilaksanakan pada semester genap tahun akademik 2021/2022.

3.2 Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian terapan yang dilakukan dengan menggunakan data sekunder yang diperoleh dari UPTD Puskesmas Rawat Inap Kecamatan Batanghari terkait kasus penyebaran penyakit Covid-19 yang terjadi sepanjang tahun 2020-2021.

Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini adalah:

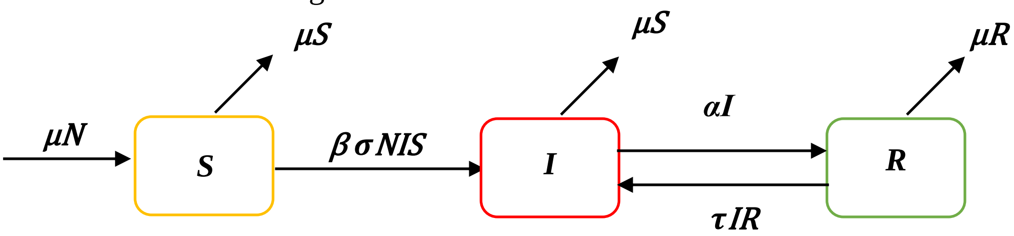
1. Menaksir parameter laju perubahan individu pada subpopulasi S (*Susceptible*), I (*Infected*), dan R (*Recovered*) dengan asumsi.
2. Menentukan model epidemik *SIR* untuk penyakit Covid-19.
3. Menentukan titik keseimbangan bebas penyakit dan endemik penyakit.
4. Menentukan bentuk bilangan reproduksi dasar (R_0).
5. Melakukan analisis kestabilan dengan kriteria *Routh-Hurwitz*.
6. Membuat plot subpopulasi S, I, dan R serta potret fase sistem dengan data Covid-19 di UPTD Puskesmas Rawat Inap Kecamatan Batanghari menggunakan *software wolfram mathematica*.

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada hasil dan pembahasan di atas yaitu model *SIR* pada penyakit Covid-19 dengan vaksinasi dapat diambil keimpulan sebagai berikut :

1. Model penyebaran penyait Covid-19 menggunakan model *SIR* dengan vaksinasi adalah sebagai berikut:



N : Jumlah total individu dalam populasi.(%)

μ : Menyatakan laju kelahiran pada kompartemen *S* dan kematian pada setiap kompartemen. (%)

β : Menyatakan laju infeksi pada kompartemen *S*. (%)

α : Menyatakan laju kesembuhan pada kompartemen *I*. (%)

σ : Menyatakan total individu mudah terinfeksi (total individu yang tidak vaksin dan sudah vaksin namun terinfeksi). (%)

τ : Menyatakan laju terinfeksi kembali pada kompartemen *R*. (%)

Dengan $\sigma = 1 - \delta\gamma$

δ : Efikasi Vaksin (%)

γ : Jumlah individu yang telah vaksin (%)

$$\frac{dS}{dt} = \mu N - \beta\sigma NIS - \mu S$$
$$\frac{dI}{dt} = \beta\sigma NIS + \tau IR - \alpha I - \mu I$$
$$\frac{dR}{dt} = \alpha I - \mu R - \tau IR$$

2. Titik keseimbangan bebas penyakit Covid-19 diperoleh

$$(S_0, I_0, R_0) = (1{,}0{,}0)$$

3. Ttitik keseimbangan endemik penyakit Covid-19 :

$$(S_1, I_1, R_1) = \left(\begin{array}{c} \dfrac{\alpha + \mu - \tau R}{\beta EV}, \dfrac{\mu - \mu\left(\dfrac{\alpha + \mu - \tau R}{\beta\sigma}\right)}{\alpha + \mu - \tau R}, \\ \dfrac{-R(\beta\sigma\mu((\alpha + \mu) + \tau) - \tau\mu^2)) - a\mu((\alpha + \mu) - \beta\sigma)}{R(\tau\mu(\tau - \beta\sigma))} \end{array}\right)$$

4. Bilangan Reproduksi Dasar (R_0) dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$R_0 = \frac{\beta\sigma}{\alpha + \mu}$$

Dengan $R_0 < 1$ maka titik keseimbangan bebas penyakit (S_0, I_0, R_0) stabil asismtotik lokal dan jika $R_0 > 1$ maka titik keseimbangan endemik penyakit (S_1, I_1, R_1) stabil.

5. Berdasarkan simulasi data yang dilakukan menggunakan data Puskesmas Batanghari Lampung Timur, diperoleh informasi bahwa grafik yang dihasilkan terlihat dinamika perkembangan Covid-19 terpantau kondusif dan kondisi tersebut stabil sampai dengan 100 bulan ke depan. Dapat disimpulkan bahwa keputusan atau kebijakan yang diterapkan oleh pemerintah dan pihak puskesmas sudah tepat, namun harus tetap menerapkan protokol kesehatan dengan baik agar tidak terjadi lonjakan infeksi yang tidak diinginkan.

6. *MAPE(Mean Absolute Percentage Error)* dari model *SIR* Covid-19 yang telah dibentuk yaitu sebesar 2,8% artinya model ini sudah cukup baik untuk diaplikasiakan.

5.2 Saran

Pada penulisan ini, penulis berfokus membahas pemodelan matematika penyakit *SIR* dengan memperhatikan vaksinasi yang ada. Serta menambahkan komponen bahwa penyakit Covid-19 ini dapat menginfeksi bahkan individu yang telah sembuh. Sehingga tidak semua individu yang telah sembuh sudah menjadi kebal terhadap penyakit Covid-19 ini. Tentunya masih banyak lagi hal yang perlu diperhatikan dalam membuat model seperti bagaimana biaya perawatan penyakit, individu yang terlahir dengan antibodi lemah, bagaimana jika vaksinasi tidak digratiskan, dll. Harapan penulis jika ingin melanjutkan penelitian ini, maka penulis menyarankan untuk menambahkan faktor-faktor lain ke dalam proses memodelkan agar terciptanya model yang lebih kompleks sehingga sangat berdampak lebih besar ke dalam situasi dilapangan kelak.

DAFTAR PUSTAKA

Faruk, A., Habib, A., dan Setyo, E.C. 2016. Analisis kestabilan Model Epidemik Sir Untuk Penyakit Tuberkulosis. *Prosiding SEMIRATA Bidang MIPA 2016*. Palembang.

Braun, M. 1983. *Differential Equations and Their Applications*. Springer Verlag, New York.

Campbell, S. L., and Haberman, R. 2008. *Introduction to Differential Equations with Dynamical Systems*. New Jersey: Princeton University Press.

Diekmann O, Heesterbeek JAP, Metz JAJ. 1990. On the definition and the computation of the basic reproduction ratio R_0 in models infectious diseases in heterogeneous populations.J. Math. Biol 28:365-382.

Effendy. 2013. *Analisis Stabilitas Pada Penyebaran Penyakit DBD di Kabupaten Jember Dengan Metode SIR Stokastik. Jember*: Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember.

Ellysa. 2020. *Situasi Covid-19.* Jakarta: Pusat Data dan Informasi Kementerian Kesehatan Republik Indonesia.

Farlow, S. J. 1994. An Introduction to Differential Equations and Their Applications. Mc. Graw-Hill, Inc.

Giesecke, J. 1994. *Modern Infectious Disease Epidemiology*. Oxford University Press. New York.

Herlawati dan Rahmadya, T.H.. 2020. Efektifitas Pembatasan Sosial Berskala Besar (PSBB) di Kota Bekasi Dalam Mengatasi COVID-19 dengan Model *Susceptible-Infected-Recovered* (*SIR*). *Jurnal JKI* No : 20 **(2)**: 119 – 124.

Kermack, W. O. and McKendrick, A.G.. 1927. A Contribution to The Mathematical Theory of Epidemics. Proceedings of The Royal Society A.

Kompas.com. 2021. Efikasi Vaksin Sinovac 65,3 Persen, Bagaimana Cara Menghitungnya?. Diakses pada 21 Juni 2021, dari https://www.kompas.com/sains/read/2021/01/12/135000423/efikasi-vaksin-sinovac-653-persen-bagaimana-cara-menghitungnya?page=2.

Kompas.com. 2021. BPOM Sebut Efikasi Vaksin Sinovac 65,3 Persen, Apa Itu Efikasi?. Diakses pada 21 Juni 2021, dari https://www.kompas.com/sains/read/2021/01/12/100000223/bpom-sebut-efikasi-vaksin-sinovac-65-3-persen-apa-itu-efikasi-?page=all.

Lewis, C. D. (1982). International and Business Forecasting Methods. London: Butterworths.

Murray, J. D. 2002. *Mathematical Biology : An Introduction. Third Edition.* Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg.

Olsder, G. J., vanderWoude, J. W., Maks, J. G., and Jelstsema, 2011. *Mathematical Systems Theory 4th Edition*. Netherland: VVSD.

Rost, G. & Wu J..2007.Domain-decomposition method for the global dynamics of delay differential equations with unimodal feedback. Proceedings of the Royal Society A

Sifriyani dan Dedi, R. 2020. *Pemodelan Susceptible Infected Recoveres (SIR) Untuk Estimasi Angka Reproduksi Covid-19 Kalimantan Timur Dan Samarinda*. *Media Statistika*.

Tu, P.N.V. 1994. *Dynamical System : AnIntroduction with Applications in Economics and Biology*. Springer-Verlag. New York.