BILANGAN CATALAN DAN *MULTISET* GRUP ADITIF $\mathbb{Z}_{10}$

SERTA HUBUNGANNYA DENGAN BILANGAN STIRLING

(Tesis)

OLEH

ATTIYA YULIANA

2027031009

PROGRAM MAGISTER PASCASARJANA MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS LAMPUNG

BANDAR LAMPUNG

2022

ABSTRAK

BILANGAN CATALAN DAN *MULTISET* GRUP ADITIF $\mathbb{Z}_{10}$ SERTA HUBUNGANNYA DENGAN BILANGAN STIRLING

Oleh

Attiya Yuliana

Bilangan Catalan yang yang penamaannya diambil dari ilmuan Belgia bernama Eugene C. Catalan dan didefinisikan dalam persamaan $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Bilangan Catalan memiliki aplikasi terhadap beberapa permasalahan kombinatorik, diantaranya mengenai pembentukkan *multiset* dari grup aditif $\mathbb{Z}_{n+1}$. Pada penelitian ini dilakukan pembentukkan *multiset* grup aditif $\mathbb{Z}_{n+1}$, sehingga dapat ditunjukkan bahwa banyaknya *multiset* yang dibentuk merupakan bilangan Catalan dan memiliki kaitan terhadap bilangan Stirling. Untuk mempermudah dalam membentuk *multiset* diberikan algoritma dan program komputasi dengan Phyton. Berdasarkan hasil yang didapat banyaknya *multiset* yang terbentuk merupakan bilangan Catalan dan membentuk susunan bilangan Stirling jenis kedua yang baru dengan nilai awal $S(n, 0) = 1$ dan $S(n, n) = 0$.

Kata kunci: Bilangan Catalan, *Multiset*, grup aditif, Bilangan Stirling, program Phyton.

ABSTRACT

CATALAN NUMBER AND *MULTISET* ADDITIVES GROUP $\mathbb{Z}_{10}$ AND THEIR RELATIONSHIP WITH STIRLING NUMBER

By

Attiya Yuliana

The Catalan number was named after Belgian mathematician, Eugene C. Catalan and defined in form $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. This Numbers have several applications related to combinatoric problems, including the formation of multisets from additive groups $\mathbb{Z}_{n+1}$. In present research, a *multiset* group additive $\mathbb{Z}_{n+1}$ was formed, to reveal that several formed multisets belong to Catalan numbers and have a relationship with Stirling numbers. To facilitate, algorithms and computational programs in Python are used. Based on the results, it is concluded that the number of formed multisets are Catalan numbers, and these numbers form a new Stirling number of the second kind arrangement with initial values $S(n, 0) = 1$ and $S(n, n) = 0$.

Keyword: Catalan Numbers, Multisets, Additive Groups, Stirling Numbers, Programs Python.

BILANGAN CATALAN DAN *MULTISET* GRUP ADITIF $\mathbb{Z}_{10}$ SERTA HUBUNGANNYA DENGAN BILANGAN STIRLING

Oleh

Attiya Yuliana

Tesis

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
MEGISTER MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

PROGRAM MAGISTER PASCASARJANA MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2022

Judul Tesis	: **BILANGAN CATALAN DAN MULTISET GRUP ADITIF $\mathbb{Z}_{10}$ SERTA HUBUNGANNYA DENGAN BILANGAN STIRLING**
Nama Mahasiswa	: *Attiya Yuliana*
Nomor Pokok Mahasiswa	: 2027031009
Program Studi	: Magister Matematika
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.	**Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.**
NIP 19631108 198902 2 001	NIP 19840627 200604 2 001

2. Ketua Program Studi Magister Matematika

Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.
NIP 19760411 200012 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.** ....

Sekretaris : **Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **1. Prof. Dr. La Zakaria, S.Si., M.Sc.** ....

2. Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si. ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, S.Si., M.T.
NIP 19740705 200003 1 001

3. Direktur Program Pascasarjana

Prof. Dr. Ir. Ahmad Saudi Samosir, S.T., M.T.
NIP 19710415 199803 1 005

4. Tanggal Lulus Ujian Tesis : **9 Agustus 2022**

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: **Attiya Yuliana**
Nomor Pokok Mahasiwa	: **2027031009**
Program Studi	: **Magister Matematika**
Jurusa	: **Matematika**

Dengan ini menyatakan bahwa tesis saya bejudul, **"BILANGAN CATALAN DAN MULTISET GRUP ADITIF $\mathbb{Z}_{10}$ SERTA HUBUNGANNYA DENGAN BILANGAN STIRLING"** adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Semua tulisan yang tertuang dalam tesis ini telah mengikuti kaidah karya penulisan ilmiah Universitas Lampung. Apabila kemudian hari terbukti bahwa tesis ini merupakan salinan atau telah dibuat orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 10 Agustus 2022

Penulis

METERAI TEMPEL

10000

AAJX994569428

ATTIYA YULIANA

NPM: 2027031009

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Bandar Lampung pada tanggal 01 Juli 1986. Anak pertama dari 4 bersaudara, lahir dari pasangan Bapak Bakri dan Ibu Ratnawati. Pernikahannya dengan Agus Ruswandi telah dianugrahi 3 orang anak yaitu Muhammad Arya Habibi, Ayra Azyuarni Azra dan Hafiza yara Hafla.

Penulis menempuh pendidikan Sekolah Dasar (SD) diselesaikan di SDN 2 Negeri Sakti, Pesawaran pada tahun 1998, Sekolah Lanjutan Tingkat Pertama (SLTP) di SLTPN 1 Gedongtataan, Pessawaran pada tahun 1998-2001, Sekolah Menengah Atas (SMA) di SMAN 3 Bandar Lampung pada tahun 2001-2004, penulis melanjutkan pendidikan di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung dan lulus pada tahun 2008.

Pada tahun 2020, penulis terdaftar sebagai mahasiswa program studi magister Matematika di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung. Saat ini penulis merupakan seorang guru di SMAN 1 Gedongtataan.

KATA INSPIRASI

"Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan."
(Q.S. Al-Insyirah: 5-6)

"dan barang siapa yang bertakwa kepada Allah, niscaya Allah menjadikan baginya kemudahan dalam urusannya."
(Q.S. At-Talaq: 4)

"Jangan menjelaskan dirimu kepada siapapun, karena yang menyukaimu tidak butuh itu dan yang membencimu tidak percaya itu."
(Ali bin Abi Thalib)

"Kebahagian hadir jika kita mampu mensyukuri, maka nikmat Allah manakah yang telah kita dustakan."

PERSEMBAHAN

Puji Sykur kepada Allah SWT, atas hidayah dan kasih sayang-Nya.

Kupersembahkan sebuah karya sederhana penuh perjuangan ini kepada:

Suami ku tercinta Agus Ruswandi dan anak-anaku

M. Arya habibi

Ayra Azyuarni Azra

Hafiza Yara Hafla

Serta

Papi Bakri dan Mami Ratnawati

Papi Saparudin dan Mami Ratnadewi

Terimakasih atas limpahan kasih sayang, pengorbanan, pengertian, motivasi, serta doa dalam setiap sujud yang terucap.

Terimalah bukti sederhana ini sebagai hadiah dari semua pengorbanan keikhlasan, dan perjuangan yang selama ini telah diberikan.

SANWACANA

Penulis mengucapkan puji syukur kehadirat Allah SWT, karena dengan ridho dan karunia-Nya serta atas berkah dan rahmat-Nya sehinga penulis dapat menyelesaikan tesis yang berjudul "Bilangan Catalan dan Multiset Grup Aditif $\mathbb{Z}_{10}$ serta Hubungannya dengan Bilangan Stirling". Penyusunan tesis ini tidak lepas dari dukungan dan kerjasama berbagai pihak yang telah memberikan bimbingan, kritik, dan saran yang bermanfaat bagi penulis.

Penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D selaku Dosen Pembimbing I yang telah sabar membimbing, menyemangati dan memotivasi penulis.
2. Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc. selaku pembimbing II yang telah sabar memberikan arahan, saran, serta dukungan bagi penulis.
3. Prof. Dr. La Zakaria, S.Si., M. Sc. selaku Dosen Pembahas atas kesediaannya dalam menguji dan dengan sabar memberikan kritik atau saran yang membangun.
4. Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembahas atas kesediaannya dalam menguji, dan atas segala masukan yang sangat berarti.
5. Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung.

6. Dr. Asmiati, S.Si., M. Si., Selaku Ketua Program Studi Magister Matematika Fakultas Matematikadan Ilmu Pengetahuan Alam atas semua dukungan dan motivasi.
7. Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, M. T. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung.
8. Prof. Dr. Ahmad Saudi Samosir, S.T., M.T., selaku Direktur Pasca Sarjana Universitas Lampung.
9. Seluruh Dosen dan Karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung.
10. Suami dan anak-anakku tercinta yang menjadi motivasi dan semangat. Terimakasih atas ridho dan ikhlasnya untuk setiap langkah yang dilalui penulis.
11. Papi, Mami, Papi dan Mami mertua, adik-adikku Astina Saskia, Annisya Zikriana, Muhammad Choiri Amar (Alm), Tresia Noviyanti, Dina Oktaria, Andi Yuliansyah, Dery Dermawan, Sherly Verloka.
12. Teman-teman Magister Matematika Angkatan 2020. Suatu kebahagiaan dan kebangaan dapat menjalani program magister bersama rekan – rekan.

Penulis menyadari bahwa masih ada kekurangan dari Tesis ini, akan tetapi besar harapan semoga Tesis ini dapat bermanfaat bagi kita semua.

Bandar Lampung, 10 Agustus 2022
Penulis

Attiya Yuliana

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR .... **xiv**

DAFTAR TABEL .... **xv**

BAB I . PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah 1
1.2 Tujuan Penelitian 4
1.3 Manfaat Penelitian 5

BAB II. LANDASAN TEORI

2.1 Bilangan Catalan 6
2.2 Grup 9
2.3 Grup Permutasi 12
2.4 Grup Aditif Bilangan Bulat $\mathbb{Z}_n$ 15
2.5 Lapangan 15
2.6 *Multiset* 21
2.7 Partisi Bilangan 22
2.8 Koefisien q-Binomial 24
2.9 Siklotomik Polinomial...27
2.10 Bilangan Stirling 30
2.11 Permasalahan Grup dan Bilangan Catalan 31

BAB III. METODE PENELITIAN

3.1 Waktu Penelitian 35
3.2 Tempat Penelitian 35
3.3 Metodelogi Penelitian 35

BAB IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 *Multiset* Grup Aditif $\mathbb{Z}_{n+1}$ dan Bilangan Catalan 38
4.2 Pengelompokan *Multiset* Grup Aditif $\mathbb{Z}_{n+1}$ 38
4.3 Algoritma Pemrograman *Multiset* Grup Aditif $\mathbb{Z}_{n+1}$ 52
4.4 *Multiset* Grup Aditif $\mathbb{Z}_{n+1}$ Berdasarkan Partisi Bilangan 55
4.5 Susunan Bilangan Stirling dari Jumlah *Multiset* yang
mungkin terbentuk dari Grup Aditif $\mathbb{Z}_{10}$ 62

BAB V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan 64
5.2 Saran 64

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2. 1 Ilustrasi geometri dari akar primitif dari satuan ke-3 $(x^3 = 1)$28

Gambar 3. 1 Diagram alur Penelitian 37

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Bilangan Stirling Jenis Kedua, $S(n, k)$ dan Bilangan Bell

$B_n = \sum_{k=0}^{n} S(n, k)$ 31

Tabel 2.2 Grup aditif $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{6}}$ 32

Tabel 2.3 Jumlah *multiset* dengan *n*-elemen dari grup aditif $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{n+1}}$ untuk

$1 \leq n \leq 4.$ 33

Tabel 4.1 *Multiset* grup $\mathbb{Z}_{n+1}$ dengan $1 \leq n \leq 7.$ 39

Tabel 4.2 Pengelompokan *Multiset* dari grup aditif $\mathbb{Z}_{n+1}$ dengan $1 \leq n \leq 7.$

.... 44

Tabel 4.**3** Barisan bilangan dari jumlah *multiset* yang mungkin dari grup aditif

$\mathbb{Z}_{10}$... 62

I. PENDAHULUAN

1. 1. Latar Belakang Masalah

Bilangan telah dikenal dan digunakan sejak peradaban kuno. Sejarah mengatakan bahwa bilangan berasal dari bangsa-bangsa yang bermukim disepanjang aliran sungai, seperti bangsa Mesir, Babilonia, India dan Cina. Bangsa-bangsa tersebut menggunakan bilangan terutama dalam bidang perdagangan, penanggalan dan pertanahan. Sampai saat ini bilangan memiliki peranan penting dalam kehidupan manusia, karena bilangan selalu dibutuhkan dalam bidang teknologi, sains, filosofi bahkan bidang musik dan hiburan. Bilangan sendiri banyak digunakan dalam konsep matematika diantaranya digunakan untuk pencacahan atau pengukuran.

Dalam sejarah ada bermacam-macam sistem bilangan yang digunakan hingga akhirnya berkembang menjadi bilangan yang digunakan sekarang yaitu sistem Hindu-Arab. Jenis bilangan yang pertama dikenal adalah bilangan asli, tetapi seiring majunya peradaban maka semakin kompleks permasalahan yang dihadapi oleh manusia. Oleh karena itu, diperlukan sistem bilangan yang baru. Pengembangan bilangan telah menghasilkan jenis-jenis bilangan yang bisa diidentifikasi dari keunikan sifat masing-masing. Karena bilangan digunakan hampir di seluruh konsep matematika maka seorang matematikawan yang bernama Johann Carl Freidrich Gauss mengatakan bahwa bilangan merupakan ratu dari matematika.

Jenis bilangan yang banyak dikembangkan karena keunikannya, diantaranya adalah bilangan Fibonaci, Binomial dan bilangan Catalan. Kecantikan dan keunikannya telah menarik para peneliti untuk terus menginvestigasi bilangan ini. Pada tahun 2019, Wamilliana dkk., melakukan suatu penelitian terkait penghitungan jumlah kubik pada bilangan Lucas dan bilangan Gibonacci, dimana Gibonacci adalah perumuman dari bilangan Fibonacci.

Bilangan Catalan memang termasuk bentuk bilangan yang baru dikenal di Indonesia, tetapi bilangan ini tak kalah menarik dari bilangan Fibonacci atau bilangan Binomial yang telah lebih dahulu dikenal. Hal ini dapat ditunjukkan dari banyaknya artikel yang telah diterbitkan sejak publikasi mengenai permasalahan *triangulation Euler* dan permasalahan *parentheses* (tanda kurung), lebih dari 400 artikel yang telah diterbitkan (Koshy, 2009).

Saat ini bilangan Catalan telah mengalami pengembangan baik dari segi konsep maupun penggunaannya. Dari segi konsep, pada tahun 2020 Gorsky dan kawan-kawan mengobservasi bentuk umum bilangan (q,t) Catalan yang merupakan pengembangan dari bilangan Catalan. Selain itu terdapat positroid bilangan Catalan dimana positroid Catalan adalah suatu struktur yang mengabtraksi dan mengeneralisasi gagasan independent linier dalam ruang vektor yang dapat direpresentasikan dengan suatu matriks $k \times n$ dengan nonnegatif minor maksimal (Galashin dan Lam, 2021) dan alternatif baru untuk formula konvolusi super bilangan Catalan (Mikić, 2021). Pada tahun 2021 Boyadzhiev mencoba mengeksplor kecantikan bilangan Catalan, Bernoulli, Harmonic dan Striling.

Bilangan Catalan juga memiliki beberapa aplikasi pada bidang lain. Hal ini dapat ditemukan dari beberapa hasil penelitian diantaranya adalah permutasi suatu *multiset* menjadi beberapa kelas (Albert dkk., 2001), Aplikasi bilangan catalan dalam struktur RNA (*Ribonucleic Acid*) sekunder (Ndagijimana, 2016) generalisasi bilangan Catalan dan formula eksplisit serta representasi integralnya (Li dkk., 2021), matriks konservatif baru yang diturunkan oleh bilangan Catalan dan domain matriksnya dalam ruang C dan C_0 (Ilkhan, 2020), aplikasi permasalahan kombinatorial bilangan Catalan dan *lattice path* dalam kriptografi (Saračević, 2018).

Beberapa penelitian tersebut memberikan motivasi kepada penulis untuk melakukan penelitian pada aplikasi bilangan Catalan dengan bidang aljabar khususnya teori grup. Selain dari hasil penelitian sebelumnya, penelitian ini juga didasarkan atas suatu permasalahan yang dipublikasikan oleh Parker pada tahun1993 terkait suatu permasalahan *multiset* yang dibangun berdasarkan grup permutasi yang melibatkan bilangan Catalan. Dalam buku bilangan Catalan dan Aplikasinya yang ditulis oleh T. Koshy diinformasikan bahwa permasalahan ini pernah dijawab oleh Ira M. Gessel pada tahun 1993 dengan membentuk *multiset* dari grup aditif bilangan bulat $\mathbb{Z}_{n+1}$ (Koshy,2009). Permasalahan ini masih sangat menarik untuk diteliti lebih lanjut. Terutama untuk menunjukkan *multiset* yang dibangun dari grup aditif bilangan bulat $\mathbb{Z}_{n+1}$ dengan $n > 4$ benar membentuk bilangan Catalan.

Adapun fokus penelitian ini adalah menentukan jumlah elemen dari *multiset* suatu grup aditif bilangan bulat $\mathbb{Z}_{n+1}$ dengan $1 \leq n \leq 9$ dan menyelidiki hubungannya dengan bilangan Catalan. *Multiset* dari grup $\mathbb{Z}_{n+1}$ merupakan hasil dari partisi anggota grup $\mathbb{Z}_{n+1}$ dimana jumlah setiap anggotanya kongruen dengan $0 \bmod n + 1$. Telah diketahui pula bahwa partisi bilangan juga berhubungan dengan bilangan Stirling, sehingga dalam penelitian ini juga akan diselidiki hubungan antara bilangan Catalan dengan bilangan Stirling.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah untuk menunjukkan bahwa banyaknya *multiset* yang dapat dibentuk dari suatu grup aditif bilangan bulat $\mathbb{Z}_{10}$ berupa bilangan Catalan dan membentuk barisan bilangan Stirling jenis kedua yang baru, sehingga bilangan Catalan mengantikan bentuk bilangan Bell.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini adalah:

1. sebagai bahan kajian untuk referensi penelitian selanjutnya mengenai bilangan Catalan;
2. memberikan sumbangan pemikiran untuk memperluas teori-teori terkait bilangan Catalan;
3. memberikan sumbangan pemikiran untuk membantu pemanfaatannya pada penggunaan *multiset* dari bilangan bulat yang mungkin dapat dimanfaatkan pada bidang komputasi.

II. LANDASAN TEORI

Pada bab ini dijelaskan mengenai definisi, teorema dan istilah-istilah yang digunakan dalam penelitian ini.

2.1 Bilangan Catalan

Sebelum mendefinisikan bilangan Catalan, berikut diberikan terlebih dahulu sejarah singkat bilangan Catalan.

Sebenarnya bilangan Catalan telah ditemukan pada tahun 1730-an oleh Ming Antu (Pak, 2014). Hal ini ditemukan dalam bukunya berjudul *Quick Methods for Accurate Values of Circle Segment* yang memuat bilangan identitas trigonometri dan barisannya, yang melibatkan bilangan Catalan. Adapun bentuknya sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\sin(2\alpha) &= 2\sin\alpha - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{n-1}}{4^{n-1}} \sin^{2n+1}\alpha \\ &= 2\sin\alpha - \sin^3\alpha - \frac{1}{4}\sin^5\alpha - \frac{1}{8}\sin^7\alpha - \cdots.\end{aligned}$$

Buku ini baru diselesaikan pada tahun 1839 dan diterbitkan di Cina sehingga tidak diketahui oleh ilmuan Barat (Pak, 2014).

Pada tahun 1750-an Leonhard Euler menemukan sebuah formula relasi rekursi yang saat ini disebut dengan Bilangan Catalan, dengan bentuk rekursifnya dinyatakan sebagai berikut:

$$C_{n+1} = C_0 C_n + C_1 C_{n-1} + C_2 C_{n-2} + \cdots + C_n C_0,$$

dengan C_n adalah banyaknya triangultion dari poligon konveks dengan $(n+2)$ sisi (Pak, 2014).

Meskipun bilangan ini ditemukan jauh sebelumnya, namun pembuktian lengkapnya baru diterbitkan 80 tahun kemudian. Pada akhirnya penamaannya diambil dari nama matematikawan yang juga menemukan bilangan ini dan merumuskan formula bilagan Catalan yang saat ini kita kenal, yaitu seorang ilmuan asal Belgia Eugene C. Catalan. Catalan menemukannya ketika sedang mempelajari barisan *parentheses* pada tahun 1838. Barisan *parentheses* yang dimaksud adalah barisan yang terbentuk dengan baik dari tanda kurung (Pak, 2014).

Setelah diberikan sejarah singkat mengenai bilangan Catalan. Selanjutnya diberikan beberapa cara mendefinisikan bilangan Catalan.

Definisi 2.1.1 Bilangan Catalan didefinisikan dalam beberapa cara, yang paling dikenal adalah dalam bentuk persamaan berikut:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, \tag{2.1}$$

dengan $n \geq 0, n \in \mathbb{N}$ (Koshy, 2009).

Secara kombinatorik, dapat dituliskan dalam persamaan berikut.

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!}, \tag{2.2}$$

(Koshy, 2009).

Bilangan Catalan juga dapat didefinisikan dengan persamaan

$$C_n = \frac{\binom{2n+1}{n}}{(2n+1)}, \tag{2.3}$$

(Singmaster, 2018).

Selain dalam Persamaan 2.1 dan 2.2, bilangan Catalan juga dapat didefinisikan dalam persamaan berikut.

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}, \tag{2.4}$$

(Koshy, 2009).

Kemudian, berikut adalah definisi bilangan Catalan dengan bentuk rekursi.

$$C_0 = 1$$

$$C_n = \frac{4n-2}{n+1} C_{n-1} \qquad n \geq 1 \tag{2.5}$$

(Koshy, 2009).

Contoh 2.1.1

Berdasarkan Definisi 2.1.1, berikut diberikan contoh bilangan Catalan untuk $0 \leq n \leq 4$:

untuk $n = 0$, diperoleh $C_0 = \frac{1}{0+1}\binom{2(0)}{0} = 1$;

untuk $n = 1$, diperoleh $C_1 = \frac{1}{1+1}\binom{2(1)}{1} = 1$;

untuk $n = 2$, diperoleh $C_2 = \frac{1}{2+1}\binom{2(2)}{2} = 2$;

untuk $n = 3$; diperoleh $C_3 = \frac{1}{3+1}\binom{2(3)}{3} = 5$;

untuk $n = 4$; diperoleh $C_4 = \frac{1}{4+1}\binom{2(4)}{4} = 14$.

Dengan cara yang sama untuk $5 \leq n \leq 10$, didapat:

$C_5 = 42$, $C_6 = 132$, $C_7 = 429$, $C_8 = 1430$, $C_9 = 4862$, $C_{10} = 16769$.

Oleh karena itu, diperoleh barisan bilangan Catalan 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16769, ...

2.2 Grup

Sebelum membahas grup, berikut diberikan terlebih dahulu mengenai pendefinisian operasi biner.

Definisi 2.2.1 Diberikan himpunan tak kosong G. Operasi biner $*$ pada G adalah fungsi $G \times G \to G$ (Malik dkk., 1997).

Dengan kata lain, operasi $*$ pada himpunan G dikatakan operasi biner jika untuk setiap dua anggota $a, b \in G$, berlaku $a * b \in G$.

Contoh 2.2.1

Diberikan himpunan $G = \mathbb{Z}_n$ dan didefinisikan operasi $*$ dengan definisi

$$\bar{a} * \bar{b} = \bar{a} +_n \bar{b} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{a + b}.$$

Berikut ditunjukkan bahwa $*$ merupakan operasi biner pada G.

1. Ditunjukkan bahwa untuk setiap $\bar{a}, \bar{b} \in G$ berlaku $\bar{a} * \bar{b} \in G$.

   Diberikan sebarang $\bar{a}, \bar{b} \in G$,

   $$\bar{a} * \bar{b} = \bar{a} +_n \bar{b} = \overline{a + b}.$$

   Karena $\overline{a + b} \in G$ maka $\bar{a} * \bar{b} \in G$, jadi dapat ditunjukkan bahwa operasi $*$ tertutup di G.

2. Ditunjukkan bahwa operasi $*$ *well-defined*. Diberikan sebarang

   $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{b_1}, \overline{b_2} \in G$ dengan $\overline{a_1} = \overline{a_2}$ dan $\overline{b_1} = \overline{b_2}$. Diperoleh

   $$\overline{a_1} * \overline{b_1} = \overline{a_1} +_n \overline{b_1} = \overline{a_1 + b_1} = \overline{a_2 + b_2} = \overline{a_2} * \overline{b_2}\ .$$

   Dengan demikian, operasi $*$ *well-defined.*

Terbukti bahwa operasi $*$ pada himpunan G merupakan operasi biner.

Setelah memahami operasi biner, selanjutnya diberikan definisi grup.

Definisi 2.2.2 Sebuah grup adalah sebuah himpunan tak kosong G, beserta dengan sebuah operasi biner yang dinotasikan oleh $*$, sedemikian sehingga memenuhi aksioma berikut:

1. untuk setiap $a, b, c \in G$ mengakibatkan $(a * b) * c = a * (b * c)$ (sifat asosiatif);
2. untuk setiap $a \in G$ terdapat elemen $e \in G$ sehingga $e * a = a * e = a$ (e adalah elemen identitas di G);
3. untuk setiap $a \in G$ terdapat $a^{-1} \in G$ sehingga

   $$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$$

   (a^{-1} adalah invers a di G).

Grup G dikatakan grup komutatif jika $a * b = b * a$, untuk setiap $a, b \in G$ (Roman, 2005).

Contoh 2.2.1

Diberikan himpunan bilangan bulat modulo *n* berikut

$$\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}\}.$$

Diketahui bahwa setiap $\overline{a}. \overline{b} \in \mathbb{Z}_n$, $\overline{a} = \overline{b}$ jika $a - b = kn$, untuk suatu bilangan bulat *k*. Selanjutnya didefinisikan operasi penjumlahan $+_n$ dengan definisi:

$$\overline{a} +_n \overline{b} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{a+b}.$$

Berikut ditunjukkan bahwa $\mathbb{Z}_n$ dengan operasi $+_n$ merupakan grup.

Untuk setiap $\overline{a}. \overline{b} \in \mathbb{Z}_n$, berdasarkan pendefinisian operasi $+_n$ tersebut, diperoleh bahwa operasi $+_n$ merupakan operasi biner. Selanjutnya dibuktikan bahwa $\mathbb{Z}_n$ merupakan grup.

1. Untuk setiap $\overline{a}. \overline{b}, \overline{c} \in \mathbb{Z}_n$ berlaku $(\overline{a} +_n \overline{b}) +_n \overline{c} = \overline{a} +_n (\overline{b} +_n \overline{c})$.

   Diberikan sebarang $\overline{a}. \overline{b}, \overline{c} \in \mathbb{Z}_n$, berlaku

$$\begin{aligned}(\overline{a} +_n \overline{b}) +_n \overline{c} &= \overline{a+b} +_n \overline{c} \\ &= \overline{a+b+c} \\ &= \overline{a+(b+c)} \\ &= \overline{a} +_n (\overline{b} +_n \overline{c}).\end{aligned}$$

2. Terdapat $\overline{0} \in \mathbb{Z}_n$ sehingga untuk setiap $\overline{a} \in \mathbb{Z}_n$ berlaku

$$\overline{0} +_n \overline{a} = \overline{a} = \overline{a} +_n \overline{0}.$$

Diberikan sebarang $\overline{a} \in \mathbb{Z}_n$ berlaku

$$\overline{0} +_n \overline{a} = \overline{0 + a} = \overline{a} \text{ dan } \overline{a} +_n \overline{0} = \overline{a + 0} = \overline{a}.$$

3. Untuk setiap $\overline{a} \in \mathbb{Z}_n$ terdapat $\overline{-a} \in \mathbb{Z}_n$ sehingga $\overline{a} +_n \overline{-a} = \overline{0} = \overline{-a} +_n \overline{a}$.

Diberikan sebarang $\overline{a} \in \mathbb{Z}_n$, jelas bahwa $\overline{-a} \in \mathbb{Z}_n$ dan berlaku

$$\overline{a} +_n \overline{-a} = \overline{a + (-a)} = \overline{0} \text{ dan } \overline{-a} +_n \overline{a} = \overline{0}\,.$$

Karena syarat-syarat terpenuhi maka dapat disimpulkan bahwa $\mathbb{Z}_n$ merupakan grup terhadap operasi $+_n$ atau dapat dituliskan $(\mathbb{Z}_n, +_n)$.

Permasalahan pada penelitian ini berawal dari grup permutasi sehingga berikut diberikan pula penjelasan terkait grup permutasi.

2.3 Grup Permutasi

Sebelum mendefinisikan grup permutasi, berikut diberikan penjelasan terlebih dahulu mengenai permutasi. Permutasi membentuk suatu himpunan sendiri, adapun definisi dari permutasi diberikan sebagai berikut:

Definisi 2.3.1 Misalkan X adalah suatu himpunan tak kosong. Suatu permutasi π dari X adalah fungsi satu-satu dari X ke X (Malik dkk., 1997).

Berikut diberikan contoh dari permutasi.

Contoh 2.3.1

Diberikan $n = 4$ dan π adalah permutasi pada I_4 yang didefinisikan oleh $\pi(1) = 2$, $\pi(2) = 4$, $\pi(3) = 3$, dan $\pi(4) = 1$.

Dengan menggunakan notasi dua baris permutasi π dapat dituliskan sebagai berikut

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Setelah memahami definisi permutasi, selanjutnya diberikan definisi grup permutasi, berikut dijelaskan mengenai definisi grup permutasi.

Definisi 2.3.2 $\langle G,* \rangle$ disebut dengan grup permutasi dalam suatu himpunan tak kosong X jika elemen dari G adalah permutasi dari X dan operasi dari $*$ adalah komposisi dari dua fungsi (Malik dkk., 1997).

Contoh 2.3.2

Diberikan $I_3 = \{1,2,3\}$ dan S_3 adalah himpunan seluruh fungsi satu-satu dari I_3 ke I_3 maka, akan ditunjukkan bahwa $(S_3, \circ)$ adalah grup dimana $\circ$ merupakan fungsi komposisi.

Sebelum menunjukkan bahwa $(S_3, \circ)$ adalah sebuah grup permutasi. Berikut diberikan permutasi yang dapat dibentuk dari I_3.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Elemen identitas pada S_3 adalah $\sigma_1 = e$, karena $\sigma_1$merupakan permutasi terhadap dirinya sendiri. Oleh karena itu, diperoleh

$$S_3 = \{e, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\}.$$

Berikut ditunjukkan bahwa $(S_3, \circ)$ merupakan grup.

1. Ditunjukkan bahwa untuk setiap $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4 \in S_3$ berlaku $(\sigma_2 \circ \sigma_3) \circ \sigma_4 = \sigma_2 \circ (\sigma_3 \circ \sigma_4)$. Diberikan sebarang $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4 \in S_3$. Berlaku:

$$\begin{aligned}(\sigma_2 \circ \sigma_3) \circ \sigma_4 &= \sigma_2(\sigma_3) \circ \sigma_4 \\ &= \sigma_2(\sigma_3(\sigma_4)) \\ &= \sigma_2 \circ (\sigma_3 \circ \sigma_4).\end{aligned}$$

2. Ditunjukkan bahwa untuk setiap $\sigma \in S_3$ berlaku $e \circ \sigma = \sigma = \sigma \circ e$. Diberikan sebarang $\sigma \in S_3$. Berlaku:

$$e \circ \sigma = e(\sigma) = \sigma$$

$$\sigma \circ e = \sigma(e) = \sigma.$$

Dalam contoh ini dapat diilustrasikan $e \circ \sigma_4$ sebagai berikut:

$$1 \xrightarrow{e} 1 \xrightarrow{\sigma_4} 1$$

$$2 \xrightarrow{e} 2 \xrightarrow{\sigma_4} 3$$

$$3 \xrightarrow{e} 3 \xrightarrow{\sigma_4} 2$$

$$e \circ \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \sigma_4.$$

3. Ditunjukan bahwa untuk setiap $\sigma \in S_3$ terdapat $\sigma^{-1} \in S_3$ sehingga $\sigma \circ \sigma^{-1} = \mathrm{e} = \sigma^{-1} \circ \sigma$.

Diberikan sebarang $\sigma \in S_3$, maka

$$\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma(\sigma^{-1}) = e.$$

Oleh karena itu, terbukti bahwa $(S_3, \circ)$ merupakan grup permutasi.

Selain grup permutasi, dalam penelitian ini juga didasari oleh grup aditif bilangan bulat, berikut diberikan pula penjelasan mengenai grup aditif bilangan bulat.

2.4 Grup Aditif Bilangan Bulat $\mathbb{Z}_n$

Grup aditif merupakan suatu himpunan dengan operasinya disebut penjumlahan dinotasikan $+$. Dengan elemen identitasnya 0 dan invers dari elemen *a* dinotasikan dengan –*a*.

Grup aditif bilangan bulat $\mathbb{Z}_n$ adalah grup dengan elemen himpunannya menggunakan bilangan bulat dari 0 sampai dengan $n-1$. Operasi dasar $*$ yang digunakan adalah penjumlahan (+) yang digabungkan dengan operasi modulo *n*, yaitu mengambil sisa bilangan bulat ketika hasilnya dibagi dengan *n*, sehingga operasinya bisa dituliskan dengan $+_n$. Grup ini merupakan grup komutatif. Pembuktian grup ini telah diberikan pada Contoh 2.2.1 dimana elemen identitasnya $\bar{0}$ dan untuk setiap $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$ maka terdapat invers dari $\bar{a}$ adalah $\overline{-a}$ (Dummit dan Foote, 2004).

2.5. Lapangan

Pada penelitian ini juga ada kaitannya dengan lapangan sehingga diberikan definisi lapangan. Sebelum membahas mengenai lapangan berikut diberikan terlebih dahulu definisi ring dan ring divisi.

Definisi 2.5.1 Ring R adalah himpunan tak kosong dengan dua operasi biner $(+)$ dan $(\cdot)$ (disebut penjumlahan dan perkalian) sedemikian sehingga memenuhi aksioma berikut:

1. $(R, +, \ \cdot)$ merupakan grup abelian
2. R tertutup terhadap perkalian yang bersifat asosiatif, yaitu
   untuk setiap $a, b, c \in R$, maka $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \in R$
3. Dua hukum distributif berlaku pada R, yaitu untuk setiap $a, b, c \in R$, berlaku
   $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ dan $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

(Dummit dan Foote, 2004).

Definisi 2.5.2 Ring R dengan elemen identitas 1, dengan $1 \neq 0$, disebut ring divisi jika setiap elemen tak nol $a \in R$ memiliki invers terhadap perkalian, yaitu untuk setiap $a \in R$, dengan $a \neq 0$, $\exists b \in R$ sehingga $ab = ba = 1$. Ring divisi yang bersifat komutatif disebut dengan lapangan (*field*) (Dummit dan Foote, 2004).

Oleh karena itu, lapangan dapat didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.5.3 himpunan F yang padanya diberikan operasi penjumlahan $(+)$ dan operasi perkalian $(\cdot)$ disebut lapangan jika memenuhi aksioma berikut:

1. untuk setiap $a, b \in F$, berlaku $a + b \in F$ dan $a \cdot b \in F$;
2. untuk setiap $a, b \in F$, berlaku $a + b = b + a$ dan $a \cdot b = b \cdot a$;

3. untuk setiap $a, b, c \in F$, berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$ dan $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
4. untuk setiap untuk $a \in F$, terdapat $0 \in F$ dan $1 \in F$,berlaku $0 + a = 0 + a = a + 0 = a$ dan $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$;
5. untuk setiap $a \in F$, terdapat $-a \in F$ dan $a^{-1} \in F$, berlaku $a + (-a) = (-a) + a = 0$ dan $a^{-1} \cdot a = a^{-1} \cdot a = 1$;
6. untuk setiap $a, b, c \in F$, berlaku $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

(Adamson, 2007)

Contoh 2.5.1

Diberikan himpunan bilangan kompleks $\mathbb{C} = \{z | z = x + iy, x, y \in R\}$, beserta operasi penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\cdot)$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$(z_1, z_2) \to z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$; dan

$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$(z, z_2) \to z_1 z_2 := (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

Berikut ditunjukkan bahwa $\mathbb{C}$ adalah lapangan (*field*).

Untuk menunjukkan $\mathbb{C}$ adalah lapangan maka, ditunjukkan $\mathbb{C}$ memenuhi aksioma berikut:

1. Untuk setiap $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, berlaku $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$.

   Diberikan sebarang $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, sehingga berlaku

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \in \mathbb{C},$$

2. Untuk setiap $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, berlaku $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ dan $z_1 z_2 = z_2 z_1$.

Diberikan sebarang $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, sehingga berlaku

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) = (x_2 + iy_2) + (x_1 + iy_1) = z_2 + z_1$$

3. Untuk setiap $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, berlaku $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

   Diberikan sebarang $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, berlaku

$$\begin{aligned}(z_1 + z_2) + z_3 &= \big((x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)\big) + (x_3 + iy_3)\\ &= (x_1 + x_2 + x_3) + i(y_1 + y_2 + y_3)\\ &= \big(x_1 + (x_2 + x_3)\big) + i\big(y_1 + (y_2 + y_3)\big)\\ &= x_1 + (x_2 + x_3) + iy_1 + i(y_2 + y_3)\\ &= (x_1 + iy_1) + \big((x_2 + x_3) + i(y_2 + y_3)\big)\\ &= z_1 + (z_2 + z_3),\end{aligned}$$

4. Untuk setiap untuk $z_1 \in \mathbb{C}$, terdapat $0 + 0i \in \mathbb{C}$, berlaku

   $(0 + 0i) + z_1 = z_1 + (0 + 0i) = z_1$.

   Diberikan sebarang $z_1 \in \mathbb{C}$, sehingga berlaku

$$\begin{aligned}(0 + 0i) + z_1 &= (0 + 0i) + (x_1 + iy_1) = (0 + x_1) + i(0 + y_1)\\ &= (x_1 + 0) + i(y_1 + 0) = (x_1 + iy_1) + (0 + 0i)\\ &= (x_1 + iy_1) = z_1.\end{aligned}$$

5. Untuk setiap $z_1 \in \mathbb{C}$, terdapat $-z_1 = -(x_1 + iy_1) \in \mathbb{C}$, berlaku $z_1 + (-z_1) = (-z_1) + z_1 = 0$.

   Diberikan $z_1 \in \mathbb{C}$, sehingga berlaku

$$\begin{aligned}z_1 + (-z_1) &= (x_1 + iy_1) + \big(-(x_1 + iy_1)\big)\\ &= (x_1 - x_1) + i(y_1 - y_1) = (-z_1) + z_1\\ &= (x_1 - x_1) + i(y_1 - y_1) = 0 + i0 = 0.\end{aligned}$$

6. Untuk setiap $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, berlaku $z_1 z_2 \in \mathbb{C}$.

   Diberikan sebarang $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, sehingga berlaku

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_2 y_1 + x_1 y_2) \in \mathbb{C}$$

7. Untuk setiap $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, berlaku $z_1 z_2 = z_2 z_1$.

   Diberikan sebarang $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, sehingga berlaku

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$= x_1 x_2 + i x_2 y_1 + i x_1 y_2 - y_1 y_2$$

$$= x_2(x_1 + iy_1) - iy_2(x_1 + iy_1)$$

$$= (x_2 + iy_2) + (x_1 + iy_1) = z_2 z_1.$$

8. Untuk setiap $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, berlaku $(z_1 z_2) z_3 = z_1(z_2 z_3)$.

   Diberikan sebarang $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, sehingga berlaku

$$(z_1 z_2) z_3 = [(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)](x_3 + iy_3)$$

$$= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) x_3 + (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)\, iy_3$$

$$= (x_1 + iy_1)(x_2 x_3 + i y_2 x_3) + (x_1 + iy_1)(x_2 i y_3 - y_2 y_3)$$

$$= (x_1 + iy_1)[x_2(x_3 + iy_3) + iy_2(x_3 + iy_3)]$$

$$= (x_1 + iy_1)[(x_2 + iy_2)(x_3 + iy_3)]$$

$$= z_1(z_2 z_3).$$

9. Untuk setiap $z_1 \in \mathbb{C}$, terdapat $1 + i0 \in \mathbb{C}$, berlaku $z_1(1 + i0) = (1 + i0) z_1 = z_1$.

   Diberikan sebarang $z_1 \in \mathbb{C}$, berlaku

   $z_1(1 + i0) = (x_1 + iy_1)(1 + i0)$

$$= \big(x_1(1) - iy_1(0)\big) + i\big(x_1(0) + y_1(1)\big)$$

$$= ((1)x_1 - (0)iy_1) + i\big((0)x_1 + (1)y_1\big) = z_1(1 + i0)$$

$$= (x_1 + iy_1) = z_1.$$

10. Untuk setiap $z_1 \in \mathbb{C}$ dan $z_1 \neq 0$, terdapat $(z_1)^{-1} = \frac{x_1}{x_1^2+y_1^2} + i\,\frac{-y_1}{x_1^2+y_1^2} \in \mathbb{C}$, berlaku $(z_1)^{-1}z_1 = z_1(z_1)^{-1} = 1$.

Diberikan sebarang $z_1 \in \mathbb{C}$, sehingga berlaku

$$(z_1)^{-1}z_1 = \left(\frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2} + i\,\frac{-y_1}{x_1^2 + y_1^2}\right)(x_1 + iy_1)$$

$$= \left(\left(\frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}\right)(x_1) + \left(\frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2}\right)(y_1)\right) +$$

$$\left(\left(\frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}\right)i(y_1) - \left(\frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2}\right)(x_1)\right)$$

$$= \left((x_1)\left(\frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}\right) + (y_1)\left(\frac{y^1}{x_1^2 + y_1^2}\right)\right) +$$

$$\left(i(y_1)\left(\frac{x_1}{x_1^2+y_1^2}\right) - (x_1)\left(\frac{y^1}{x_1^2+y_1^2}\right)\right) = z_1(z_1)^{-1}$$

$$= \left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{x_1^2 + y_1^2}\right) + i\left(\left(\frac{x_1y_1}{x_1^2 + y_1^2}\right) - \left(\frac{x_1y_1}{x_1^2 + y_1^2}\right)\right)$$

$$= 1 + i0 = 1.$$

11. Untuk setiap $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, berlaku $z_1(z_2 + z_3) = (z_1z_2) + (z_1z_3)$.

Diambil sebarang $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, sehingga berlaku

$$z_1(z_2 + z_3) = (x_1 + iy_1)[(x_2 + iy_2) + (x_3 + iy_3)]$$

$$= (x_1 + iy_1)(x_2 + x_3 + iy_2 + iy_3)$$

$$= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1iy_2 + x_1iy_3 + x_2iy_1$$

$$+x_3iy_1 - y_1y_2 - y_1y_3$$

$$= (x_1x_2 + x_1iy_2 + x_2iy_1 - y_1y_2)$$

$$+(x_1x_3 + x_1iy_3 + x_3iy_1 - y_1y_3)$$

$$= \left(x_1(x_2 + iy_2) + iy_1(x_2 + iy_2)\right)$$

$$+\left(x_1(x_3 + iy_3) + iy_1(x_3 + iy_3)\right)$$

$$= (z_1z_2) + (z_1z_3).$$

Oleh karena himpunan $\mathbb{C}$ dengan dua operasi yang berlaku memenuhi semua aksioma lapangan, sehingga $\mathbb{C}$ merupakan lapangan.

2.6 *Multiset*

Multiset didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.6.1 Misal S adalah sebuah himpunan tak kosong. Suatu *multiset* M dari himpunan S adalah sebuah pasangan berurut.

$$M = \left\{(s_i, n_i)\middle| s_i \in S, n_i \in \mathbb{Z}^+, s_i \neq s_j \text{ untuk } i \neq j\right\},$$

dengan $\mathbb{Z}^+ = \{1,2, \dots .\}$ bilangan n_i sebagai multiplisitas elemen s_i dalam M. Ukuran dari suatu *multiset* M adalah jumlah dari multiplisitas (jumlah kemunculan s_i) yang mungkin dari seluruh anggota S (Roman, 2005).

Selain itu dapat pula didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.6.2 Sebuah koleksi elemen dimana elemen tersebut diizinkan untuk mengalami pengulangan, disebut sebuah *multiset*. Secara formal jika X adalah himpunan suatu elemen, suatu *multiset A* digambarkan oleh himpunan X yang dipetakan dengan suatu fungsi C_A yang didefinisikan oleh $C_A : X \rightarrow N$, dimana N merupakan himpunan bilangan *non* negatif (Tripaty dkk., 2018).

Bentuk *multiset* tidak sama dengan himpunan yang biasa ditemui, jadi *multiset* adalah sebuah himpunan yang elemennya boleh berulang (tidak harus berbeda).

Contoh 2.6.1

Diberikan himpunan $X_1 = \{a, a, b, b, b\}$ dan $X_2 = \{a, a, a, b, b, b, c, c, c, c\}$, dengan X_1 dan X_2 merupakan suatu contoh dari *multiset*. Bila dinotasikan dalam bentuk ekponensial dapat ditulis dengan $\{a^2, b^3\}$,$\{a^3, b^3, c^4\}$.

2.7 Partisi Bilangan

Bagi yang sudah menonton film *The Man Who Knew Infinity* mungkin pernah mendengar istilah ini, karena hal inilah yang dipelajari oleh Srinivasa Ramanujan dan Godfrey H. Hardey pada tahun 1918. Adapun definisi dari partisi bilangan adalah sebagai berikut.

Definisi 2.7.1 Partisi dari bilangan bulat positif *n* adalah barisan turun yang terbatas dari bilangan bulat positif $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, sehingga $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = n$. disebut bagian dari partisi (Andrews, 1998).

Definisi 2.7.2 Fungsi partisi $p(n)$ menyatakan banyaknya partisi yang dimiliki oleh bilangan bulat *n* atau disebut juga sebagai jumlah partisi dari *n* (Andrews, 1998).

Contoh 2.7.1

Ditentukan bahwa partisi bilangan dari $n = 5$ adalah sebagai berikut:

$p(5)$: 5, 4 + 1, 3 + 2 ,3 + 1 + 1, 2 + 2 + 1, 2+1+1+1, 1+1+1+1+1.

(2,2,1) adalah partisi dari 5 karena 2+2+1 = 5, kemudian 1 dan 2 disebut bagian partisi dari 5 dan fungsi partisi untuk 5 adalah $p(5) = 7$.

Fungsi pembangkit untuk partisi bilangan diberikan dalam bentuk berikut:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)$$

$$(1 + x^3 + x^6 + \cdots) \ldots (1 + x^n + x^{2n} + \cdots), \qquad (2.6)$$

dengan $(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)$ mewakili kemunculan bilangan 1, $(1 + x^2 + x^4 + \cdots)$ bilangan 2 dan $(1 + x^3 + x^6 + \cdots)$ bilangan 3, begitu untuk selanjutnya dengan pangkatnya menyatakan sebagai banyak pengulangannya (Wilf, 2000).

Contoh 2.7.2

Berdasarkan Contoh 2.6.1 ditunjukkan bahwa fungsi pembangkit untuk partisi $n = 5$. Perhatikan bahwa fungsi partisi dari $p(5)$sebagai berikut:

5, 4 + 1, 3 + 2 ,3 + 1 + 1, 2 + 2 + 1, 2+1+1+1, 1+1+1+1+1.

Oleh karena itu, bentuk fungsi pembangkitnya adalah

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^5)(1 + x^2 + x^4)(1 + x^3)(1 + x^4)(1 + x^5).$$

Bila dilakukan operasi perkalian pada polinomial tersebut akan diperoleh bahwa koefisien dari x^5 adalah 7 atau $7x^5$, sehingga dari sini dapat diketahui bahwa ada 7 cara untuk mempartisi 5.

Pada Persamaan 2.6, dimisalkan $1 + x^n + x^{2n} + \cdots$ sebagai deret geometri, dimana diketahui bahwa

$$1 + x^n + x^{2n} + \cdots = \frac{1}{1 - q^n}.$$

Jadi, fungsi pembangkit $\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^n}. \qquad (2.7)$$

Partisi bilangan *n* dengan paling banyak M bagian dan elemennya tidak lebih dari *N*, fungsi pembagkitnya dinotasikan oleh $p(N; M, n)$ dan didefinisikan dalam persamaan berikut.

$$p(N, M, n) = \sum_{n \geq 0} p(N; M, n)q^n \qquad (2.8)$$

(Andrew, 1998),

dalam bentuk polinomial didefinisikan dalam persamaan berikut:

$$p(N, M, q) = \frac{(1 - q^{M+1})(1 - q^{M+2}) \dots (1 - q^{M+N})}{(1 - q)(1 - q^2) \dots (1 - q^N)}$$

(Andrew, 1998).

2.8 Koefisien *q*-Binomial

Sebelum mendefinisikan koefisien *q*-binomial berikut diberikan terlebih dahulu definisi koefisien Binomial.

Definisi 2.8.1 Pada koefisien binomial $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ menunjukkan cara menghitung *r*-kombinasi yang dipilih dari dari *n* elemen dan didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!},$$

dengan $0 \leq r \leq n$. Jika $r > n$, maka $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = 0$ (Koshy, 2009).

Bentuk umum dari koefisien binomial adalah koefisien Gauss binomial atau dikenal juga dengan koefisien q-binomial yang didefinisikan dalam persamaan berikut:

Definisi 2.8.2 Koefisien q-binomial didefinisikan sebagai persamaan berikut

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_q = \frac{(1-q^m)(1-q^{m-1})\ldots(1-q^{m-n+1})}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)}$$

(Cohn, 2004).

Contoh 2.8.1

Ditentukan koefisien q-binomial untuk $0 \leq m \leq 3$ dan $0 \leq n \leq 2$.

Berikut adalah koefisien q-binomial untuk $0 \leq m \leq 3$ dan $0 \leq n \leq 2$.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_q = 1;$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_q = \frac{1-q}{1-q} = 1;$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_q = \frac{1-q^2}{1-q} = 1+q;$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}_q = \frac{1-q^3}{1-q} = 1+q+q^2;$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}_q = \frac{(1-q^3)(1-q^2)}{(1-q)(1-q^2)} = 1+q+q^2;$$

Koefisien q-binomial memiliki hubungan terkait dengan partisi bilangan dan dituliskan dalam persamaan berikut:

$$p(N,M,n)q^n = \begin{bmatrix} N+M \\ N \end{bmatrix}_q, \quad (2.9)$$

dengan $p(N;M,n)$ adalah fungsi pembangkit dari partisi bilangan n dengan paling banyak M bagian dan elemennya tidak lebih dari N (Pentland, 2020), $\begin{bmatrix} N+M \\ N \end{bmatrix}_q$ didefinisikan dalam persamaan berikut:

Definisi 2.8.3 $\begin{bmatrix} N+M \\ N \end{bmatrix}_q$ didefinisikan dalam persamaan berikut

$$\begin{bmatrix} N+M \\ N \end{bmatrix}_q = \frac{\prod_{k=1}^{N}(1-q^{M+k})}{\prod_{k=1}^{N}(1-q^k)},$$

(Kronenburg, 2022).

Contoh 2.8.2

Ditentukan bahwa koefisien q^4 untuk partisi bilangan 4 dengan paling banyak 2 bagian dan elemennya tidak lebih dari 2, $p(2,2,4)q^4$ adalah sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 2+2 \\ 2 \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}_q = \frac{(1-q^3)(1-q^4)}{(1-q)(1-q^2)} = (1+q^2)(1+q+q^2)$$

$$= 1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4,$$

sehingga diperoleh koefisien $q^4 = 1$, yang artinya banyak partisi dari 4 yang memenuhi syarat $p(2,2,4)q^4$ adalah 1.

2.9 Siklotomik Polinomial

Sebelum diberikan definisi siklotomik polinomial, berikut diberikan definisi akar dari satuan ke- n dan akar primitif dari satuan ke-n

Definisi 2.9.1 Misalkan n adalah bilangan bulat, suatu bilangan x dikatakan akar dari satuan ke- n bila memenuhi persamaan berikut:

$$x^n = 1,$$

(Hadlock, 2000).

Definisi 2.9.2 Misal n adalah bilangan bulat positif. Suatu akar primitif dari satuan ke-n adalah jika akar dari satuan ke-n bukan merupakan akar dari satuan ke-m untuk beberapa m, yaitu jika

$$x^n = 1 \text{ dan } x^m \neq 1 \text{ untuk } m = 1,2,3, \ldots, n-1,$$

jika n adalah bilangan prima, maka semua akar dari satuan ke-n, kecuali 1 adalah primitif (Hadlock, 2000).

Untuk menentukan akar primitif dari satuan ke-n dapat menggunakan $e^{2\pi ik/n}$, dalam fungsi trigonometri dapat dituliskan dalam persamaan berikut:

$$e^{2\pi ik/n} = cos(2\pi k/n) + i \sin(2\pi k/n)$$

(Hadlock, 2000).

Contoh 2.9.1

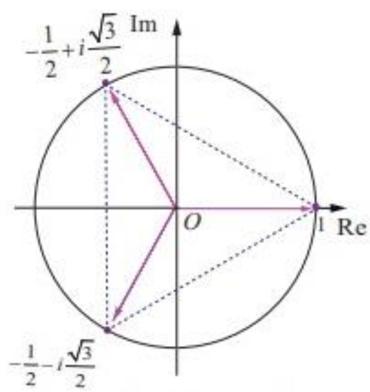
Diberikan polinomial x^3, akan ditentukan akar dari satuan ke-3 dan akar primitif dari satuan ke-3.

Berdasarkan Definisi 2.9.1 dan 2.9.2, maka akar dari satuan ke-3 dan akar primitif dari satuan ke-3 dapat dituliskan dalam persamaan

$$x^3 = 1,$$

oleh karena itu akar dari satuan ke-3 adalah $\zeta_3, \zeta_1^3, \zeta_2^3$, dengan $\zeta_3 = 1$,

$\zeta_1^3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, dan $\zeta_2^3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Akar primitif dari satuan ke-3 adalah ζ_3, ζ_2^3, yaitu $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ dan $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Berikut diberikan ilustrasi geometri dari akar primitif dari satuan ke-3 ($x^{\mathbf{3}} = 1$).



Gambar 2.1 Ilustrasi geometri dari akar primitif dari satuan ke-3 ($x^3 = 1$)

Lapangan $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ disebut lapangan siklotomik dari akar primitif dari satuan ke-*n*, sehingga disebut polinomial siklotomik ke-*n*. Sehingga definisi dari polinomial siklotomik ke-*n* diberikan dalam persamaan berikut:

Definisi 2.9.3 Polinomial siklotomik ke-*n* didefinisikan dalam persamaan

$$\Phi_n(x) = \prod_{1 \le j \le n} (x - \zeta_n^j) \in C[x],$$

(Guo dkk., 2022).

Contoh 2.9.2

Berikut ini polinomial siklotomik ke-*n* dengan $1 \leq n \leq 3$.

$$\phi_1(x) = x - 1$$

$$\phi_2(x) = (x - \zeta_2^1) = x + 1$$

$$\phi_3(x) = (x - \zeta_3^1)(x - \zeta_3^2) = x^2 + x + 1.$$

Definisi 2.9.4 Siklotomik polinomial ke-*n* didefinisikan dalam bentuk persamaan berikut:

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \phi_d(x),$$

(Bzdega dkk., 2016).

Contoh 2.9.3

Bila direpresentasikan dalam faktorisasi polinomial $x^n - 1$ maka persamaannya adalah

$$x^1 - 1 = \phi_1(x) = x - 1$$

$$x^2 - 1 = \phi_1(x)\phi_2(x) = (x + 1)$$

$$x^3 - 1 = \phi_1(x)\phi_3(x) = (x^2 + x + 1).$$

Oleh karena itu bila direpresentasikan dalam faktorisasi polinomial $x^n - 1$, dengan $1 \leq n \leq 3$, dapat ditunjukkan dalam persamaan berikut:

$$x^1 - 1 = x - 1;$$

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1);$$

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1).$$

2.10 Bilangan Stirling

Ketika membicarakan partisi, maka ada suatu bilangan yang berhubungan dengan hal ini, yaitu bilangan Stirling. Bilangan Stirling memiliki dua jenis. Bilangan Stirling jenis kesatu adalah menghitung banyaknya susunan dari *n* objek kedalam k permutasi siklik yang tak kosong dan diberi lambang *s(n,k)*, *s*edangkan bilangan Stirling jenis kedua adalah menghitung banyaknya cara untuk mempartisi suatu himpunan dari n objek ke dalam k himpunan bagian tak kosong. Berikut adalah definisi bilangan Stirling jenis pertama dan kedua.

Definisi 2.10.1. Bilangan Stirling jenis pertama, dengan k dan n bilangan bulat, $1 \leq n \leq k - 1$ memenuhi relasi rekursi berikut:

$$s(n,k) = (n-1)s(n-1,k) + s(n-1,k-1),$$

dengan syarat awal $s(n,0) = 0$, untuk $n \geq 1$ dan $s(n,n) = 1$, untuk $n \geq 0$ (Riordan, 2012).

Definisi 2.10.2 Bilangan *S(n, k)* adalah himpunan bagian dari $[n]$ ke tepat k bagian, yang dapat memenuhi relasi rekursi berikut:

$$S(n+1,k) = S(n,k-1) + kS(n,k),$$

dengan $S(1,1) = 1, S(n,0) = 0$ untuk $n \geq 1$, dan $S(n,k) = 0$ untuk $n < k$ (Riordan, 2012).

Jumlah dari bilangan Striling jenis kedua dikenal bilangan Bell dengan definisi sebagai berikut:

Definisi 2.10.3 Bilangan Bell didefinisikan dalam persamaan

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) = B_n$$

(Mansour dan Schork, 2016).

Berikut adalah tabel bilangan Stirling jenis kedua dan bilangan Bell untuk $1 \leq k \leq n \leq 9$.

Tabel 2.1 Bilangan Stirling Jenis Kedua, $S(n,k)$ dan Bilangan Bell $B_n = B_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)$

n \ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Bilangan Bell
1	1									1
2	1	1								2
3	1	3	1							5
4	1	7	6	1						15
5	1	15	25	10	1					52
6	1	31	90	65	15	1				203
7	1	63	301	350	140	21	1			877
8	1	127	966	1701	1050	266	28	1		4140
9	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1	21147

2.11 Permasalahan Grup dan Bilangan Catalan

Berdasarkan publikasi R. Guy pada tahun 1993 permasalahan grup yang berkaitan dengan bilangan Catalan diawali oleh suatu permasalahan yang diberikan oleh Ernest T. Parker, dikenal dengan permasalahan permutasi Parker's terkait bilangan Catalan . Adapun pertanyaan tersebut adalah misal

a_i, $1 \leq i \leq n$, adalah n bilangan bulat yang merupakan jumlah hasil pergandaan n+1, sehingga terdapat permutasi $\{x_i\}$ dan $\{y_i\}$ dari $1,2,\dots,n$ sedemikian sehingga untuk setiap i,

$$x_i + y_i = a_i \bmod (n+1).$$

Akan tetapi, tak ada referensi yang mendukung permasalahan tersebut. Oleh karena itu, dalam permasalahan ini R. Guy menyertakan tabel penjumlahan untuk bilangan 1 sampai *n*, mod *n*+1. Tabel tersebut merupakan petunjuk yang diberikan Jhon Selfridge (Guy, 1993). Berikut diberikan contoh penjumlahan untuk bilangan 1 sampai *n*, mod *n+1* untuk $1 \leq n \leq 5$.

Tabel 2.2 Grup aditif $\mathbb{Z}_{\mathbf{6}}$

$+_5$	$\bar{\mathbf{5}}$	$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{0}$
$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$
$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$
$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$
$\bar{\mathbf{5}}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$

Pada Tabel 2.2 dapat diperoleh ada sebanyak *n* entri untuk 0 dan $n-1$ entri untuk yang lainnya. Jadi ada sebanyak *n* residu dan mengalami pengulangan, namun jumlah *0* mod $n+1$ dapat ditemukan tepat satu kali dalam setiap baris dan kolom, sehingga ada sebanyak *n!* untuk menentukan cara menyelesaikan permutasi Parker bila diikuti dengan pengulangan. Permasalahannya adalah ada berapa banyak *multiset* yang dapat dibentuk berdasarkan residu *n* dari mod $n+1$ (Guy, 1993).

Pada tahun yang sama dengan dirilisnya permasalahan tersebut, Ira M. Gessel dari Universitas Brandies, Waltham, Massachusetts, memberikan pemecahan masalah (Koshy, 2009). Adapun contoh yang dapat diberikan adalah sebagai berikut.

Contoh 2.11.1.

Berikut adalah jumlah dari *multiset* dengan *n*-elemen $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ dengan anggota $a_i \in \mathbb{Z}_{\boldsymbol{n+1}}$ sedemikian sehingga $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$ adalah identitas penjumlahan $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{n+1}}$. Dinotasikan *multiset* $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ sebagai *n*-tuple $a_1, a_2, \dots, a_n$. Tabel 3 akan menunjukkan kemungkinan *multiset* dengan *n*-elemen yang mungkin dengan $1 \leq n \leq 4$.

Tabel 2.3 Jumlah *multiset* dengan *n*-elemen dari grup aditif $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{n+1}}$ untuk $1 \leq n \leq 4$.

n	$\mathbb{Z}_{\boldsymbol{n+1}}$	***Multiset* dengan *n*-elemen**	**Banyak *Multiset***
1	$\{\bar{0}, \bar{1}\}$	$\{\bar{0}\}$	1
2	$\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$	$\{\bar{0}, \bar{0}\}$ $\{\bar{1}, \bar{2}\}$	2
3	$\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$	$\{\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}\}$ $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}\}$ $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{2}\}$ $\{\bar{1}, \bar{1}, \bar{2}\}$ $\{\bar{2}, \bar{3}, \bar{3}\}$	5
4	$\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$	$\{\bar{0}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{4}\}$ $\{\bar{0}, \bar{0}, \bar{2}, \bar{3}\}$ $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{3}\}$ $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{2}\}$ $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{4}\}$ $\{\bar{0}, \bar{3}, \bar{3}, \bar{4}\}$ $\{\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{2}\}$ $\{\bar{1}, \bar{1}, \bar{4}, \bar{4}\}$ $\{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ $\{\bar{1}, \bar{3}, \bar{3}, \bar{3}\}$ $\{\bar{2}, \bar{2}, \bar{2}, \bar{4}\}$ $\{\bar{2}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{3}\}$ $\{\bar{3}, \bar{4}, \bar{4}, \bar{4}\}$	14

Untuk $0 \leq n \leq 4$ ternyata jumlah *multiset* dengan n-elemen merupakan bilangan Catalan C_4 (Koshy, 2009).

III. METODE PENELITIAN

3.1 Waktu Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada semester genap tahun akademik 2021/2022

3.2 Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan di jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

3.3 Langkah-Langkah Penelitian

1. Menentukan elemen dari grup aditif $\mathbb{Z}_{n+1}$, untuk $1 \leq n \leq 9$.
2. Membentuk suatu *multiset* yang terbentuk dari elemen $\mathbb{Z}_{n+1}$ dengan cara mencacah anggota grup menjadi suatu partisi yang memenuhi syarat, misalkan $a_i \in \mathbb{Z}_{n+1}$, maka $a_1 + a_2 + \ldots + a_i = 0$, dengan 0 merupakan elemen identitas dari grup aditif $\mathbb{Z}_{n+1}$, sehingga $(a_1, a_2, \cdots, a_i)$ akan tersusun menjadi suatu *n*-tupel.
3. Menjumlahkan semua *multiset* yang mungkin terbentuk berdasarkan bagian partisi $\mathbb{Z}_{n+1}$.
4. Menghitung total banyaknya *multiset* grup $\mathbb{Z}_{n+1}$ terbentuk. Kemudian, dilakukan pengecekan apakah jumlah sesuai dengan urutan dari bilangan Catalan.

5. Menganalisis langkah-langkah dan syarat-syarat dalam pencacahan, pada proses ini mulai dibuat algoritma program phyton agar dapat diuji secara komputasi, sehingga memudahkan untuk memperoleh *multiset* dari grup $\mathbb{Z}_{n+1}$.
6. *Multiset* dari setiap grup $\mathbb{Z}_{n+1}$ dikelompokkan berdasarkan blok ($k(n+1)$, untuk $0 \leq k \leq n-1$). Pada langkah ini diperoleh susunan bilangan yang terbentuk dari banyaknya *multiset* yang terbentuk berdasarkan blok.
7. Bila susunan bilangan dari banyaknya *multiset* telah terbentuk, dilakukan analisis hubungannya dengan bilangan Catalan dan bilangan Stirling jenis kedua, sehingga akan menunjukkan bahwa *multiset* dari elememen grup $\mathbb{Z}_{n+1}$ akan membentuk susunan bilangan Stirling jenis kedua yang baru.

Berikut diberikan diagram alur dari penelitian ini

Studi literatur terkait bilangan Catalan dan aplikasinya (Koshy,2005), permasalahan permutasi Parker (Guy, 1993) serta bilangan Stirling dan Bell (Riordan, 2012).

Tahap 1

Berdasarkan contoh yang diberikan oleh Gessel, dilakukan pencacahan *multiset* untuk $1 \leq n \leq 7$ yang dibentuk dari grup $\mathbb{Z}_{n+1}$.

Tahap 2

Menentukan syarat pembentukan *multiset*, kemudian dikonstruksi sebuah algoritma program untuk membentuk dan mengetahui banyaknya multiset yang terbentuk.

Tahap 3

Membuat program terkait pembentukan partisi yang dibuat menjadi suatu *multiset* yang memenuhi syarat yang telah diberikan.

Tahap 4

Menyusun hasil partisi (*multiset*) yang dibentuk oleh grup aditif $\mathbb{Z}_{n+1}$ menjadi suatu susunan bilangan, dengan bilangan Catalan merupakan jumlah hasil partisi dari perblok dalam setiap grup.

Tahap 5

Menganalisis perbedaan bilangan Stirling jenis kedua dan jumlah *multiset* dari grup aditif $\mathbb{Z}_{n+1}$.

Gambar 3.1 Diagram alur Penelitian

BAB V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1. Kesimpulan

Berdasarkan dari penelitian ini dapat disimpulkan beberapa hal, yaitu banyak *multiset* yang mungkin terbentuk dari grup aditif $\mathbb{Z}_{10}$ merupakan bilangan Catalan. Selain itu, bila *multiset* grup aditif $\mathbb{Z}_{10}$ tersebut dibagi menjadi beberapa bagian dimana setiap bagian tergantung dari nilai $k(n+1)$ dengan $0 \leq k \leq n-1$, maka banyak *multiset* yang membentuk bilangan Stirling jenis kedua. Tetapi, bilangan Stirling jenis kedua yang terbentuk berdasarkan *multiset* grup aditif $\mathbb{Z}_{10}$ memiliki nilai awal yang berbeda yaitu $S(n,0)=1$ dan nilai $S(n,n)=0$. Untuk $S(n,1)$ sampai $S(n,n-2)$ nilainya lebih kecil, sedangkan untuk $S(n,n-1)$ memiliki nilai yang lebih besar. Jumlah bilangan Stirling adalah bilangan Bell, namun untuk bilangan Stirling yang didasari oleh *multiset* grup aditif $\mathbb{Z}_{10}$ adalah bilangan Catalan. Oleh karena itu bilangan Stirling jenis kedua yang didasari oleh pembentukkan *multiset* grup aditif $\mathbb{Z}_{10}$ merubah susunan bilangan Stirling jenis kedua yang telah dikenal sebelumnya.

2.1 Saran

Adapun saran yang dapat diberikan dalam penelitian ini adalah masih dibutuhkan modifikasi program yang dikonstruksi untuk efisiensi waktu. Selain itu, pembuktian bahwa banyaknya *multiset* yang terbentuk juga dapat menggunakan akar primitif.

DAFTAR PUSTAKA

Adamson, I.T., 2007. *Introduction to field theory*. Courier Corporation.

Albert, M. H. 2001. Permutations of a Multiset Avoiding Permutations of Length 3. *Europ. J. Combinatorics* Vol 22, 1021–1031.

Andrews, G.E., 1998. *The theory of partitions* (No. 2). Cambridge university press. *arXiv:2104.05701v1* [math.CO].

Boyadzhiev, K.N., 2021. Exotic series with Bernoulli, harmonic, Catalan, and Stirling numbers. *arXiv preprint arXiv:2110.00689*.

Bzdega, B., Herrera-Poyatos, A. and Moree, P., 2016. Cyclotomic polynomials at roots of unity. *arXiv preprint arXiv:1611.06783*.

Cohn, H., 2004. Projective geometry over $\mathbf{F}_1$ and the Gaussian Binomial Coefficients. *Amer. Math. Monthly*. **111** (6): 487-495.

Dummit, S. D and Foote, M. R., 2004. *Abstract Algebra* Third edition. Jhon Wiley&Sons, Inc.

Galashin, P. and Lam, T., 2021. Positroid Catalan numbers. *arXiv preprint arXiv:2104.05701*.

Gorsky, E., Hawkes, G., Schilling, A. and Rainbolt, J., 2020. Generalized $ q, t $-Catalan numbers. *Algebraic Combinatorics*, *3*(4), pp.855-886.

Guo, V.J. and Wang, S.D., 2022. Factors of certain sums involving central q-binomial coefficients. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, *116*(1), pp.1-10.

Guy, R., 1993. Parker's permutation problem involves the Catalan numbers. *The American Mathematical Monthly*, *100*(3), pp.287-289.

Hadlock, C.R., 2000. *Field theory and its classical problems* (No. 19). Cambridge University Press.

İlkhan, M., 2020. A new conservative matrix derived by Catalan numbers and its matrix domain in the spaces c and c 0. *Linear and Multilinear Algebra*, *68*(2), pp.417-434.

Kronenburg, M.J., 2022. Computation of q-Binomial Coefficients with the P (n, m) Integer Partition Function. *arXiv preprint arXiv:2205.15013*.

Koshy, T., 2009. *Catalan numbers with applications*. Oxford University Press.

Li, W.H., Qi, F., Kouba, O. and Kaddoura, I., 2020. *A further generalization of the Catalan numbers and its explicit formula and integral representation*.

Malik, D.S, Mordeson, J. N, and Sen, M.K. 1997. *Fundamental of Abstract Algebra*. The McGraw-Hill Companies, inc.

Mansour, T. and Schork, M., 2016. *Commutation relations, normal ordering, and Stirling numbers (pp. 63-65)*. Boca Raton: CRC Press.

Mikić, J., 2021. On a New Alternating Convolution Formula for the Super Catalan Numbers. *arXiv preprint arXiv:2110.04805*.

Ndagijimana, S., 2016. *On Some Properties of Catalan Numbers and Application in RNA Secondary Structure* (Doctoral dissertation, University of Rwanda). http://hdl.handle.net/123456789/898.

Pak, I., 2014. History of Catalan Number. *arXiv:1408.5711v2* [math.HO].

Pentland, D., 2020. Coefficients of Gaussian Polynomials Modulo N*. arXiv preprint arXiv:1801.00188v2.*

Riordan, J., 2012. *Introduction to combinatorial analysis*. Courier Corporation.

Roman, S., 2005. *Advanced Linier Algebra*. Springer.

Saračević, M., Adamović, S. and Biševac, E., 2018. Application of Catalan numbers and the lattice path combinatorial problem in cryptography. *Acta Polytechnica Hungarica*, *15*(7), pp.91-110.

Singmaster, D., 2018. An Elementary Evaluation of the Catalan Numbers. *The American Mathematical Monthly* Vol 85.5: 366-368.

Tripathy , B. C, Debnath, S and Rakshit, D. 2018. On Multiset Group. *Proyecciones Journal of Mathematics*, Vol. 37.3: 481-491.

Wamiliana, W., Suharsono, S. and Kristanto, P.E., 2019. Counting the sum of cubes for Lucas and Gibonacci numbers. *Science and Technology Indonesia*, *4*(2), pp.31-35.

Wilf, H.S., 2000. Lectures on integer partitions. *avaiable at: http://www. cis. upenn. edu/∼ wilf.*